



平面几何解题错误分析

杨裕前 杨浩清 编著



人民教育出版社

平面几何解题错误分析

杨裕前 杨浩清

人民教育出版社

平面几何解题错误分析

杨裕前 杨浩清 编著

*

人民教育出版社出版发行
新华书店总店科技发行所经销
人民教育出版社印刷厂印装

*

开本 $787 \times 1092 \frac{1}{32}$ 印张 9.875 字数 203,000

1989年12月第1版 1989年12月第1次印刷

印数 1—6,078

ISBN 7-107-10421-7
G·1541 定价 3.10 元

内 容 提 要

本书汇集了学生在学习平面几何时解题中容易出现错误,并详细地分析了产生错误的原因和提出了帮助学生改正错误或防止学生发生类似错误的教学建议.本书的选题是在广泛调查的基础上,总结了各地教师,特别是常州市教师的教学经验,并经过反复核查,材料的可信度高.由于选题是按现行课本的教学顺序安排的,所以系统性较强,且内容比较全面、丰富,使用方便.

本书可供中学数学教师、师范院校数学系学生学习、参考、本书亦可供初中学生学习平面几何时参考,它对学生在学习平面几何时,发现自己学习中存在的问题和改进学习方法,均有一定的帮助.

编写说明

为了准确地掌握初中学生在平面几何学习中的困难和问题,以改进教学方法,提高教学质量,一九八四年以来,我们在开展平面几何教学的专题研究中,组织常州市各中学部分教师对学生做几何题时发生的错误进行了广泛的调查。在此基础上,首先对搜集的几千份资料进行整理,按练习典型错误的性质分类;然后对少数学生进行个别调查谈话,请这些学生谈自己做题产生错误的原因;再据此作出尽可能符合学生实际的产生错误原因的分析,并提出改进教学的建议,最后由杨裕前、杨浩清执笔写成《平面几何学生解题错误分析》。

本书中的习题选自初级中学课本《几何》第一册及第二册(人民教育出版社数学室编)。为便于读者使用,书中列举了每题的典型“错误表现”,并给出了“正确解答”。最后作了“错因分析”和提出“教学建议”。

常州市平面几何教学研究小组为本书提供了大量的素材,人民教育出版社鲍琬等同志自始至终关心并指导本书的编写。在此一并表示深切的谢意。

本书在选例的典型性,分析的准确性,提供的解答的最优

性，以及教学建议的可行性和实效性等方面，尚会有不足之处，欢迎读者批评指正。

编 者

1986. 11. 16

目 录

第一章	基本概念	1
第二章	相交线、平行线	27
第三章	三角形	57
第四章	四边形	130
第五章	面积、勾股定理	161
第六章	相似形	173
第七章	圆	241

第一章 基本概念

1. 直线的画法

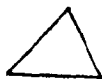
题1 已知图 1-1 中的三个点，它们不在同一条直线上，经过其中每两点都画一条直线。

错误表现 画成图 1-2 所示的三条线段。

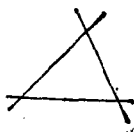
正确解答 如图 1-3 所示。



(图 1-1)



(图 1-2)



(图 1-3)

错因分析与教学建议 产生错误的主要原因是：(1)直线是一个抽象的概念，学生在实际生活中只能接触到直线的一部分——线段，在用直尺画直线时，也只是画出直线的一部分。要经过两点画直线时，学生不知道怎样画才能表示“直线是向两方无限延伸着的”这个属性；(2)学生习惯于“封闭”的图形，经过两点画直线就画成以这两点为端点的线段，经过不共线的三点中每两点都画一条直线就画成三条线段，组成一个三角形。

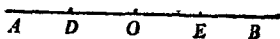
要防止学生上述画图的错误，建议：

(1) 在教学直线画法时, 要强调直线向两方无限延伸着的这一本质属性. 向学生明确指出, 在经过两点画直线时, 为表明直线是无限延伸着的, 应当在两个已知点分别向两方延伸出去一些, 不应在已知点停止不画.

(2) 在讲线段的画法时, 应当再强调一下以两个已知点为端点的线段画法与经过两个已知点的直线画法的区别, 以加深对直线画法的印象.

2. 射线的识别与表示

题 2 如图 1-4, 在直线 AB 上分别以 O, D, E 为端点的射线



线共有几条? 怎样表示它们?

(图 1-4)

错误表现 以 O 为端点的射线共有四条, 表示为射线 OE , 射线 OB , 射线 OD , 射线 OA ; 以 D, E 为端点的射线也各有四条(表示略).

