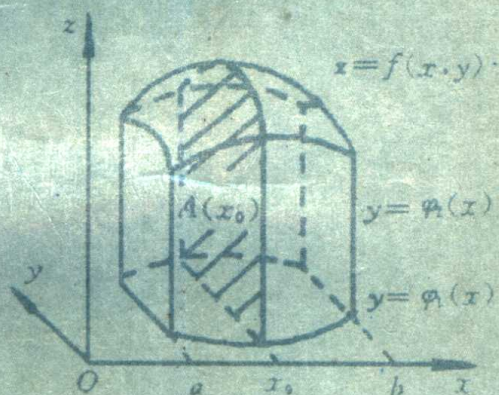
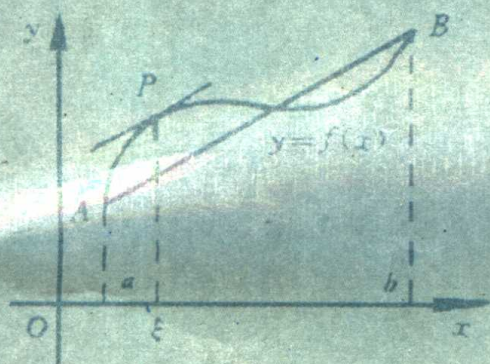


高等数学

实用简明教程

上册

吴良大 编



中央民族大学出版社

高等数学 实用简明教程

上册

吴良大 编



中央民族大学出版社

内 容 提 要

本书是根据“全国高校工科数学课委会”于1992年提出的《高等数学课程教学基本要求》编写的,具有创新、实用、简明等特点的普及型高等数学创新教材。

全书分上、下两册。上册内容为一元函数微积分与空间解析几何,下册内容为多元函数微积分与级数、常微分方程。本书为上册。

本书体系简明,结构严谨,说理清楚,便于自学。本书可作为高等工业院校和综合性大学、师范院校理科专业的高等数学教材。

序

国家教委高教司与“全国高校工科数学课程教学指导委员会”都十分重视高等数学教材的建设和改革工作,曾多次号召高校数学教师编写创新教材,以适应我国社会主义四个现代化建设的需要。本书就是作者长期担任高等数学教学、并多年如一日地进行创新教材研究的成果。

本书使用了现代微积分的概念、语言和符号,例如本书采用的函数关系符号 f ,函数四则运算符号 $f \pm g$ 、 $f \cdot g$ 、 f/g ,导函数符号 f' ,定积分符号 $\int_a^b f$,重积分符号 $\int_{\Omega} f$,等等。这些符号意义简明,书写方便,突出了有关概念的本质。

本书在介绍了极限概念之后,用直观图形引进函数在一点连续的概念,在研究极限理论的过程中多次使用连续的语言,为介绍极限理论带来方便,也使连续性概念本身得到了巩固,这样做可以克服理工科高等数学教学中对极限讲得很长、对连续讲得很快、连续性概念不够巩固的缺点。

本书很简明地讲述了一般变量的极限,并对一般变量极限的变化时刻给以数量化的描述,这段内容对极限概念进行了总结,并为下面讨论极限的共同性质作好了准备。

本书没有把不定积分单列一章,而把不定积分的计算方法与定积分的计算方法结合在一起进行讨论。这样处理,有关内容及方法互相充实,条理清楚,避免重复,减少了篇幅,因而也能相应减少教学时数。

本书在定积分、多重积分以及微分方程的应用中均采用在物理、力学、工程科学中经常使用的微元法,教学生灵活地掌握获得

整体量 A 的微元 $dA = f(x)dx$ 的通常实用的方法,甚至有的积分公式的导出也采用了微元法。这样处理,有助于学生掌握微积分的实质,并提高应用能力。

本书在讨论定积分的概念、计算的基础上,把二重积分、三重积分、第一型曲线及曲面积分统一成一般的多元函数黎曼积分的概念,并讨论它们的共同性质,介绍统一的物理应用公式。这样处理,突出了黎曼积分的本质。

本书用第一型曲线积分和第一型曲面积分定义第二型曲线积分和第二型曲面积分,把学生往往感觉困难的有向投影问题蕴含到向量的点乘中,这也与物理上实际应用的形式一致,学生掌握起来会比较容易。

本书在许多章节中采用了实用且简明的逻辑体系,而且相对于国内一般的高等数学教材,改进了微分学与积分学中一些定理的条件、结论或证明方法,这些创新和改进对于目前已相当成熟的高等数学教材而言是难能可贵的。

总的来说,本书是一套具有创新、提高、改进、实用、简明等诸多特点的质量很好的新作。鉴于这些特点,我们乐于作序。我们相信,通过广大读者的使用,本书定会在为工科和理科高等数学的教学发挥重要作用的同时,也不断得到自身的完善与提高。

