

说 e

宁 挺



近代数学小丛书

福建教育出版社

说 *e*

宁 挺

福建教育出版社

内 容 提 要

本书通俗地介绍 e 的本质以及 e 在数学和自然科学中的应用。内容丰富多采，妙趣横生。

本书可以作为高中学生课外读物，也可供理科大学生、中学数学教师以及数学爱好者阅读。

说 e

编著：宁 槌

出版：福建教育出版社

发行：福建省新华书店

印刷：福建教育出版社印刷厂

787×1092毫米 32开本 4.25印张 89千字

1985年3月第一版 1985年3月第一次印刷

印数：1——7,730

书号：7159·921 定价：0.52元

目 录

一. 引题.....	1
二. 2.7182.....的诞生.....	4
1. 一个重要的极限.....	4
2. 我国数学界的贡献.....	6
3. 来自太平洋彼岸的方法.....	14
4. 在连续变量的情况下.....	16
5. e 是一个无理数.....	18
6. e 与大数学家欧拉.....	21
7. e 不是二次代数数.....	24
8. e 是超越数.....	29
三. e 的数学应用.....	30
1. e 极限的探求.....	30
2. 自然对数函数.....	37
3. 欧拉公式 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$	43
4. 三角函数与数 e	43
5. 双曲函数与数 e	56
6. 反三角函数、反双曲函数与数 e	62
7. 数 e 与曲线的轨迹方程.....	66
8. 极限点与数学竞赛.....	73
9. e 的几何意义.....	81
10. 引题的答案.....	88

四. e 与自然科学.....	90
1. 气压公式.....	90
2. 地球的年龄有多大.....	92
3. 细菌增殖与函数变化率.....	96
4. 银行储蓄与原子核衰变.....	97
5. 欧拉的皮带理论.....	102
6. 多级火箭与数 e	106
7. 预测人口增长数.....	111
8. 落体速度与数 e	115
9. 热体冷却的温度计算.....	119
10. 第一张对数表的编写.....	123
后记.....	131

一、引 题

说 e 之前, 让我们先来研究一个古老而有趣的数学问题:

“把正数 p 二份分, 三份分, 四份分, $\cdots \cdots n$ 份分, 求其所分得各数的积的最大值” (简称为最大积) 。

对于两份分, 是容易解决的。

用函数解: 设数 p 的两份分的积为 y , 其中一份为 x , 则

$$y = x(p-x) = -x^2 + px, \quad (1)$$

于是 $x = \frac{p}{2}$ 时, 得最大积为 $\frac{p^2}{4}$ 。

用方程解: 把(1)式变为方程 $x^2 - px + y = 0$, 由

$\Delta = p^2 - 4y \geq 0$, 故 $y \leq \frac{p^2}{4}$ 。所以, 其最大积是 $\frac{p^2}{4}$ 。

也可用不等式 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ ($a > 0, b > 0$) 来解, 得

$$y = ab \leq \left(\frac{a+b}{2} \right)^2 = \frac{p^2}{4}。$$

综上所述, 可知二等分时, 乘积最大。

对于正数 p 的三份积, 四份积, 便需要用到一个更广泛的不等式——柯西 (Cauchy) 不等式

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 a_3 \cdots a_n} \leq \frac{1}{n} (a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n)。$$

这里要求 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 全是正数。当且仅当 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$

时，不等式取等号。

这个不等式在许多代数书里都能找到，因此略去它的证明。

由此便得到：“诸数和不变，要使其积为最大，必须各数相等。”因而其最大积，便依次是

$$\left(\frac{p}{2}\right)^2, \left(\frac{p}{3}\right)^3, \left(\frac{p}{4}\right)^4, \dots, \left(\frac{p}{n}\right)^n.$$

这真是一个特殊的数列，它各项的值具有一个有趣的特征，两头小，中间大，由此便发生了一个更深入的问题。

“对于数 p (当 $p \geq 6$ 时)，分为多少份时，其积最大？”

这个问题，曾见于苏联科普作家别莱利曼的名著《趣味代数学》。他指出这问题和一个取值为 $2.7182\dots$ 的无理数有关，并提出结论：“当数 p 被分成的份数，和 $\frac{p}{2.7182\dots}$ 最接近时，乘积最大。

