理论力学习作课指导

LILUN LIXUE XIZUOKE ZHIDAO

胡 静 程达三

林君为 张迺春

北京师范大学出版社

理论力学习作课指导

胡　静　程达三

林君为　张乃奔

北京师范大学出版社

高等学校教学用书

理论力学习作课指导

胡 静 程达三

林君为 张迺春

北京师范大学出版社出版

新华书店北京发行所发行

河北省香河县印刷厂印刷

开本：787×1092 1/32 印张：12.25 字数：265千

1987年5月第1版 1988年5月第2次印刷

印数：6 501—10 000

ISBN 7-303-00111-5/O·34

定 价： 2.00 元

内容简介

本书是作者为了满足理论力学习作课的教学需要而编写的。全书包括质点力学、质点组动力学、刚体力学和分析力学等内容，共十四讲。每一讲包括基本要求、基本理论概述、解题要点、例题和练习题五个方面，书后附有练习题答案及部分题解。本书所选的问题及其典型例题立足于引导学生正确理解和运用基本概念和基本理论，解题过程注重分析思路及基本方法的训练。

本书可作为高等学校物理专业理论力学习作课教学用书，以及自学物理专业理论力学的指导书，亦可供有关教师在教学中参考选用。

前　　言

理论力学是大学物理专业的第一门理论物理课。它的特点是理论体系及思维方法都很严密，系统性强，解题比较灵活。学生在学习本课程中往往对基本概念、基本规律的理解不易深透，解题感到困难，甚至无从下手。这是学生学习过程的正常现象。学生必须通过解题，才能加深对知识的理解，培养自己提出问题、分析问题和解决问题的能力。因此，以诱导学生理论联系实际，提高学习能力为主要目的的习作课就成为理论力学教学过程的重要一环。为了使学生学得主动，提高习作课的教学效果，从一九八〇年以来，北京师范大学物理系根据多年的教学经验，编写了理论力学习作课教学参考资料，供历届学生使用；山西师范大学物理系也编写了类似的资料；齐齐哈尔师范学院物理系在习作课教学中积累了不少经验。我们在理论力学教改实践中体会到，给学生一本习作课的参考书，是有助于他们提高自学及解题能力的。同时，也有助于教师在收集学生学习的反馈信息的基础上把习作课讲活讲好，克服以往习作课教学"满堂灌"以及上成"讲题课"的弊病。本书就是以此为目的，在上述资料的基础上编写而成的。希望它能在改革理论力学习作课方式，提高教学质量，培养学生学习能力等方面起到抛砖引玉的作用。

本书包括质点力学、质点组动力学、刚体力学和分析力学等内容，共十四讲。每一讲按基本要求、基本理论概述、解题要点、例题和练习题五个方面编成。书后附有练习题答案及

部分题解。在基本理论概述中，针对其中的难点和学生在学习中容易混淆的概念，提出一些思考性问题，这些问题有的可在习作课中讨论，有的可留给学生自己思考。在例题的选择方面，注意了典型性、针对性、趣味性和多样性。例题中着重分析解题思路，针对学生的症结，有的放矢提出问题，揭露矛盾，并引导得出解决问题的正确方法，从而培养学生严密的逻辑思维能力。同时，对于数学结果，注意与物理图象相联系，培养学生具有清晰的物理思想。对于同一道例题，注意用多种方法求解，以期开阔学生思路，培养学生灵活运用理论的能力。考虑到减轻学生的学习负担，所选例题力求精当（学生还可以在教师指导下，或者根据自己的情况，选学其中部分例题）。全书编写力求各讲之间前后呼应。

本书可作为高等学校物理专业理论力学习作课教学用书，以及自学物理专业理论力学的指导书，也可供有关教师在教学中参考选用。

本书初稿曾在北京师范大学、山西师范大学、齐齐哈尔师范学院三校物理系的本科生及函授生中试用，得到较为满意的教学效果。编者在试用的基础上，对初稿进行了修改。

在本书编写过程中，得到以上三所院校物理系及所在教研室的大力支持。三院校的物理系学生对试用本提出了许多很好的意见和建议。修改稿承蒙卢圣治副教授审阅。我们在此对卢圣治先生及有关的同行们、学生们表示衷心的感谢。