程民德
邢富冲

于北京大学,中央民族大学

一九九六年五月十五日

编者的话

编者在 1979 年编写了一套供北京大学物理类各专业使用的《高等数学讲义》，该讲义修改了两次，自 1979 年至 1988 年在北京大学试用了 10 年。本书是编者以该讲义为基础，根据全国工科数学课委会在 1992 年提出的“高等数学课程教学基本要求”，按照现代微积分的基本观点和方法，总结编者几十年教学经验编写而成的普及型高等数学创新教材。

编者是按照高教出版社文小西教授提出的“创新·提高·继承”的模式以及实用与简明的特点来编写这套高等数学教材的。按照编者的理解，所谓创新，应在一定程度上反映现代微积分的面貌，给学生阅读现代数学打下初步基础；所谓提高，应是编写观点的提高，适当提高基础理论与习题中对逻辑推理的训练；所谓继承是指：立足于国内学生的实际水平和高校教学的现状，基本符合工科课委会提出的高等数学基本要求；所谓实用，应注意微积分理论、计算方法与数学、工程、物理上实际应用形式的一致性；所谓简明，宜尽量采用简捷的逻辑体系并使例题、习题更具典型性。编者为有些章节作了一些简化工作，从而较多地减少了教材的篇幅。由于以上特点，我们可以在少一些时间内完成教学任务，且能提高学生高等数学水平。

为便于教师与学生使用此教材，我们增加了一个附录，对高等数学的理论、方法与习题作进一步讨论。讨论是初步的，待以后不断完善。

本书能如此快出版，首先要感谢文小西教授的指导——文教授向编者阐述了他的模式。编者深深感谢出版社领导、我系领导与

同事们的关心与支持。罗小伟、陈祖荫、孙绳武、俞体九、郑更新、胡静珍等同志审阅了部分或全部书稿，北京工业大学高等数学教研室主任王中良同志与北京航空航天大学出版社郭维烈同志也审阅了全部书稿，他们提出了许多宝贵的意见与建议。编者特别感谢程民德院士与邢富冲教授，他们在百忙中为本书写了序言。编者向以上同志致以最诚挚的谢意。

由于编者水平有限，本书定有许多不妥之处，恳请读者批评指正。

编 者

1996 年 5 月于中央民族大学数学系

目 录

(上册)

第一章 函数、极限、连续	(1)
§ 1.1 函数	(1)
1.1 预备知识	(1)
1.2 函数的概念及其图形	(4)
1.3 函数值的计算,分段函数	(6)
1.4 函数的几种常见性态	(7)
1.5 反函数	(9)
1.6 函数的四则运算及复合运算	(11)
1.7 基本初等函数的性质与图形	(13)
1.8 初等函数与几个作图方法	(18)
1.9 双曲函数	(21)
1.10 本节小结	(23)
习题 1.1	(24)
§ 1.2 极限与连续的概念	(26)
2.1 数列的极限	(27)
2.2 函数在无穷远处的极限	(29)
2.3 函数在一点的极限	(31)
2.4 单侧极限	(33)
2.5 函数连续的概念	(34)
2.6 函数极限与数列极限的关系	(36)
习题 1.2	(37)
§ 1.3 极限与连续的基本性质	(38)
3.1 一般变量的极限	(38)
3.2 无穷小与无穷大	(39)

3.3	保序性定理及其推论	(41)
3.4	极限与连续的四则运算法则	(43)
3.5	复合函数的极限与连续	(45)
3.6	初等函数的连续性	(46)
3.7	函数的间断点及其分类	(47)
3.8	幂指函数的极限	(48)
	习题 1.3	(48)
§ 1.4	极限存在的准则与两个重要极限	(50)
4.1	夹逼定理	(50)
4.2	重要极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$	(51)
4.3	单调有界变量必有极限准则	(52)
4.4	重要极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$	(54)
4.5	无穷小、无穷大的比较	(56)
4.6	本节小结	(59)
	习题 1.4	(60)
§ 1.5	闭区间上连续函数的性质	(62)
5.1	介值定理	(62)
5.2	最值定理	(63)
5.3	反函数的连续性定理	(64)
	习题 1.5	(64)
第二章	导数与微分	(65)
§ 2.1	导数的概念	(65)
1.1	导数的定义	(65)
1.2	求导的例	(68)
1.3	单侧导数、无穷导数	(70)
1.4	可导与连续的关系	(71)
	习题 2.1	(72)
§ 2.2	求导的运算法则	(73)
2.1	求导的四则运算法则	(74)