例如，对于数 10，要求得 n ，使 $\left(\frac{10}{n}\right)^n$ 最大，便需求商：

$\frac{10}{2.718} \approx 3.678$ 。因为把一个数分成 3.678 个相等的部分是不通的。所以不得不把商数，（即等分的份数）取最接近的整数 4。

这就是说，可以由数 10 的相等部分相乘，得出来的最大数是

$$\left(\frac{10}{4}\right)^4 = 39.0625.$$

事实上，如果把 10 另外分成 3 个或 5 个相等的部分，我们只能得出较小的乘积

$$\left(\frac{10}{3}\right)^3 \approx 37 \quad \text{和} \quad \left(\frac{10}{5}\right)^5 = 32.$$

要得到数 20 的各部分的最大乘积,那就必须分成 7 个相等的部分。因为, $20 \div 2.7182 \cdots \approx 7.36 \approx 7$ 。

数 50 要分成 18 个相等的部分,而数 100 则要分成 37 个相等的部分。因为, $50 \div 2.718 \cdots \approx 18.4$; $100 \div 2.718 \cdots \approx 36.8$ 。

$2.7182 \cdots$ 是一个重要而有趣味的数字,在数学和自然科学中,它有着很多的应用,这便是我向读者推荐这个数字的目的了。

二、2.7182...的诞生

提到2.7182..., 向读者介绍它能解决哪些实际问题, 无疑十分重要, 然而先讲一讲人们在确认这个数字时的思维过程, 也有同样的价值。

1. 一个重要的极限

近世数学分析, 运用着一种特殊的方法, 就是极限法。

数学极限法的问世是对于那些不能用算术、代数以及初等几何的简单方法来求解的问题进行了许多年代顽强探索的结果。下面我们使用这种方法, 来考察一个著名数列的变化情形。这数列就是: $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ 。

数列的最初几项的近似值是: 2, 2.25, 2.37, 2.44, ...能够看得出它是增大的。为了证明这个数列, 当 n 无限增大时有极限, 我们不加证明地采用下述“单调有界原理”。

“单调不减并且有上界的无穷数列, 必有极限。”

根据二项式定理

$$\begin{aligned}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= 1 + \frac{n}{1}\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{n(n-1)}{2!}\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \cdots \\ &\quad + \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}\left(\frac{1}{n}\right)^k + \cdots \\ &\quad + \frac{n(n-1)(n-2)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1}{n!}\left(\frac{1}{n}\right)^n.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{所以 } x_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \\
 &\quad + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \cdots \\
 &\quad + \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) + \cdots \\
 &\quad + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right).
 \end{aligned}$$

显然 $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n > 2$. 下面我们要指出, 数列 x_n

$= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ 是严格递增, 并且有上界的.

$$\begin{aligned}
 \text{因为, } x_{n+1} &= \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \\
 &= 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) + \cdots \\
 &\quad + \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n+1}\right) + \cdots \\
 &\quad + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \cdots \left(1 - \frac{n-1}{n+1}\right) + \frac{1}{(n+1)^{n+1}}.
 \end{aligned}$$

把 x_{n+1} 和 x_n 的展开式相比较, 可以看出, $\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$ 的表示式中的项数, 比 $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ 的表示式多了一项. 前者是 $n+2$ 项, 后者是 $n+1$ 项, 并且 $\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$ 的表示式中的每一项, 均不小于 $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ 表示式中的对应项. 而在 $\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$ 的表示式中, 还多了最后的一个正项

$$\frac{1}{(n+1)^{n+1}}.$$

故得 $x_{n+1} > x_n$, 即数列是递增的.

$$\begin{aligned} \text{此外, } \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &< 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} \\ &< 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} \\ &= 1 + \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} < 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 3. \end{aligned}$$

因此, 数列 $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, 递增而有上界, 所以是有极限的. 此极限通常用记号 e 表示, 即

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

e 也可以用级数表示为

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots.$$

2. 我国数学界的贡献

数列 $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ 的极限, 是一个很重要的极限. 对于这个极限存在的判定, 出现了一些不同的证法. 我国数学界对此亦有贡献. 下面介绍三个证明数列 $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ 递增且有上界的不同方法. 第一个方法由山东淄博师专王勤国同志提出. 后两个方法, 分别属于复旦大学计惠康和安徽师大许依群. 这三个方法的共同特点, 都是使用不等式来证明的.