由于编者水平有限，书中疏失或不当在所难免，敬请专家和读者不吝指正。

编者

一九八五年七月

目　　录

第一讲　质点运动学

质点运动学是研究相对所选定的参照系如何描述质点的运动。为了描述质点的运动，要求掌握质点的运动学方程（或称运动方程）、运动轨迹、速度和加速度等。质点运动学同时也是进一步学习质点动力学、刚体力学和分析力学所必须的理论准备。

一　基本要求

1．能够根据质点的已知运动和几何关系，熟练地写出质点的运动学方程。

2．会根据速度和加速度的定义推导出它们在几种坐标系（直角坐标系、平面极坐标系、柱坐标系和球坐标系），以及自然法中的表示形式。掌握矢量导数特别是单位矢量导数的运算。

3．熟练掌握质点运动学两类问题（①已知质点的运动学方程，求质点的速度和加速度；②已知质点的速度或加速度，求质点的运动学方程）的求解方法以及已知质点的运动方程或运动情况，求质点的轨迹和曲率半径。

二　基本理论概述

（一）质点的运动学方程

质点位置与时间的函数关系式，叫做质点的运动学方程。它描述了质点位置随时间的变化规律。如果知道了质点运动

学方程，借助数学工具，就可掌握质点的运动轨迹、质点在任意时刻的速度和加速度。因此，运动学方程给出了质点运动的全部信息。

运动学方程通常有以下三种表示方法。

1．矢量法

矢量法是通过质点的位矢与时间的函数关系式来确定质点在任一时刻的位置的。其表达式为

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t) \tag{1.1}$$

2．坐标法

坐标法是通过质点的位置坐标和时间的函数关系式来确定质点在任一时刻的位置的。常用的有笛卡儿坐标（直角坐标）、极坐标、柱坐标和球坐标。

笛卡儿坐标法：

$$\boldsymbol{r}=x\hat{\boldsymbol{i}}+y\hat{\boldsymbol{j}}+z\hat{\boldsymbol{k}}$$

运动学方程为

$$\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\\ z=z(t)\end{cases} \tag{1.2}$$

平面极坐标法：

$$\boldsymbol{r}=r\hat{\boldsymbol{r}}$$

运动学方程为

$$\begin{cases}r=r(t)\\ \theta=\theta(t)\end{cases} \tag{1.3}$$

柱坐标法：

$$\boldsymbol{r}=\rho\hat{\boldsymbol{\rho}}+z\hat{\boldsymbol{k}}$$

运动学方程为

$$\begin{cases}\rho=\rho(t)\\ \varphi=\varphi(t)\\ z=z(t)\end{cases}\tag{1.4}$$

球坐标法：

$$\boldsymbol{r}=r\hat{\boldsymbol{r}}$$

运动学方程为

$$\begin{cases}r=r(t)\\ \theta=\theta(t)\\ \varphi=\varphi(t)\end{cases}\tag{1.5}$$

3．自然法

已知质点的运动轨迹，可以用自然法描述质点的运动。通过质点轨迹上的弧坐标 s 与时间的函数关系来确定质点在任一时刻的位置和描述质点随时间的变化规律，该函数关系称为弧坐标方程。其表达式为

$$s=s(t)\tag{1.6}$$

在自然法中，轨道已知，弧坐标方程就是质点的运动学方程。

说明 弧坐标 s 是代数量，可正可负。s 的值是这样确定的：在质点的已知轨迹上任意选取一点 o，作为弧坐标 s 的原点，并规定弧坐标的正方向（图1-1），则 s 的大小等于原点到质点位置的弧长，s 的正负决定于质点在原点 o 的正的一侧还是负的一侧。

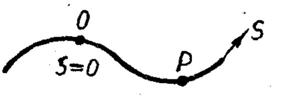

图 1-1

轨道上的箭头表示弧坐标的正方向。

＊＊＊

问题1.1 参照系和坐标系，二者是否相同？

问题1.2 用矢量法与用坐标法描述同一质点的同一运动是否等效？为什么？

问题1.3 柱坐标系中，位矢 $\boldsymbol{r}$ 能否表示为

$$\boldsymbol{r}=\rho\hat{\boldsymbol{\rho}}+\varphi\hat{\boldsymbol{\varphi}}+z\hat{\boldsymbol{k}} \quad * * *$$