2.2	复合函数的求导公式——链锁法则	(75)
2.3	反函数的求导公式	(78)
2.4	隐函数的求导法	(79)
2.5	参数式函数的求导法	(81)
2.6	导数的基本公式与求导的运算法则小结	(82)
2.7	相关变率问题	(83)
	习题 2.2	(84)
§ 2.3	高阶导数	(88)
3.1	高阶导数的概念	(88)
3.2	函数乘积的 n 阶导数公式	(90)
	习题 2.3	(92)
§ 2.4	微分	(93)
4.1	微分的定义	(93)
4.2	可微与可导的关系,微分的几何意义	(94)
4.3	微分的运算法则	(96)
4.4	微分在近似计算中的应用	(97)
4.5	本节小结	(100)
	习题 2.4	(101)
第三章	微分中值定理与导数的应用	(103)
§ 3.1	微分中值定理	(103)
1.1	费尔马定理——极值的必要条件	(103)
1.2	微分中值定理	(105)
	习题 3.1	(108)
§ 3.2	罗必塔法则	(110)
	习题 3.2	(115)
§ 3.3	泰勒公式	(117)
	习题 3.3	(121)
§ 3.4	利用导数作函数的图形	(122)
4.1	函数单调性判别法	(122)
4.2	函数极值判别法	(125)

4.3	曲线的凹凸性与拐点	(127)
4.4	函数的渐近线	(130)
4.5	利用导数作函数的图形	(133)
习题 3.4		(135)
§ 3.5	最值问题应用举例	(137)
习题 3.5		(140)
§ 3.6	曲率	(142)
6.1	曲率的概念及其计算公式	(142)
6.2	曲率半径与曲率圆	(145)
6.3 *	曲率中心的计算公式	(146)
习题 3.6		(146)
§ 3.7	方程近似根的求法	(147)
7.1	二分法	(147)
7.2	切线法	(149)
习题 3.7		(151)
第四章	定积分、不定积分及其计算	(152)
§ 4.1	定积分的概念与性质	(152)
1.1	曲边梯形面积的求法	(152)
1.2	定积分的定义	(154)
1.3	重要的可积性定理	(156)
1.4	定积分的性质	(156)
1.5	第一中值定理	(159)
习题 4.1		(160)
§ 4.2	不定积分的概念与性质	(161)
2.1	原函数与不定积分的概念	(161)
2.2	基本积分公式表	(163)
2.3	分项积分法	(164)
习题 4.2		(165)
§ 4.3	积分学基本定理	(165)
3.1	变上限积分	(166)
• 4 •		

3.2 牛顿—莱布尼兹公式	(167)
习题 4.3	(169)
§ 4.4 换元积分法与分部积分法	(171)
4.1 不定积分的第一换元积分法	(171)
4.2 不定积分的第二换元积分法	(176)
习题 4.4(a)	(179)
4.3 定积分的换元积分法	(180)
习题 4.4(b)	(185)
4.4 分部积分法	(186)
4.5 基本积分公式表二	(190)
4.6 积分表的查法	(191)
习题 4.4(c)	(192)
§ 4.5 几类函数的一般积分法	(193)
5.1 有理函数的积分法	(194)
5.2 三角有理式的积分	(197)
5.3 简单无理函数的积分	(198)
习题 4.5	(199)
§ 4.6* 定积分的近似算法	(199)
6.1 梯形法	(200)
6.2 中矩形法	(201)
6.3 辛普森法	(202)
习题 4.6	(206)
§ 4.7 广义积分	(206)
7.1 无穷积分	(207)
7.2 瑕积分	(209)
习题 4.7	(212)
第五章 定积分的应用与微分方程初步	(214)
§ 5.1 定积分在几何上的应用	(214)
1.1 定积分的微元法	(214)
1.2 平面图形的面积	(216)

1.3	依平行截面的面积求立体的体积	(218)
1.4	平面曲线的弧长	(221)
1.5	旋转面面积的求法	(227)
习题 5.1		(229)
§ 5.2	定积分在物理上的应用	(232)
2.1	变力下直线运动所作的功	(232)
2.2	引力的计算	(234)
2.3	交流电路的平均值问题	(235)
习题 5.2		(238)
§ 5.3	微分方程初步	(241)
3.1	常微分方程的概念	(241)
3.2	可分离变量方程的解法	(244)
3.3	一阶线性微分方程的解法	(246)
3.4	本节小结	(249)
习题 5.3		(249)
第六章	空间解析几何	(252)
§ 6.1	空间直角坐标系	(252)
1.1	空间直角坐标系	(252)
1.2	两点的距离	(255)
习题 6.1		(256)
§ 6.2	空间向量的概念及其线性运算	(256)
2.1	空间向量的概念	(257)
2.2	向量的加减法	(258)
2.3	向量的数乘	(259)
2.4	向量的坐标表示	(261)
2.5	向量的模与方向余弦的计算公式	(263)
习题 6.2		(265)
§ 6.3	向量的乘积	(266)
3.1	两向量的数量积	(266)
3.2	三阶行列式	(268)