I. 首先引入基本不等式

对于任意正实数 $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ 有:

$$\left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{\beta_1 + \beta_2}\right)^{\alpha_1 + \alpha_2} \leq \left(\frac{\alpha_1}{\beta_1}\right)^{\alpha_1} \left(\frac{\alpha_2}{\beta_2}\right)^{\alpha_2}, \quad (1).$$

当且仅当 $\frac{\alpha_1}{\beta_1} = \frac{\alpha_2}{\beta_2}$ 时, 等号成立.

以下用分析方法证明, 引入函数

$$f(t) = \frac{(1+t)^{\alpha_1 + \alpha_2}}{t^{\alpha_2}} \quad (\text{其中 } \alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0, t \in (0, \infty)). \text{ 则}$$

$$f'(t) = \frac{t^{\alpha_2}(\alpha_1 + \alpha_2)(1+t)^{\alpha_1 + \alpha_2 - 1} - (1+t)^{\alpha_1 + \alpha_2}(\alpha_2 t^{\alpha_2 - 1})}{(t^{\alpha_2})^2}$$

$$= \frac{(\alpha_1 + \alpha_2)(1+t)^{\alpha_1 + \alpha_2 - 1} - \alpha_2 t^{-1}(1+t)^{\alpha_1 + \alpha_2}}{t^{\alpha_2}}$$

$$= \frac{\alpha_1(1+t)^{\alpha_1 + \alpha_2 - 1} + \alpha_2(1+t)^{\alpha_1 + \alpha_2}[(1+t)^{-1} - t^{-1}]}{t^{\alpha_2}}$$

$$= \frac{\alpha_1(1+t)^{\alpha_1 + \alpha_2 - 1} + \alpha_2(1+t)^{\alpha_1 + \alpha_2} \left[-\frac{1}{t(1+t)} \right]}{t^{\alpha_2}}$$

$$= \frac{\alpha_1(1+t)^{\alpha_1 + \alpha_2 - 1}}{t^{\alpha_2 + 1}} \left(t - \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right).$$

因 $t \in (0, \infty)$, 所以 $\frac{\alpha_1(1+t)^{\alpha_1 + \alpha_2 - 1}}{t^{\alpha_2 + 1}} > 0$, 故知 $t = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}$ 时,

$f'(t) = 0$. 由于 $t < \frac{\alpha_2}{\alpha_1}$ 时, $f'(t) < 0$; $t > \frac{\alpha_2}{\alpha_1}$ 时, $f'(t) > 0$. 故

知 $t = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}$ 时, 函数 $f(t)$ 获得极小值, 因此对任意的 $t > 0$, 恒

有

$$f\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right) \leq f(t).$$

令 $t = \frac{\beta_2}{\beta_1}$ ($\beta_1 > 0, \beta_2 > 0$), 代入上式, 可得

$$\frac{\left(1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)^{\alpha_1 + \alpha_2}}{\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)^{\alpha_2}} \leq \frac{\left(1 + \frac{\beta_2}{\beta_1}\right)^{\alpha_1 + \alpha_2}}{\left(\frac{\beta_2}{\beta_1}\right)^{\alpha_2}},$$

$$\begin{aligned} \text{即 } \left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{\beta_1 + \beta_2}\right)^{\alpha_1 + \alpha_2} &\leq \left(\frac{\alpha_1}{\beta_1}\right)^{\alpha_1 + \alpha_2} \frac{\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)^{\alpha_2}}{\left(\frac{\beta_2}{\beta_1}\right)^{\alpha_2}} \\ &= \left(\frac{\alpha_1}{\beta_1}\right)^{\alpha_1 + \alpha_2} \cdot \left(\frac{\beta_1}{\alpha_1}\right)^{\alpha_2} \left(\frac{\alpha_2}{\beta_2}\right)^{\alpha_2} \\ &= \left(\frac{\alpha_1}{\beta_1}\right)^{\alpha_1} \left(\frac{\alpha_2}{\beta_2}\right)^{\alpha_2}. \end{aligned}$$

所以(1)式获证。

注意到 $t = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}$ 是 $f(t)$ 唯一的极小值, 所以不等式的等号, 当且仅当 $\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \frac{\beta_2}{\beta_1}$ 或 $\frac{\alpha_1}{\beta_1} = \frac{\alpha_2}{\beta_2}$ 时成立。