正确解答 以 O 为端点的射线共有两条, 表示为射线 OA (或射线 OD)和射线 OB (或射线 OE); 以 D, E 为端点的射线也各有两条,(表示略).

错因分析与教学建议 产生错误的主要原因是: (1) 没有理解和掌握射线概念的本质属性, 受线段表示的干扰, 混淆了线段与射线的概念; (2) 把同一条射线的两种表示法误认为是两条不同的射线.

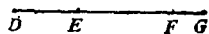
由于射线的概念是在直线概念的基础上定义的, 在教学射线的本质属性时, 要注意联系直线的本质属性. 对于直线的本质属性, 射线保留了一部分, 即向一方的无限延伸性, 改变了一部分, 即有一个端点. 射线是一条直的线. 因此, 在一

条直线上的一点只能把这条直线分成两部分,也就是说,在这条直线上,以这点为端点的射线只能有两条.

在射线表示法的教学中应当指出,表示射线时必须先写端点字母,再写表示在射线上的任意一点的字母来表示射线的方向.因为表示射线的第二个字母可以是射线上除端点以外的任意一个点的,所以射线的表示法并不是唯一的.尽管第二个字母所代表的点不同,但它们表示的是同一条射线.

3. 线段的识别与表示

题3 图1-5中共有几条



线段?用字母表示各条线段.

(图 1-5)

错误表现 共有四条线段,为 DE, EF, FG, DG ;也有认为只有三条线段的,为 DE, EF, FG .

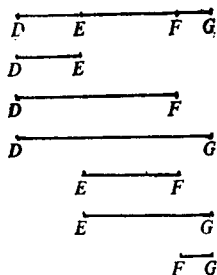
正确解答 共有六条线段,为 DE, EF, FG, DF, EG, DG .

错因分析与教学建议 产生错误的原因:(1)在日常生活中,人们总是认为两条较短的线段接起来就成为一条较长的线段.这种生活中形成的概念给学生正确地识别线段带来了消极的影响;(2)学生对于一条线段由两个端点唯一确定,两条线段只要有一个端点不相同,这两条线段就不相同不够清楚.(3)当一条线段上除了两个端点外还有其他的点时,对识别线段造成了干扰.由于学生在识图时排除干扰的能力较差,因此往往不能识别图1-5中的线段 DF 和 EG ;(4)即使有些同学识别线段时未受线段上其他的点的干扰,但由于图1-5中涉及的线段较多,如果没有掌握合理的数线段条数的方法,那么也容易遗漏或重复数线段条数.

为使学生能够正确地识别线段和不重不漏地数线段条

数,建议在教学中采用下面方法:

(1) 用“图形分解”的方法确定线段. 因为线段由它的两个端点唯一地确定,所以在区分两条线段时,我们从线段的端点出发来考虑问题. 本题图1-5中有 D, E, F, G 四个点,其中任意两点都能确定一条线段,为直观起见,把图1-5分解



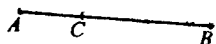
(图 1-6)

成如图1-6所示. 于是可以得到六条线段,为 DE, DF, DG, EF, EG, FG .

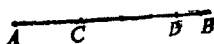
(2) 数线段条数的方法. 按从左到右的顺序,以最左边的点 D 为线段的左端点, E, F, G 依次为线段的右端点,得三条线段 DE, DF, DG ; 然后以点 E 为线段的左端点,在它右面的点 F, G 分别为线段的右端点,得两条线段 EF, EG ; 再以点 F 为线段的左端点,在它右面的点 G 为线段的右端点,得一条线段 FG , 这样就能不重不漏地得出六条线段来.

这样数线段条数的方法显然具有一般性,适用于线段上有更多的点的情形. 为启迪学生思维,结合本题可以由简到繁地进行如下练习:

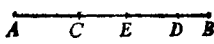
在线段 AB 上取一点 C (图1-7) 可得几条线段? 如果再取一个异于点 C 的点 D (图1-8), 共有几条线段? 继续再取一个异



(图 1-7)



(图 1-8)



(图 1-9)

于点 C, D 的点 E (图 1-9), 共有几条线段? 一般地, 在线段 AB 的内部取了 $n-2$ 个不同的点, 连同点 A, B 共有 n 个点, 这时共有多少条线段 ($\frac{n(n-1)}{2}$ 条)?

