

内蒙古大学
教材丛书

离散数学

DISCRETE MATHEMATICS

段禅伦 刘铁英 编著
杜清晏 侯宏旭



内蒙古大学出版社

内蒙古大学教材丛书

离 散 数 学

本书的出版得到内蒙古大学出版基金资助

段禅伦 刘铁英 编著
杜清晏 侯宏



内蒙古大学出版社

离散数学

段祥伦 刘铁英 编著
杜清晏 侯宏旭

内蒙古大学出版社出版发行

(呼和浩特市大学西路1号)

内蒙古自治区新华书店经销

内蒙古军区印刷厂印刷

开本:850×1168/32 印张:12 字数:297千

1997年8月第1版 1997年8月第1次印刷

印数:1—2000册

ISBN 7-81015-692-6/O·61

定价:16.00元

前 言

离散数学成为计算机专业基础理论的核心课程是计算机科学飞速发展的必然结果。多年来,国内分别以分课型一把离散数学划分为几门课程或单课型一把分课型的几个课程揉合成一门课程的方式向本科二、三年级的学生开设。由于计算机科学与工程领域在很大程度上依赖离散数学提供数学理论,即使仅仅是以研究离散数量的结构和相互关系为目标,其内容的浩繁和材料的分散也足以使教师和学生往往感到沉重和困难。

编写计算机专业离散数学基础教程,以简明的方法既叙及它的主要组成内容,也介绍它的各个重要事实,以计算机专业教学使用为度,不去讨论那些艰深的高级课题,应当说这是教学改革的需要。作者以己力不从心的能力完成这一尝试,是多年教学中师生共同琢磨和尽可能地广收各家之长的结果,寄希望在推动我国计算机科学的基础教育中也作出点什么。

计算机专业基础教材《离散数学》适合做计算机专业本科生、专科生离散数学课程的教材或教学参考书,也适合作计算机工作者拓广理论基础而自学的读本。

全书共六章,侯宏旭同志撰写了第二章和部分练习题,刘铁英同志撰写了第四章和部分习题,杜清晏同志撰写了第六章和其它章节中的部分内容,段禅伦同志撰写了第一、三、五章。全书的统稿工作由段禅伦同志执笔完成。在编排上,供教学选用的例子以练习形式编于所在章节之末并附有参考答案;配套的习题另编于各章之后,以便于作业使用;以“*”标定的内容和相应习题,可以删去不讲和略去不用。这样做的目的旨在更加适应各个层次的不同需要。

由于作者水平有限,书中缺点在所难免,恳请读者不吝指正。

作者

1996年6月于呼和浩特

内容简介

离散数学是计算机专业的重要理论基础。本课程的学习,主要是培养学生抽象思维和严格的逻辑推理能力,为今后处理离散信息,从事计算机软件的开发和设计以及计算机的其它实际应用打好数学基础。

离散数学是计算机科学与工程专业的数学工具。本书的主要内容包括数理逻辑、抽象代数、格与布尔代数、图论等知识。对集合论的必要内容也做了相应介绍。

目 录

第一章 命题逻辑	(1)
1-1 命题及其表示	(1)
1-2 逻辑联词	(3)
1-3 命题形式与真值函数	(7)
1-4 真值表与等值公式	(13)
1-5 重言式与蕴涵式	(16)
1-6 初始逻辑联词	(22)
1-7 对偶和对偶定律	(28)
1-8 范式	(31)
1-9 命题演算推理理论	(48)
*1-10 命题演算的形式系统	(55)
习题一	(60)
 第二章 一阶谓词逻辑	(64)
2-1 谓词与个体	(65)
2-2 命题函数与量词	(70)
2-3 一阶谓词公式	(74)
2-4 变元的约束与自由	(77)
2-5 普遍有效式及等值式与蕴涵式	(81)
2-6 一阶谓词公式的两种范式	(90)
2-7 一阶谓词演算的推理理论	(96)
*2-8 一阶谓词逻辑的形式系统	(100)
*2-9 应用举例	(104)
习题二	(112)

第三章 集合、关系与映射	(116)
3-1 集合的基本概念	(118)
3-2 集合的运算	(123)
3-3 直乘积与二元关系	(132)
3-4 关系的性质、合成和逆	(137)
3-5 关系的闭包	(144)
3-6 等价关系与分划,相容关系与覆盖	(154)
3-7 映射	(164)
*3-8 置换	(173)
*3-9 模糊子集及隶属函数	(178)
3-10 无限集合	(183)
习题三	(189)