（二）质点的轨迹方程

质点的位矢 $\boldsymbol{r}$ 随 t 而变化时，其端点所描绘的曲线，便是轨迹。运动学方程(1.2)—(1.5)，是轨迹的参数方程，若消去参数 t 即得到坐标与坐标之间的关系式，这就是质点的轨迹方程。

（三）质点的速度

1．矢量表示式（定义式）： $\boldsymbol{v}=\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}$ （1.7）

2．坐标表示式

笛卡儿坐标系表示式：

$$\boldsymbol{v}=\dot{x}\hat{\boldsymbol{i}}+\dot{y}\hat{\boldsymbol{j}}+\dot{z}\hat{\boldsymbol{k}} \tag{1.8}$$

或

$$\begin{cases} v_x=\dot{x} \\ v_y=\dot{y} \\ v_z=\dot{z} \end{cases} \tag{1.9}$$

$\boldsymbol{v}$ 的大小： $v=\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}$ （0.11）

$\boldsymbol{v}$ 的方向由其方向余弦确定：

$$\cos\alpha=\frac{v_x}{v};\quad \cos\beta=\frac{v_y}{v};\quad \cos\gamma=\frac{v_z}{v} \tag{1.11}$$

平面极坐标系表示式：

$$\boldsymbol{v}=\dot{r}\hat{\boldsymbol{r}}+r\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} \tag{1.12}$$

或

$$\begin{cases} v_r = \dot{r} & \text{径向速度）} \\ v_\theta = r\dot{\theta} & \text{（横向速度）} \end{cases} \tag{1.13}$$

柱坐标系表示式：

$$\boldsymbol{v} = \dot{\rho}\hat{\boldsymbol{\rho}} + \rho\dot{\varphi}\hat{\boldsymbol{\varphi}} + \dot{z}\hat{\boldsymbol{k}} \tag{1 14}$$

或

$$\begin{cases} v_\rho = \dot{\rho} \\ v_\varphi = \rho\dot{\varphi} \\ v_z = \dot{z} \end{cases} \tag{1.15}$$

球坐标系表示式：

$$\boldsymbol{v} = \dot{r}\hat{\boldsymbol{r}} + r\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} + r\dot{\varphi}\sin\theta\hat{\boldsymbol{\varphi}} \tag{1.16}$$

或

$$\begin{cases} v_r = \dot{r} \\ v_\theta = r\dot{\theta} \\ v_\varphi = r\dot{\varphi}\sin\theta \end{cases} \tag{1.17}$$

3. 自然法

$$\boldsymbol{v} = \dot{s}\hat{\boldsymbol{\tau}} = v_\tau\hat{\boldsymbol{\tau}} \tag{1.18}$$

说明

① $\hat{\boldsymbol{\tau}}$ 为切向单位矢量，规定指向 s 的增加方向（注意：不一定沿质点前进方向）；$\dot{s}$（即 v_τ）是速度在切向单位矢量方向的投影，是代数量。（本书中为避免混淆，用“v”表示速度的大小或速率，是算术量。某些力学书中，“v”有时表示速

率，有时代表“v_τ”，希望读者阅读时根据上下文的意思加以区别。）由（1.18）式可以看出，$\boldsymbol{v}$ 的方向决定于 $\dot{s}$ 的正负。若 $\dot{s}>0$，则$\boldsymbol{v}$与$\hat{\boldsymbol{\tau}}$的方向一致；若 $\dot{s}<0$，则$\boldsymbol{v}$与$\hat{\boldsymbol{\tau}}$的方向相反。这正好与“$\boldsymbol{v}$ 总是指向质点运动的方向”这一客观事实相符。