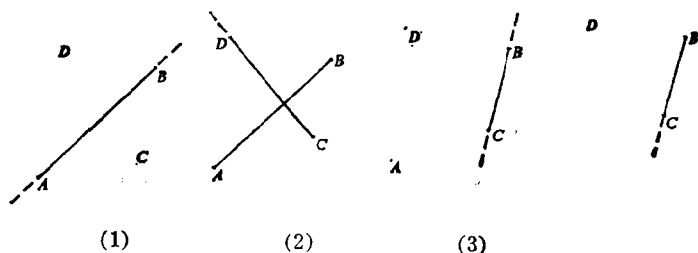
4. 线段的延长

题 4 如图 1-10, 已知四点 A, B, C, D , 读下列语句, 并画出图形.

(图 1-10)

- (1) “连结 AB ” (即画出以点 A 和点 B 为端点的线段), 并延长线段 AB ;
- (2) 连结 CD , 并延长线段 DC , 线段 AB, CD 交于点 O ;
- (3) 连结 BC , 并反向延长线段 BC .

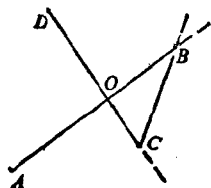
错误表现 画成图 1-11 所示的图形.



(图 1-11)

正确解答 如图 1-12.

错因分析与教学建议 在平面几何中, 一般并不讨论有向线段的问题, 认为线段 AB 与线段 BA 是同一条线段. 但是,



(图 1-12)

在延长或反向延长线段时，却要涉及线段的方向。学生不理解这一点就会产生错误。

为此，建议在线段延长线的教学中，应当结合实例适当地渗透一些“有向线段”的知识。例如，连结北京和广州的京广铁路，不论是从北京到广州，还是从广州到北京，它们的路程相同，走的是同一条铁路，但是由于起点和终点不同，它们的方向是不相同的。对于线段，如果把它的两个端点中的一个作为起点，另一个作为终点，那么线段就有了方向，是从起点到终点的方向。当一条有方向的线段表示为 AB 时，我们就认为 A 是起点， B 是终点；而 BA 表示有方向的线段时，则 B 是起点， A 为终点，它与线段 AB 的方向刚好相反。在延长线段时，应当把线段看成是有方向的。线段 AB 的延长线应当从端点 A 到端点 B 再延长出去，线段 BA 的延长线则是从端点 B 到端点 A 再延长出去，而线段 AB 的反向延长线则是与线段 AB 方向相反的线段 BA 的延长线，即从端点 B 到端点 A 再延长出去。

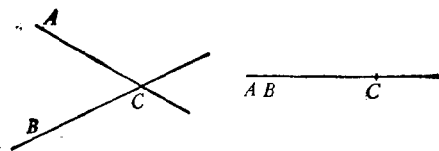
5. 有关直线的语句及画图

题 5 读下列语句，并画出它们的图形：

- (1) 直线 AB 经过点 C ；
- (2) 点 D 在直线 EF 上，但在直线 GH 外；
- (3) 直线 a, b 相交于点 C ，直线 b, c 相交于点 A ，直线 a, c 相交于点 B 。这时我们说“直线 a, b, c 两两相交”。

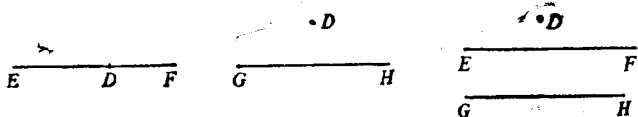
错误表现 分别画成图 1-13，图 1-14，图 1-15 所示的图形。

(1)



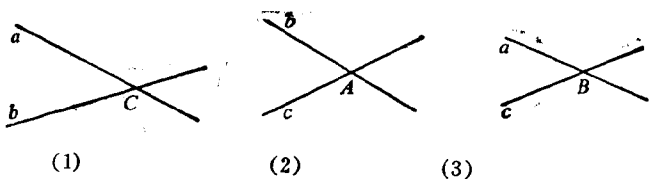
(图 1-13)

(2)



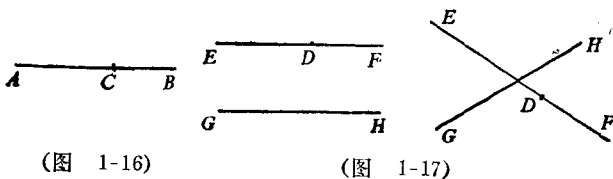
(图 1-14)

(3)



(图 1-15)

正确解答: 如图 1-16, 图 1-17, 图 1-18.