第四章 代数结构	(193)
4-1 运算、代数系统与特异元素	(193)
4-2 半群、独异点与群	(200)
4-3 陪集与 Lagrange 定理	(213)
4-4 同态与同构	(228)
4-5 环与域	(237)
*4-6 有限域	(243)
习题四	(246)

第五章 格与布尔代数	(249)
5-1 格的定义	(253)
5-2 格的性质	(270)
5-3 格同态与格同构	(273)
5-4 几种特殊的格	(282)
5-5 布尔代数	(297)
习题五	(310)

第六章 图论	(314)
6-1 无向图与有向图	(314)
6-2 通路和连通性	(323)
6-3 树和最优树算法	(329)
6-4 欧拉图和哈密尔顿图	(336)
6-5 平面图	(345)
6-6 图的矩阵表示	(353)
6-7 求最短路的狄克斯特拉算法	(362)
*6-8 超图	(368)
习题六	(373)
参考文献	(376)

第一章 命题逻辑

1-1 命题及其表示

命题逻辑和一阶谓词逻辑是数理逻辑的基础。数理逻辑是研究演绎方法的科学,它从形式结构方面来研究推理和证明,使用准确而形式化的语言处理问题。

自然语言丰富多彩,对于同一词语,往往有不同的含义和理解,或者说,自然语言不够精确、有歧义,会产生含糊、混淆。这正是逻辑演绎所不能允许的。逻辑演绎不能有丝毫的含糊不清,要求一词一语均一义。

为克服自然语言的歧义性,数理逻辑引入了为自身所用的对象语言。对象语言是一种特定的形式语言,在命题逻辑中,其基本成分是具有真、假之一值的陈述句,称作命题。

只有具有确定真值的陈述句才是命题。一切没有判断内容的句子,无所谓是非的句子都不能作为命题。在一定的环境中可以确定真值的陈述句,在必要的上下行文中可以确定真值的陈述句也是命题。

命题分原子命题、复合命题两种类型。前者是简单陈述句,后者至少是对原子命题的否定或是几个原子命题组成的复合命题。命题逻辑的特征在于,研究逻辑的形式结构时,只分析到原子命题为止。原子命题是命题的基本单位。

在命题逻辑中,我们规定用大写英文字母 P, Q, R 等以及 $P_1, P_2, \dots, Q_1, Q_2, \dots$ 等符号表示命题,但不使用 T 和 F 表示一般的命题。 T 和 F 专门用来表示永真和永假的命题及取真(T)及取假(F)的指定,其作用与逻辑真值 1 和 0 相同。

表示命题的符号称为命题符号。表示一个确定命题的命题符号称命题常量。表示任意命题的命题符号称命题变元。命题变元以 $\{0, 1\}$ 为变域。

命题变元表示任意命题，无确定真值，不是命题。只有给命题变元指定一个具体的命题，才能确定在所指定下它的真值是真还是假。这种给命题变元指定真、假值的手续称作指派。

练习 1-1

1. 考虑下述陈述句中“是”的不同用法：

- (1) 鲁迅是《故乡》的作者。
- (2) 鲁迅是小说家。
- (3) 小说家是文学家。

2. 考虑下述陈述句的含义：

- (1) 我喜欢白头翁。
- (2) 我和小李的同级同学小赵去看电影。
- (3) 夕阳西下，断肠人在天涯。

3. 考虑下列语句是否是命题：

- (1) 《离散数学》是计算机专业的基础核心课程。
- (2) 呼和浩特是自治区首府。
- (3) $1+101=110$ 。
- (4) 月球上也有生物。
- (5) $x>8$ 。
- (6) 我在说假话。

4. 下列命题是原子命题还是复合命题？

- (1) 多媒体计算机既可用于科学计算，也可用于课余娱乐。
- (2) 北京不是大城市。
- (3) 小周和小郑争论不休。
- (4) 小孙否定了自己的提案。
- (5) 哺乳动物未必是胎生动物。
- (6) 不是东风压倒西风，就是西风压倒东风。

提示：

1.(1)等同;(2)从属;(3)包含于。

自然语言中一词多义,对于逻辑的陈述难以精确。象(1)中的“是”,其前后词项可以互换,(2)中的“是”反映分子和类的从属关系,(3)中的“是”是可以传递的。同一个“是”在三个陈述句中有三种不同的用法。

