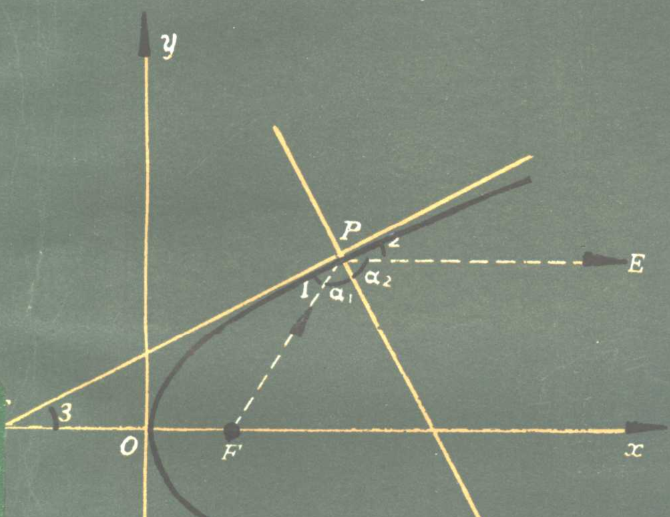
解析几何

北京师范学院
刘增贤　王汇淳　合编



中央广播电视大学出版社

解 析 几 何

北 京 师 范 学 院

刘增贤　王汇淳　主编

*

中央广播电视大学出版社出版

新华书店北京发行所发行

重 庆 新 华 印 刷 厂 印 装

*

开本787×1092　1/32　印张6.875　千字154

1984年5月第1版　1985年1月第1次印刷

印数 1—102,000

书号：7300·20　　　定价：0.88元

目　　录

有向直线和有向线段

在初等几何里，直线和线段一般是不规定方向的，但在实际生活中，常常要考虑直线和线段的方向，例如：当我们把一条笔直的道路当作直线的直观形象时，那么在一条南北方向的道路上，为了区别由南往北走和由北往南走，就应该有方向的规定．又如，物体的位移是既有大小又有方向的量．因此，在用线段表示位移时，不仅要指出线段的长度，还要指出线段的方向．

一、有向直线和有向线段的概念

（一）定义

一条规定了正方向的直线称为有向直线．直线的正方向用箭头所指的方向表示．这时，相反的方向就是负向．如图1所示．

规定了度量单位的有向直线叫做轴．如图2所示．规定

图 1

图 2

了起点和终点的线段，叫做有向线段．如图3所示．以A为起点B为终点的有向线段用$\overline{AB}$来表示，以B为起点A为终点的有向线段用$\overline{BA}$表示，$\overline{AB}$和$\overline{BA}$是方向不同的两条线段．

以后我们所研究的线段都是有向线段．

在选定了长度单位以后，我们可以量得有向线段的长度，这是一个非负实数，有向线段$\overline{AB}$的长度记作$|AB|$，因为

有向线段的长度与方向无关，故有

$$|AB| = |BA|$$

现在考虑轴上的有向线段，如图4所示．对于轴上的有向

图 3

图 4

线段$\overline{AB}$，它的方向的正负，就看$\overline{AB}$的方向与它所在的轴l的方向相同还是相反而定，如果$\overline{AB}$与l的方向一致则$\overline{AB}$有正向，反之，如果$\overline{AB}$与l的方向相反则$\overline{AB}$有负向．

轴上的有向线段$\overline{AB}$的长度$|AB|$加上表示它的方向的正负号，叫做这条有向线段的数量。有向线段$\overline{AB}$的数量用AB表示。如图5中有向线段$\overline{AB}$的数量$AB = 6$而$BA = -6$，故一般地，有