3.3	两向量的向量积	(268)
3.4 *	三向量的混合积	(272)
3.5 *	三向量的向量积	(274)
习题 6.3		(275)
§ 6.4	平面及其方程	(276)
4.1	平面的点法式方程与一般方程	(276)
4.2	点到平面的距离	(279)
4.3	平面图形的画法	(280)
习题 6.4		(282)
§ 6.5	空间直线及其方程	(284)
5.1	空间直线的方程	(284)
5.2	两直线、两平面及直线与平面的夹角	(287)
5.3	平面束	(289)
习题 6.5		(290)
§ 6.6	曲面及其方程	(292)
6.1	曲面的一般方程与参数方程	(293)
6.2	柱面	(295)
6.3	旋转曲面	(297)
习题 6.6		(299)
§ 6.7	空间曲线及其方程	(300)
7.1	曲线的一般方程与参数方程	(300)
7.2	曲线在坐标面上的投影	(301)
7.3 *	曲线的一般方程与参数方程的互化	(302)
习题 6.7		(304)
§ 6.8	二次曲面的方程	(304)
8.1	椭球面	(305)
8.2	抛物面	(306)
8.3	双曲面	(307)
8.4 *	直纹面	(309)
习题 6.8		(309)

附录 高等数学的理论、方法与习题再讨论 (311)

§1 函数、极限、连续 (311)

1.1 理论与方法讨论 (311)

1 本书关于函数、极限、连续有什么特点? (311)

2 函数的现代定义是如何表述的? (311)

3 函数一节的重点是什么? (312)

4 若极限 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 存在且极限 $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ 不存在,问极限 $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)]$ 与 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x)$ 是否存在? (312)

5 如何用 $\epsilon-\delta$ 语言表述极限 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq B$? (312)

6 较一般的复合函数求极限的定理是什么? (313)

7 若角 x 用一周等于 360 度的度作单位,则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$ 等于多少?
..... (313)

8 符号“ o ”、“ $\sim$ ”、“ O ”的一般含义是什么? (313)

9 $o(u)$ 的运算性质是什么? (314)

10 符号“ o ”与“ O ”参加运算时,是否有交换律与传递律? (314)

1.2 习题选解、提示与补充举例 (315)

§2 一元函数微分学 (317)

2.1 理论与方法讨论 (317)

1 第二章导数与微分的要点是什么? (317)

2 本书中值定理与导数的应用一章有什么特点? (318)

3 函数 f 在点 a 可导,是否在 a 点的某邻域上连续? (318)

4 分段函数在分界点上单侧导数的求法 (319)

5 带皮亚诺余项的泰勒公式 (319)

6 用导数证明不等式的方法 (321)

2.2 习题选解、提示与补充举例 (322)

§3 一元函数积分学 (326)

3.1 理论与方法讨论 (326)

1 本书一元函数积分学有什么特点? (326)

2 牛顿-莱布尼兹公式的其他形式 (326)

3	原函数与不定积分在概念上要注意什么?	(328)
4	奇偶函数在对称区间上不定积分的性质	(328)
5	不定积分两种换元积分法的关系	(329)
6	分段函数原函数的求法	(329)
7	改进的第一积分中值公式	(330)
8	改进的第一积分中值公式的一个应用是否正确?	(331)
9	在闭区间上连续或逐段连续的函数,其定积分存在的简单证明	(332)
3.2	习题选解、提示与补充举例	(335)
§ 4	空间解析几何	(338)
	理论与方法讨论	(338)
1	向量的运算与运算中的注意点	(338)
2	两向量间垂直与平行的充要条件	(338)
3	向量的点乘有哪些用处?	(338)
4	两直线共面的充要条件	(339)
5	两直线的距离公式	(339)
答案		(340)

第一章 函数、极限、连续

高等数学是研究微积分及其应用的学科,它属于数学分析的范畴.而极限方法是研究微积分的基本方法.连续是极限方法的直接应用,连续函数也是我们研究的主要对象.

本章将对微积分的研究作分析基础上的准备.

§ 1.1 函数

函数的概念与基本初等函数的性质和图形在中学已经学过,这节只是中学内容的复习、总结与提高.

1.1 预备知识

1. 常用集合的符号

本书所说的数都是实数.全体实数的总体称为实数集,记作 R .我们知道,若把数轴上的点对应到其坐标的实数,则数轴上的点与实数集 R 建立了一一对应.为方便起见,以后实数与数轴上的点的称呼不加区别.例如,数 x 有时说点 x ,反之亦然.

本书所说的数集都是实数集 R 的子集.实数集 R 有下列重要子集:

自然数集、整数集、有理数集、正实数集,它们分别用符号 N 、 Z 、 Q 、 R^+ 表示.

没有元素的集合称为空集,记作 $\emptyset$.例如集合 $\{x|x^2+1=0, x \in R\}$ 就是空集.

2. 区间