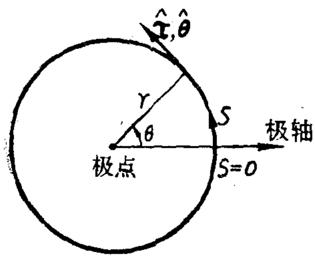

图 1-2

②圆运动中角量和线量的关系

质点作圆周运动时，它的速度在自然法中表示为$\boldsymbol{v}=\dot{s}\hat{\boldsymbol{\tau}}$，若以圆心为极点，在极坐标系中表示为$\boldsymbol{v}=r\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}}$，所以

$$\dot{s}\hat{\boldsymbol{\tau}}=r\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

由上式可知，若$\hat{\boldsymbol{\tau}}$与$\hat{\boldsymbol{\theta}}$的正方向相同(图1-2)，则有

$$\dot{s}=r\dot{\theta}$$

若$\hat{\boldsymbol{\tau}}$与$\hat{\boldsymbol{\theta}}$的正方向相反，则

$$\dot{s}=-r\dot{\theta}$$

上述两个关系式在研究圆运动时经常要用到。

例如，一单摆（见图 1-3），$\hat{\boldsymbol{\theta}}$的正方向以及弧坐标的正方向如图所示。已知摆锤$P$在弧坐标原点的左侧，且$\dot{s}>0$。问：①$P$点的运动方向？②$\dot{\theta}$大于零还是小于零？

这个问题可回答如下：①因$\dot{s}>0$，由式(1.18)$\boldsymbol{v}=\dot{s}\hat{\boldsymbol{\tau}}$则

P 点的运动方向与 $\hat{\tau}$ 方向相同，即向左摆动；②因 $\hat{\tau}$ 与 $\hat{\theta}$ 的正方向相反，则 $\dot{s}=-r\dot{\theta}$ 即 $\dot{\theta}<0$。

通常，为了运算简洁，将 $\hat{\theta}$ 和 $\hat{\tau}$ 选择在同一方向上，如图1-3(b)所示，s 的增大与 θ 的增大相一致，$\dot{s}=r\dot{\theta}$，$\dot{\theta}>0$。＊＊＊

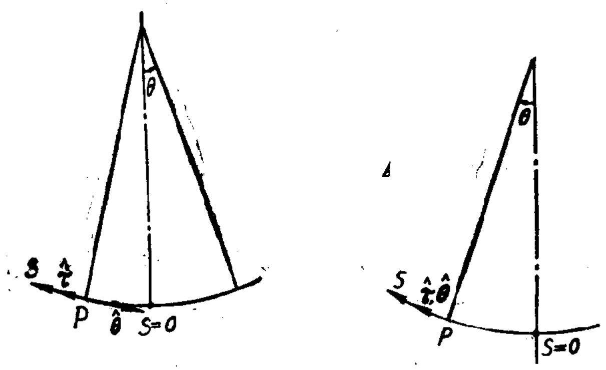

图 1-3(a)　　　　图 1-3(b)

（四）质点的加速度

1．矢量表示式（定义式）

$$\boldsymbol{a}=\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} \tag{1.19}$$

2．坐标表示式

笛卡儿坐标系表示式：

$$\boldsymbol{a}=\ddot{x}\hat{\boldsymbol{i}}+\ddot{y}\hat{\boldsymbol{j}}+\ddot{z}\hat{\boldsymbol{k}} \tag{1.20}$$

或

$$\begin{cases} a_x = \ddot{x} \\ a_y = \ddot{y} \\ a_z = \ddot{z} \end{cases} \tag{1.21}$$

$\boldsymbol{a}$的大小：

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \tag{1.22}$$

$\boldsymbol{a}$的方向由其方向余弦确定：

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{a}; \quad \cos\beta = \frac{a_y}{a}; \quad \cos\gamma = \frac{a_z}{a} \tag{1.23}$$

平面极坐标系表示式：

$$\boldsymbol{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\,\hat{\boldsymbol{r}} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\,\hat{\boldsymbol{\theta}} \tag{1.24}$$

或

$$\begin{cases} a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 & \text{（径向加速度）} \\ a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} & \text{（横向加速度）} \end{cases} \tag{1.25}$$