$$AB = -BA$$

当有向线段$\overline{AB}$的两个端点重合时，称为零线段，零线段的数量为0。

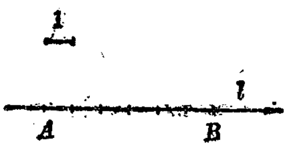


图 5

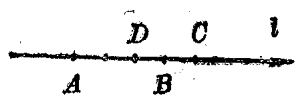


图 6

例如在图6上，设A和B间的距离等于3个单位，C和D间的距离等于2个单位，我们得到

$$AB = 3$$

$$BA = -3$$

$$CD = -2$$
$$DC = 2$$
$$|AB| = |BA| = 3$$
$$|CD| = |DC| = 2$$
$$AA = BB = CC = DD = 0$$

（二）有向线段的加法

设A、B、C为轴l上任意三点，则有向线段$\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{AC}$的数量间有如下关系

$$AB + BC = AC$$

现在证明这个关系式不论A、B、C三点在轴l上如何排列都是成立的。

首先看三个点在一直线上的不同排列有多少种？由图7可以看到不外乎图中的六种。

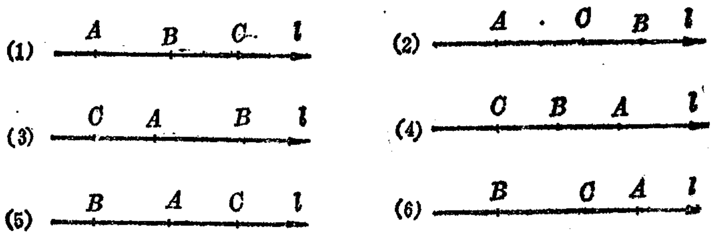


图 7

这六种情况可分为两类：

1. $\overline{AB}$与$\overline{BC}$同向．如图7(1)(4)．

2. $\overline{AB}$与$\overline{BC}$反向．如图7中其余四种．

下面只证明每类中的一种情况，其他情况可以类似地证明。

证明：在图7(1)中有

$$|AC| = |AB| + |BC|$$

而　$AC=|AC|$，$BC=|BC|$，$AB=|AB|$

故得　$AC=AB+BC$

在图 7 (2)中有

$$|AC|=|AB|-|BC|$$

而　$AC=|AC|\quad AB=|AB|$

但　$BC=-|BC|$

故得　$AC=AB+BC$

注意：1．当A、C两点重合时，公式化为

$$AB+BA=0$$

故有　$AB=-BA$

2．设A、B、C、D、E、F为轴上任意的点，则有

$$AB+BC+CD+DE+EF=AF$$

3．在轴上的有向线段的数量相加时第一线段的终点必须是第二线段的起点，第二线段的终点必须是第三线段的起点，这样一直排下去，相加后所得的和，是一个有向线段的数量，这个有向线段是以第一线段的起点为起点，最后一线段的终点为终点的有向线段的数量。

（三）用坐标表示有向线段的数量

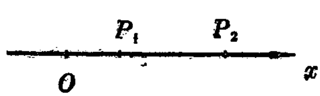


图　8

在代数中，我们已经建立了数轴上点的坐标，现在用坐标来表示有向线段的数量．

设P_1、P_2是Ox轴上任意两点，且它们的坐标为$P_1(x_1)$、$P_2(x_2)$

则　$P_1P_2=x_2-x_1$．

证明：根据加法公式有

$$OP_1+P_1P_2=OP_2$$

而　$OP_1=x_1$，$OP_2=x_2$

$\therefore \quad x_1 + P_1P_2 = x_2$

即 $\quad P_1P_2 = x_2 - x_1$

注意：1．在定义了轴上的有向线段的数量以后，对于轴OX上任一点P的坐标，实际上就是有向线段$\overline{OP}$的数量OP，设$OP = x$，则P点的坐标为(x)。