为了方便, 不等式(1)可表为等价的不等式

$$\left(\frac{\beta_1 + \beta_2}{\alpha_1 + \alpha_2}\right)^{\alpha_1 + \alpha_2} \geq \left(\frac{\beta_1}{\alpha_1}\right)^{\alpha_1} \left(\frac{\beta_2}{\alpha_2}\right)^{\alpha_2}. \quad (1)'$$

进一步利用数学归纳法不难将(1)或(1)'式推广到一般情况。事实上, 不等式(1)是在 $n=2$ 的情况下证得的。由 $n=k$ 时成立的归纳假设, 可得

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k + \alpha_{k+1}}{\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_k + \beta_{k+1}}\right)^{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k + \alpha_{k+1}} \\ &= \left[\frac{(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k) + \alpha_{k+1}}{(\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_k) + \beta_{k+1}}\right]^{(\alpha_1 + \cdots + \alpha_k) + \alpha_{k+1}} \\ &\leq \left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k}{\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_k}\right)^{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k} \cdot \left(\frac{\alpha_{k+1}}{\beta_{k+1}}\right)^{\alpha_{k+1}} \end{aligned}$$

$$\leq \left[\left(\frac{\alpha_1}{\beta_1} \right)^{\alpha_1} \left(\frac{\alpha_2}{\beta_2} \right)^{\alpha_2} \cdots \left(\frac{\alpha_k}{\beta_k} \right)^{\alpha_k} \right] \left(\frac{\alpha_{k+1}}{\beta_{k+1}} \right)^{\alpha_{k+1}}.$$

因此对于任意的正实数 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n; \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$,

$$\begin{aligned} \text{有} \quad & \left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n}{\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_n} \right)^{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n} \\ & \leq \left(\frac{\alpha_1}{\beta_1} \right)^{\alpha_1} \left(\frac{\alpha_2}{\beta_2} \right)^{\alpha_2} \cdots \left(\frac{\alpha_n}{\beta_n} \right)^{\alpha_n} \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \text{和} \quad & \left(\frac{\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_n}{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n} \right)^{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n} \\ & \geq \left(\frac{\beta_1}{\alpha_1} \right)^{\alpha_1} \left(\frac{\beta_2}{\alpha_2} \right)^{\alpha_2} \cdots \left(\frac{\beta_n}{\alpha_n} \right)^{\alpha_n}. \end{aligned} \quad (2)'$$

当且仅当 $\frac{\alpha_1}{\beta_1} = \frac{\alpha_2}{\beta_2} = \cdots = \frac{\alpha_n}{\beta_n}$ 时, 等号成立.

利用(1)'和(2)来完成 e 的存在性的证明是简洁的.

于(1)'中, 令 $\alpha_1 = n-1, \alpha_2 = 1; \beta_1 = n, \beta_2 = 1$, 并

注意到 $\frac{n-1}{n} \neq \frac{1}{1}$, 则有

$$\left[\frac{n+1}{(n-1)+1} \right]^{(n-1)+1} > \left(\frac{n}{n-1} \right)^{n-1}$$

或整理为

$$\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n > \left(1 + \frac{1}{n-1} \right)^{n-1}.$$

于是证得 $x_n = \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n$ 递增.

这个证明步骤的表述方法也并不是唯一的, 也可以由(2)'出发, 令 $\alpha_i = 1 (i = 1, 2, \dots, n), \beta_i = 1 + \frac{1}{n-1} (i = 1, 2, \dots, (n-1)), \beta_n = 1$. 从而获得这个结论.

于(2)中, 令 $\alpha_1 = 2, \alpha_2 = \alpha_3 = \cdots = \alpha_n = 1, \beta_1 = \beta_2 = \cdots$

$=\beta_n=1$, 并注意到 $2 \neq 1$, 则有

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} &= \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} = \underbrace{\left(\frac{2+1+1+\cdots+1}{1+1+1+\cdots+1}\right)}_{(\text{共 } n \text{ 项})}^{(\text{共 } n \text{ 项})}^{2+1+1+\cdots+1} \\ &\leq \left(\frac{2}{1}\right)^2 \left(\frac{1}{1}\right)^1 \cdots \left(\frac{1}{1}\right)^1 = 2^2 = 4. \end{aligned}$$

而 $1 + \frac{1}{n} > 1$, 所以 $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} < 4$. 于是证得 $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ 有界. 根据单调有界数列极限存在的定理, 便证得 $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ 的存在.