(图 1-18)

错因分析与教学建议 刚开始学习平面几何的初二学生,理解和运用一般语言尚不很熟练,语言的概括能力较差,因而,对于正确理解和掌握几何语言更感到困难.这是产生错误的原因之一.此外,由于没有掌握直线的表示法,把直线 AB 误解为“直线 A ”和“直线 B ”而产生图1-13所示的错误;由于不懂得“但”的意义,并把“点 D 在直线 EF 上”误解为点 D 在直线 EF 的上方,“把点 D 在直线 GH 外”误解为在 EF 、 GH 两条直线的“外面”,而产生图1-14所示的错误;由于不了解一句话中描述的应是同一个图形,以及不理解术语“两两相交”,因而产生图1-15所示的错误.

几何语言是正确理解概念,认识图形,进行合理的推理的基础.在平面几何教学的起始阶段要十分重视几何语言的教学.为此建议:

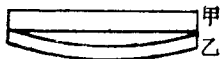
(1) 讲清每一个词语、术语的意义.例如,“但”,“且”,“有且只有”,“每两点”,“两两相交”等等.教学中可以采用形象化的比喻或学生熟悉的实例加以说明,便于使学生理解和掌握.

(2) 进行多种形式的语言训练.如①“听画”练习,即教师口述,学生画图的练习,以锻炼学生把语言“翻译”为图形的能力;②引导学生看书,多看多读,以熟悉几何语言的习惯用法和程式,逐步掌握有关数学术语及符号;③教师课堂用语的示范,教师在课堂教学中不要使用课本上尚未出现或课本上不采用的词语,以免引起学生不必要的困难.

6. 直线的判定

题6 将甲、乙两尺如图1-19那样拼在一起,如果甲尺

经校定为直的,那么乙尺可能是直的吗?为什么?



错误表现 不能正确地说明判断的理由或不知道如何说

(图 1-19)

明理由。如答:“因为甲尺是直的,所以乙尺不是直的。”或答:“如果乙尺是直的,那么甲、乙尺就平行”等。

正确解答 乙尺不是直的。理由常用下述两种说法:(1)因为甲、乙两尺如图 1-19 那样拼在一起,它们只有两个公共点,而经过两点只能有一条直线,现在甲尺是直的,因此乙尺就不能是直的了;(2)假定乙尺是直的,由于甲尺是直的,且甲尺与乙尺有两个公共点,所以甲尺与乙尺的边应当重合在一起(经过两点只能有一条直线),这与已知图形所示的乙尺与甲尺的边不重合相矛盾。因此假定乙尺是直的不是成立的,故乙尺不是直的。

错因分析与教学建议 学生不会说理或说理不清的主要原因是以前缺乏几何说理方面的训练,尚不具备基本的逻辑推理知识和说理论证的方法。在教学中不能有急躁情绪,急于求成。

本题的说理实际上需要用到反证法的思想方法,在教学中宜安排在课堂练习中解决。首先可以提问若干同学进行说理练习,通过教师的启发、引导以及示范,争取把理讲清。其次教师可以结合学生日常生活中熟悉的事例,较早地渗透反证法的思想方法。例如,把四只苹果放到三个抽屉里,怎样说明至少有一个抽屉里至少放了两个苹果?在直接说明结论成立有困难时,我们可以采用“结论不对是不可能的”方法说明。具

体方法是:假定结论不对,即每一个抽屉里最多只放了一个苹果,那么三个抽屉里最多只放了三个苹果,这与已知放了四个苹果相矛盾,这个矛盾说明“结论不对”是错误的,因此至少有一个抽屉里至少放了两个苹果. 为使学生有机会练习这种说理方法,并提高这种说理的兴趣,可以进行如下的模仿性练习:

(1) 说明任何400个人中至少有两个人在同一天过生日.

(2) 在某一个集镇上共设置了三只邮箱,现在有16封信要发出去,说明不论怎样投信,必有一只邮箱至少要投进6封信.

7. 直线与射线的概念

题7 判断下列说法是否正确?为什么?

(1) 延长直线 AB ; (2) 延长射线 OA ; (3) 延长线段 AB .

错误表现 有的同学认为这些说法都是正确的,因为直线、射线、线段都是可以延长的;有的同学认为延长直线 AB 是不正确的,因为直线不可以再延长了,延长射线 OA 也是不正确的,因为射线也不可以再延长了.

正确解答 (1) 延长直线 AB 是不正确的,因为直线是向两方无限延伸着的,不需要再延长; (2) 延长射线 OA 是不正确的,因为射线是向一个方向无限延伸着的,不需要再延长; (3) 延长线段 AB 是正确的,因为线段是直线上两点间的部分,可以沿着线段所在的直线延长线段.

错因分析与教学建议 解答本题的错误是由于没有切实掌握直线和射线的概念或混淆了“不可以延长”和“不需要延长”的区别造成的.