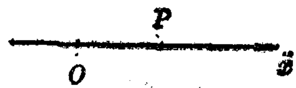


图 9

2．不论$P_1(x_1)$、$P_2(x_2)$两点在轴OX上的位置如何，总有$P_1P_2 = x_2 - x_1$。

3．由此可得出Ox轴上两点$P_1(x_1)$，$P_2(x_2)$间的距离公式

$$|P_1P_2| = |x_2 - x_1|$$

例1　一直线上有任意三点A、B、C，无论它们的位置如何，试证：$AB + BC + CA = 0$。

证明：$\because \quad AB + BC = AC$

而 $\quad AC = -CA$

$\therefore \quad AB + BC = -CA$

即 $\quad AB + BC + CA = 0$

例2　设P是A、B、C所在的直线上任意一点，求证不论它们的位置如何，总有

$$PA \cdot BC + PB \cdot CA + PC \cdot AB = 0.$$

证明：在这条直线上建立坐标系。

设A、B、C、P的坐标分别为(a)、(b)、(c)、(p)。

则 $PA = a - p$，$BC = c - b$，$PB = b - p$

$CA = a - c$，$PC = c - p$，$AB = b - a$

$$\therefore \quad PA \cdot BC + PB \cdot CA + PC \cdot AB$$
$$= (a-p)(c-b) + (b-p)(a-c) + (c-p)(b-a)$$
$$= ac - ab - pc + pb + ab - bc - pa + pc$$
$$+ bc - ac - pb + pa = 0$$

例3 设点P把有向线段$\overline{AB}$分成两段$\overline{AP}$、$\overline{PB}$．$AP:PB=m:n$．且A、B之坐标为(a)、(b)，

求：P点的坐标．

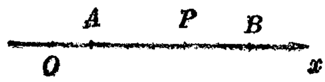


图 10

解：设P点的坐标为(x)

则 $AP=x-a$

$BP=b-x$

$\therefore \quad (x-a):(b-x)=m:n$

$n(x-a)=m(b-x)$

$\therefore \quad x=\dfrac{na+mb}{m+n}$．

注意：1．$\overline{AB}$、$\overline{AP}$、$\overline{PB}$都是有向线段，而AP、PB是有向线段的数量，$AP:PB=m:n$是这两条有向线段的数量AP、PB之比为$m:n$．我们称P点为有向线段$\overline{AB}$的定比分点．

2．当$m=n$时，P为$\overline{AB}$的中点，这时，P点的坐标$x=\dfrac{a+b}{2}$，所以一有向线段的中点的坐标是其两端坐标的算术平均值．

例4 已知二点$A(5)$、$B(3)$在A、B所在的直线上求一点C的坐标，使$AC=3AB$．

图 11

解：设C点之坐标为(c)

则 $AC=c-5$

$AB=3-5=-2$

$\therefore \quad c-5=3(-2)$

$$c = -1$$

$\therefore$ 所求C点之坐标为(-1)。

例5 已知二点$A(3)$、$B(7)$，A、B所在直线上的一点P分$\overline{AB}$为：$AP:PB=2:3$。求P点的坐标。

解：设P点之坐标为(x)。

根据例3 $$x=\frac{na+mb}{m+n}$$

令 $a=3$，$b=7$

$m=2$，$n=3$

$$\therefore \quad x=\frac{3(3)+2(7)}{2+3}=4\frac{3}{5}$$

故所求P点之坐标为$\left(4\frac{3}{5}\right)$。

习题

1. 如图12，试求

(1) AB、BC、CD、DA各等于多少？

(2) $AB+BC+CD=$？

(3) $AB+BC+CD+DA=$？

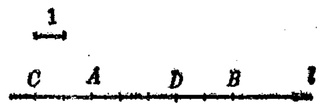


图 12

2. 如图13，试求

(1) $x_1=$？ $x_2=$？

(2) $P_1P_2=$？

$P_2P_1=$？

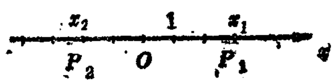


图 13

3. 如图14，X轴上每一格等于一个单位长度，写出有向线段$\overline{AB}$，$\overline{BC}$，$\overline{CD}$，$\overline{DE}$，$\overline{EA}$的数量和长度。

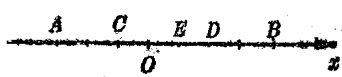


图 14

4. 设A、B两点之坐标为$A(2)$，$B(7)$，已知此直线上一点P满足$AP:PB=-2:3$，求P点的坐标。

二、线段的定比分点

在平面上已知两点P_1、P_2，在直线P_1P_2上有一点P，使$\frac{P_1P}{PP_2}=\frac{m}{n}$，设$\frac{m}{n}=\lambda$，则$P$点称为分线段$\overline{P_1P_2}$为定比$\lambda$的定比分点。