顺便提一下, 在不等式 (1) — (2)' 中, 赋予 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$ 和 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 以不同的内容, 便可得到人们所熟悉的一些著名不等式. 这样不仅能通过有限的范例, 表现出这个不等式的广泛应用, 而且所论课题, 如果允许使用 (1) — (2)' 的话, 便为我们提供了新的研究途径.

数列 $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ 递增且有上界的证明, 既然使用了不等式 (1) — (2)', 一般说它也可由 (1) ~ (2)' 的导出不等式来推证. 这便是下面方法出现的根源. 自然在实际问题的处理中, 如何根据要求, 巧妙地设计 α_i 和 β_i , 是需要一番构思的.

II. 引题中提到的柯西不等式, 在代数里是可以用数学归纳法作证的. 然而作为不等式 (2)' 特例, 其推证是简便的.

在 (2)' 中, 令 $\alpha_i = 1, \beta_i = a_i > 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$, 则得

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdots a_n}. \quad (3)$$

这便是人们常说的算术平均数不小于几何平均数. 这个不等

式，可以用来推证数列 $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ 递增而且有上界。

于(3)中，取 $a_1 = a_2 = \cdots = a_{n-1} = 1 + \frac{1}{n-1}$ ， $a_n = 1$ 。则

$$\sqrt[n]{\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1}} \leq \frac{1}{n} \left[(n-1) \left(1 + \frac{1}{n-1}\right) + 1 \right] \quad (n=2, 3, 4, \cdots),$$

即
$$\sqrt[n]{\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1}} \leq 1 + \frac{1}{n}.$$

$$\therefore \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad (n=2, 3, 4, \cdots).$$

由此可知数列递增。

再令 $a_1 = a_2 = \cdots = a_{n-1} = 1 - \frac{1}{n-1}$ ， $a_n = 1$ 。同样可以证

得数列 $Z_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$ 递增。

由 $\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{1}{n^2} < 1$ ，故 $1 + \frac{1}{n} < \frac{1}{1 - \frac{1}{n}}$ 。

所以 $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n} \quad (n=2, 3, 4, \cdots).$

由于数列 $Z_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$ 递增，所以数列 $\frac{1}{Z_n} = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n}$ 递减。

因此 $\frac{1}{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n} < \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2} = 4$ ，所以 $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 4 \quad (n=2, 3, 4, \cdots).$

这又证明了数列 $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ 有上界，证毕。

III. 贝努利 (Bernoulli) 不等式

$$(1+x)^n > 1+nx \quad (x > -1, x \neq 0, n > 1). \quad (4)$$

也可以作为不等式(1)'的特例, 其推证虽不及数学归纳法简便, 但却将不等式(4)推广到更一般的情况。

证明: 当 $-1 < x \leq -\frac{1}{n}$ 时, 不等式(4)左边是一个正数, 而右边是非正的, 不等式(4)显然成立。

当 $x > -\frac{1}{n}$ 时, 于(1)'中取 $\alpha_1 = n-1$, $\alpha_2 = 1$; $\beta_1 = 1 - \frac{1}{n}$, $\beta_2 = \frac{1}{n} + x$. 因所设 $n > 1$, 且 $x > -\frac{1}{n}$, 所以 α_1 , α_2 , β_1 , β_2 都是正数. 所以 $x \neq 0$, 故有 $\frac{n-1}{1-\frac{1}{n}} \neq \frac{1}{\frac{1}{n}+x}$.

据(1)'得

$$\left[\frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} + x\right)}{(n-1) + 1} \right]^{(n-1)+1} > \left(\frac{1 - \frac{1}{n}}{n-1} \right)^{n-1} \left(\frac{\frac{1}{n} + x}{1} \right)^n.$$

整理得 $\left(\frac{1+x}{n}\right)^n > \frac{1+nx}{n^{n-1} \cdot n}$, 即 $(1+x)^n > 1+nx$.

进一步, 如果把上面所论的自然数 n , 改为任何大于 1 的实数 α , 并不会影响证明的内容. 所以上面同时证得了

$$(1+x)^\alpha > 1+\alpha x \quad (x > -1, x \neq 0, \alpha > 1).$$

无需再借助于有理数列逼近的方法. 这就将不等式(4)推广到一般情况。

下面应用不等式(4), 证明数列 $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ 递增而且
有上界. 由于

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) \left(\frac{1 + \frac{1}{n+1}}{1 + \frac{1}{n}}\right)^n$$