问题1.4 质点M沿垂直于极轴的直线x作匀速直线运动。若用极坐标描述M的运动，问下面几种答案中，哪一种是正确的？（图1-4）

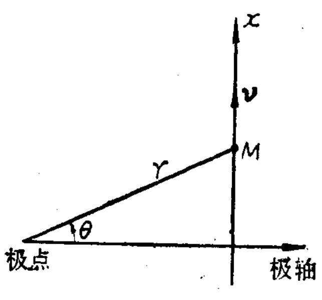

图 1-4

① $a_r \neq 0$； $a_\theta \neq 0$

② $a_r = 0$； $a_\theta = 0$

③ $a_r = 0$； $a_\theta \neq 0$

④ $a_r \neq 0$； $a_\theta = 0$

又 $\ddot{r}$，$\ddot{\theta}$是否为零？

* * *

柱坐标系表示式：

$$\boldsymbol{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)\,\hat{\boldsymbol{\rho}} + (\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi})\,\hat{\boldsymbol{\varphi}} + \ddot{z}\,\hat{\boldsymbol{k}} \tag{1.26}$$

或

$$\begin{cases} a_\rho = \ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2 \\ a_\varphi = \rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi} \\ a_z = \ddot{z} \end{cases} \tag{1.27}$$

球坐标系表示式：

$$\boldsymbol{a} = a_r\hat{\boldsymbol{r}} + a_\theta\hat{\boldsymbol{\theta}} + a_\varphi\hat{\boldsymbol{\varphi}} \tag{1.28}$$

或

$$\begin{cases} a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\varphi}^2\sin^2\theta \\ a_\theta = \dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) - r\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta \\ a_\varphi = \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi}\sin^2\theta) \end{cases} \tag{1.29}$$

3. 自然法

$$\boldsymbol{a} = \ddot{s}\hat{\boldsymbol{\tau}} + \frac{\dot{s}^2}{\rho}\hat{\boldsymbol{n}} \tag{1.30}$$

或

$$\begin{cases} a_\tau = \dot{v}_\tau = \ddot{s} & \text{（切向加速度）} \\ a_n = \dfrac{v^2}{\rho} = \dfrac{\dot{s}^2}{\rho} & \text{（法向加速度）} \\ a_b = 0 \end{cases} \tag{1.31}$$

问题1.5 为什么$\boldsymbol{a}$的方向一定指向轨迹的凹侧？为什么加速度在副法线方向上的投影a_b恒为零？

问题1.6 在自然法中，$\hat{\boldsymbol{n}}$、$\hat{\boldsymbol{\tau}}$、$\hat{\boldsymbol{b}}$是互相正交的单位矢量，$\hat{\boldsymbol{b}} = \hat{\boldsymbol{\tau}} \times \hat{\boldsymbol{n}}$，问$\hat{\boldsymbol{\tau}}$、$\hat{\boldsymbol{n}}$、$\hat{\boldsymbol{b}}$构成真正的坐标系吗？

问题1.7 有一质点 M 在细管 OA 内，管在水平面上绕铅垂轴 OZ 旋转，M 一面随管 OA 转动，一面沿管子向外运动。问 M 的法向加速度是否指向转动中心 O 点？（图1-5）

* * *

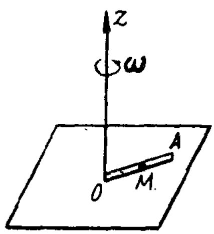

图 1-5

用矢量表示的运动学公式（速度、加速度），数学形式简单，不依赖于坐标系的选择，便于理论上的研究。用坐标表示的运动学公式，便于对质点的运动作定量计算。笛卡儿坐标系是最常用的坐标系。极坐标系常用于平面曲线运动，例如地球绕太阳运行等在有心力作用下的运动。自然法常用于已知轨迹的曲线运动。对这三种形式的运动学公式，要求会从定义式出发导出并且熟记。掌握对矢量导数的运算，特别是掌握对单位矢量的求导，是推导运动学公式的关键，也是理论力学所要求的基本技能，应该掌握好。

三 解题要点

解质点运动学问题就是已知描述质点的运动学量（运动学方程、轨迹、速度、加速度等）中的某些量，根据运动学量之间的关系，求得其余量。有两种最基本的类型：

一是已知质点的运动学方程（或给出质点的运动特征求运动学方程），求质点的速度和加速度，称为质点运动学正问题；

一是已知质点的速度或加速度以及必须的初始条件，求