如果P点在P_1、P_2之间，P点叫做$\overline{P_1P_2}$的内分点，这时由于$\overline{P_1P}$和$\overline{PP_2}$方向相同，所以P_1P和PP_2之符号相同，故这时$\lambda>0$。

如果P点在P_1，P_2之外，P点叫做$\overline{P_1P_2}$的外分点，这时由于$\overline{P_1P}$和$\overline{PP_2}$方向相反，所以P_1P和PP_2之符号相反，故这时$\lambda<0$。

如果P点和P_1点重合，$P_1P=0$，故这时$\lambda=0$。

如果P点和P_2点重合，$PP_2=0$，故这时λ不存在。

如果P点是$\overline{P_1P_2}$的中点，$P_1P=PP_2$，故这时$\lambda=1$。

在平面上建立直角坐标系，设P_1，P_2之坐标为$P_1(x_1, y_1)$、$P_2(x_2, y_2)$，P为$\overline{P_1P_2}$所在直线上任一点，$\frac{P_1P}{PP_2}=\lambda$，现在求$P$点的坐标。

设P点之坐标为(x, y)

从P_1、P_2、P分别向x轴引垂线，垂足为P_1'、P_2'、P'。

根据平面几何平行截割定理有

$$\frac{|P_1P|}{|PP_2|}=\frac{|P_1'P'|}{|P'P_2'|}$$

即

$$\left|\frac{P_1P}{PP_2}\right|=\left|\frac{P_1'P'}{P'P_2'}\right|$$

说这明$\frac{P_1P}{PP_2}$与$\frac{P_1'P'}{P'P_2'}$之绝对值相等，再看它们的符号，由图15可见，如果P在P_1和P_2之间，则P'亦在P_1'和P_2'之间；如果P在P_1和P_2之外，则P'亦在P_1'和P_2'之外，因此$\frac{P_1P}{PP_2}$与$\frac{P_1'P'}{P'P_2'}$之符号也相同。绝对值相等符号也相同。故有

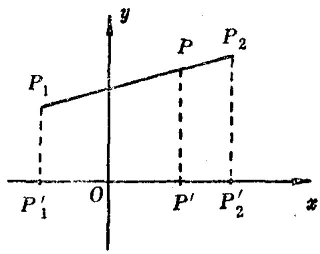


图 15

$$\frac{P_1P}{PP_2}=\frac{P_1'P'}{P'P_2'}=\lambda$$

因为P'、P_1'、P_2'均在x轴上，用坐标表示有向线段的数量，有

$$P_1'P'=x-x_1,\quad P'P_2'=x_2-x$$

所以
$$\frac{x-x_1}{x_2-x}=\lambda$$

解出x，得
$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}$$

如果从P_1、P_2、P向y轴上分别引垂线，完全用类似的方法，便可求出

$$y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}$$

这就是在平面上求有向线段$\overline{P_1P_2}$的定比分点P的坐标的公式，使用这个公式时，要注意(x_1, y_1)是有向线段$\overline{P_1P_2}$之起点的坐标，(x_2, y_2)是终点的坐标，λ是P_1P与PP_2之比值。

当P为$\overline{P_1P_2}$之中点时，$\lambda=1$，所以$\overline{P_1P_2}$之中点的坐标为

$$\begin{cases} x = \dfrac{x_1 + x_2}{2} \\ y = \dfrac{y_1 + y_2}{2} \end{cases}$$

例 1　已知$P_1(-1,\ 2)$和$P_2(6,\ -3)$两个点，P点分线段$\overline{P_1P_2}$成两段，$\dfrac{P_1P}{PP_2}=\dfrac{1}{3}$，求$P$点的坐标。

解：$$x=\frac{-1+\frac{1}{3}\times 6}{1+\frac{1}{3}}=\frac{3}{4}$$

$$y=\frac{2+\frac{1}{3}\times(-3)}{1+\frac{1}{3}}=\frac{3}{4}$$

∴　P点的坐标为$\left(\dfrac{3}{4},\ \dfrac{3}{4}\right)$。

例 2　已知$P_1(0,\ -5)$和$P_2(3,\ 0)$，延长$\overline{P_1P_2}$到P，使$|P_2P|=\dfrac{1}{2}|P_1P_2|$，求$P$点的坐标。

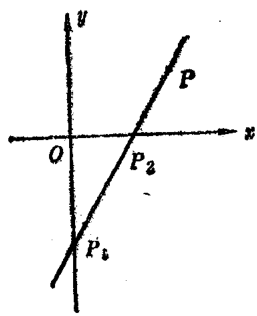


图　16

解：设P点的坐标为$(x,\ y)$

∵　$|P_2P|=\dfrac{1}{2}|P_1P_2|$

∴　$|P_1P|=|P_1P_2|+|P_2P|$
$=3|P_2P|$

又　$\overline{P_1P}$与$\overline{PP_2}$之方向相反

∴　$\dfrac{P_1P}{PP_2}=-3=\lambda$

$$\therefore \quad x=\frac{0-3\times 3}{1+(-3)}=\frac{9}{2}$$

$$y=\frac{-5-3\times 0}{1+(-3)}=\frac{5}{2}$$

所以P点之坐标为$\left(\frac{9}{2},\ \frac{5}{2}\right)$.

例3　已知三角形ABC之顶点坐标为$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$C(x_3,\ y_3)$，D为BC边的中点，在AD上求一点M，使$\frac{AM}{MD}=2$.

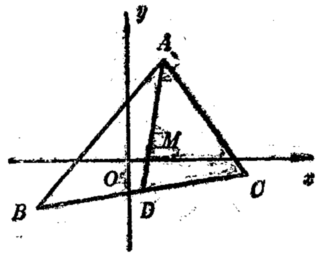


图　17

解：先求D点的坐标

$\because$　D是BC的中点

$\therefore$　D的坐标为

$$\left(\frac{x_2+x_3}{2},\ \frac{y_2+y_3}{2}\right)$$

设M点的坐标为$(x,\ y)$

则
$$x=\frac{x_1+2\times\frac{x_2+x_3}{2}}{1+2}=\frac{x_1+x_2+x_3}{3}$$

$$y=\frac{y_1+2\times\frac{y_2+y_3}{2}}{1+2}=\frac{y_1+y_2+y_3}{3}$$

所以M点之坐标为$\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\ \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$.

注意：在所得的结果里，x_1，x_2，x_3与y_1，y_2，y_3的顺序变更后，形式仍保持不变. 因此，由顶点A所引BC边的中线AD的定比(2:1)分割点，与由B或C所引AC边或AB边的中

线上的定比(2:1)分割点的坐标是一致的.这说明了三角形的三条中线交于一点,交点之坐标为$\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$其中$(x_1, y_1)$,$(x_2, y_2)$,$(x_3, y_3)$为三个顶点的坐标.

例 4 连结$P_1(2, y)$和$P_2(x, 6)$两点的线段的中点是$P(3, 2)$,求x和y,并求$|P_1P_2|$.

解:∵ $P(3, 2)$是$P_1(2, y)$,$P_2(x, 6)$之中点

$$\therefore\quad 3=\frac{2+x}{2}$$

$$2=\frac{y+6}{2}$$

解之得 $x=4$,$y=-2$

$$|P_1P_2|=\sqrt{(4-2)^2+(6+2)^2}=2\sqrt{17}.$$

例 5 证明:平行四边形的对角线互相平分.

证明:取坐标系使平行四边形$ABCD$之顶点的坐标为:$A(0, 0)$,$B(a, 0)$,$C(a+b, c)$,$D(b, c)$,如图18.

则对角AC之中点M之坐标为:$\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c}{2}\right)$

对角线BD之中点M'之坐标为:$\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c}{2}\right)$

∴ M与M'重合.

∵ AC与BD之中点互相重合,

∴ 平行四边形之对角线互相平分.

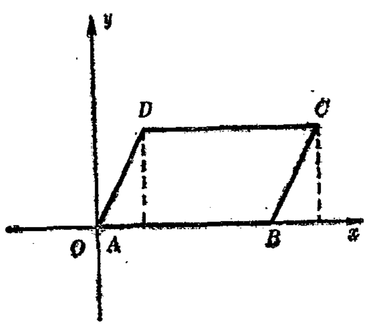


图 18

习　题

1. 已知三角形的顶点为$A(3,\ -7)$，$B(5,\ 2)$及$C(-1,\ 0)$，求它的各边的中点坐标.

2. 已知三角形的顶点的坐标为$A(3,\ -2)$，$B(5,\ 2)$和$C(-1,4)$，计算它的三条中线的长，并求出三角形ABC的重心的坐标.

3. 把点$A(3,\ 2)$和$B(15,\ 6)$间的线段分成五等分，求各分点的坐标.

4. 已知$P_1(-2,\ 4)$和$P_2(5,\ 3)$两点，P点在P_1P_2的延长线上，且$|P_1P|=2|P_2P|$，求P点的坐标.

三、三角形的面积

以任意三点$A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$，$C(x_3,\ y_3)$为顶点的三角形面积，可以用三顶点的坐标计算．现在求出用坐标求三角形面积的公式.

从A、B、C三点分别引横轴Ox的垂线，垂足顺次为L、M、N三点，如图19．设以$S_{\triangle ABC}$表示$\triangle ABC$的面积，那么，根据平面几何关于梯形面积的求法，我们得出

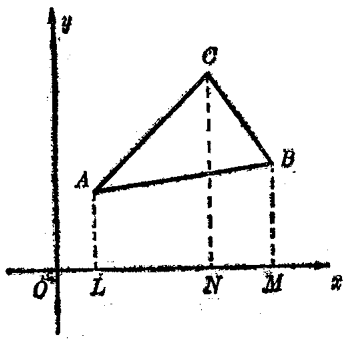


图　19

$S_{\triangle ABC}=$梯形$ALNC$的面积$+$梯形$CNMB$的面积$-$梯形$ALMB$的面积

而梯形面积$=\dfrac{1}{2}$(上底$+$下底)$\times$高

$$\therefore\quad S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}(LA+NC)\times LN+\frac{1}{2}(NC+MB)\times NM-\frac{1}{2}(LA+MB)\times LM$$

但因　$LN=x_3-x_1$，$NM=x_2-x_3$，$LM=x_2-x_1$

$LA=y_1$，$MB=y_2$，$NC=y_3$

所以　$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\{(y_1+y_3)(x_3-x_1)+(y_3+y_2)(x_2-x_3)-(y_1+y_2)(x_2-x_1)\}$$

化简，得到

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\{(x_1y_2-x_2y_1)+(x_2y_3-x_3y_2)+(x_3y_1-x_1y_3)\}$$

如果用行列式表示，所求公式可写为

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

假使三角形的三顶点中有一点在原点，例如C点，这时C的坐标为(0，0)，$\triangle ABC$的面积公式就更简单了.

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}(x_1y_2-x_2y_1)=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$$

利用以上公式计算三角形面积的时候，很可能得到负值，这时我们只要取绝对值就行了. 但为什么利用这个公式计算面积时，有出现负值的可能呢？这是因为三角形顶点顺序的取法有两种——顺时针方向与反时针方向，一种顺序使得由公式计算出的结果是正值，根据另一种顺序计算就得到负值，例如图20内沿A—B—C的方向计算便可得出正值，而沿A—C—B的方向就得到负值. 一般的规律是：三顶点的顺序是逆时转向时

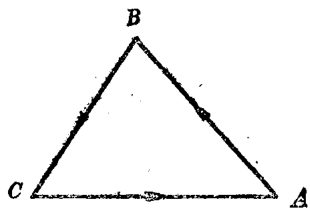


图　20