2. (1)“白头翁”可指老者或者一味中药,或鸟名。

(2)看电影的可能是一人也可能是两人。

(3)“断肠人”是指穷困潦倒的人。

从中可见自然语言的丰富和歧义。

3. (1)是命题。

(2)在一定环境下可确定真值,是命题。

(3)上下文中可确定真值,是命题。

(4)是命题。

(5)不是命题。

(6)不是命题。若记此句为 A,则 A 的真值为“ A 真当且仅当 A 假”,这是矛盾;象这样形式的矛盾句称为悖论。

4. (3),(4)是原子命题,(1),(2),(5),(6)是复合命题。

(5)的含义是“并非哺乳动物必是胎生动物”,(6)即“要么东风压倒西风,要么西风压倒东风”。

1-2 逻辑联词

1.否定, $\neg$

命题 P 的否定是命题 $\neg P$,读作非 P。从真值表易见 P 与 $\neg P$ 的取值关系: P 真, 当且仅当 $\neg P$ 假。

P	$\neg P$
T	F
F	T

2.合取, $\wedge$

命题P与Q的合取是命题 $P \wedge Q$, 读作P与Q。 $P \wedge Q$ 取值“真”, 当且仅当P与Q都取真值“真”。

$P \wedge \neg P$ 是一永假式。

3. 析取, $\vee$

命题P与Q的析取是命题 $P \vee Q$, 读作P或Q。 $P \vee Q$ 假, 当且仅当P与Q都假。

$P \vee \neg P$ 是一永真式。

命题P与Q的析取命题 $P \vee Q$ 取真值时, 允许P和Q同时取得真值真, 即P与Q可同真, 因而也说析取 $\vee$ 是可兼或。

P	Q	$P \wedge Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

P	Q	$P \vee Q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

4. 条件, $\rightarrow$

命题P与Q组成条件命题 $P \rightarrow Q$, 读作若P则Q。其中P称前件, Q称后件。 $P \rightarrow Q$ 假, 当且仅当P真而Q假。

条件命题 $P \rightarrow Q$ 当前件P取值为假时, 无论后件取值是真还是假, 都取真值真, 即从假的前件出发不管推断的后件真还是假, $P \rightarrow Q$ 都是真命题。这一定义方法被理解为“善意的推定”。 $P \rightarrow Q$ 在P为假时被视为真命题的规定称“实质蕴涵”规定。

P	Q	$P \rightarrow Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

5. 双条件, $\leftrightarrow$

命题P与Q组成双条件命题 $P \leftrightarrow Q$, 读作P当且仅当Q。 $P \leftrightarrow Q$ 真, 当且仅当P与Q取相同的真值(同真或同假)。

这里称P为双条件命题的左支, 称Q为右支。

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

由原子命题通过逻辑联结词连接或作用组成最简单的复合命题,逻辑联结词对复合命题的作用可以形成更为复杂的命题。命题都有真假,原子命题的真假取决于它是否与客观实际相符合,复合命题的真假由组成它的支命题的真假和逻辑联结词的定义所确定。

需要我們注意的是:逻辑联结词与自然语言中相应词语的含义既有联系,又有区别,而且被逻辑联结词连接和作用的支命题只要求是具有真假值之一的命题,而并不关心支命题间是否在内容上都有联系。

逻辑联结词反映复合命题与支命题之间的真值关系,它们有确定的含义,不能与自然语言中的相应词语混为一谈。逻辑联结词是自然语言中相应词语的抽象。

练习 1-2

1.指出下列语句中的“并非”、“并且”、“与”、“或者”、“只有……才……”、“如果……那么……”、“除非……否则……”等词是否就是我们定义的逻辑联结词:

(1)她并非江雪。

(2)小朱拉开抽屉并且取出一本书来。

(3)东风压倒西风,或者西风压倒东风。

(4)如果说巴枯宁理论上一窍不通,那么在干阴谋诡计上还是颇为能干的。

(5)小梁与小孟是好朋友。

(6)除非敌人投降,否则他们没有出路。

(7)整数 i 只有能被 2 整除, i 才能被 4 整除。

(8)若老天不下雨,则我去郊游。

2.指出下列命题的真值:

(1)如果 $2+2=5$,那么太阳从西边升起。

(2)如果太阳不从东边升起,那么地球就停止自转。

(3)胎生动物当且仅当是哺乳动物。

(4)若元素 a 属于空集 Φ , 则属于集合 A 。

(5)锄禾日当午, 汗滴禾下土。

(6)除非 $ABCD$ 是平行四边形, 否则它的对边不都平行。

3. 令 $P =$ “天下雪”, $Q =$ “我去镇上”, $R =$ “我有空闲”, 请将下列命题符号化:

(1)如果天下雪且我没有空闲, 那么我不去镇上。

(2)我去镇上当且仅当我有空闲。

(3)天不下雪。

(4)除非下雪, 否则我去镇上。

(5)或者下雪, 或者我有空闲。

(6)天在下雪, 我在去镇上。

4. 填空:

(1)

P	<u>$\vee$</u>
T	T
F	T

(2)

P	Q	<u>$\leftrightarrow$</u>
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	F

(3)

P	Q	<u>P</u>	<u>Q</u>
T	T	T	
T	F	F	
F	T	T	
F	F	T	

5. 在条件命题中, “善意的推定”是指什么? 在析取命题中可兼或的含义是什么?

提示:

1. (1)是否定“非”; (2)不是合取“与”, 在合取式中左右两个支命题可交换位置; (3)不是析取“或”, 因为不可兼; (4)不是条件“若..., 则...”, 而是合取“与”; (5)不是合取“与”; (6)是形式为“ $\neg P \leftrightarrow \neg Q$ ”的双条件命题; (7)是形式为“ $\neg P \rightarrow \neg Q$ ”的必要

条件假言判断; (8)是条件“若...,则...”。

2.(1)真; (2)真; (3)假; (4)真,这是实质蕴涵规定的一个例子; (5)这一复合命题是条件命题,其值为真; (6)真。

3. (1) $(P \wedge \neg R) \rightarrow \neg Q$; (2) $Q \leftrightarrow R$; (3) $\neg P$;
(4) $\neg P \leftrightarrow Q$; (5) $P \vee R$; (6) $P \wedge Q$ 。

4.(1) $P, \neg P$; (2) $\neg P, Q$ 或 $P, \neg Q$; (3) $\neg, \vee$ 。

5.“善意的推定”是指,只要前件取假,条件命题的真值就是真;可兼或的含义是:析取命题为真时,作析取的两个命题都可取到真值真。

1-3 命题形式与真值函数

通过前面两节的讨论,我们已经引入了五个逻辑联词,得到了五个最简单的复合命题形式,从这些复合命题形式出发,由逻辑联词再经过各种相互组合,可以构成更多、更复杂的复合命题形式。那么怎样的组合形式才是命题逻辑的命题形式呢?

命题逻辑的命题形式我们称之为合式的公式(wff)或命题公式,并被递归定义为:

(1)基础: 命题变元是合式公式;

(2)归纳: 若 A 是合式公式, 则 $\neg A$ 也是合式公式;

若 A, B 是合式公式, 则 $(A \wedge B), (A \vee B), (A \rightarrow B)$ 和 $(A \leftrightarrow B)$ 也都是合式公式;

(3)界限: 当且仅当由(1)、(2)的有限次应用生成命题逻辑的全部合式公式。

为了简化圆括号的使用且不至引起表达的混淆, 我们约定:

(1)合式公式的最外层括号可以略去;

(2)规定逻辑联词的运算先后次序为: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ 。

例 1. 设 P, Q 为命题变元, 按照命题逻辑合式的公式的递归

定义, 可知

$$P, (\neg Q), (P \wedge (\neg Q)), ((\neg Q) \vee P), ((P \rightarrow (\neg Q)) \leftrightarrow (\neg Q)), \\ (((\neg(P \wedge (\neg Q))) \vee (((\neg P) \vee (\neg(\neg Q))) \wedge ((\neg Q) \vee P))) \rightarrow (\neg(P \leftrightarrow (\neg Q)) \wedge ((\neg P) \rightarrow (\neg Q))))$$

都是合式的公式。再由圆括号省略和逻辑联词的优先次序的约定, 上述命题公式可以写为:

$$P, \neg Q, P \wedge \neg Q, \neg Q \vee P, P \rightarrow \neg Q \leftrightarrow \neg Q, \neg(P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \vee \neg \neg Q) \wedge (\neg Q \vee P) \rightarrow \neg(P \leftrightarrow \neg Q) \wedge \neg(\neg P \rightarrow \neg Q).$$

需要注意, 圆括号的使用仅仅是对运算施行先后的区分, 只要能够严格表述运算的次序, 圆括号省略、少省略、不省略都是允许的。

将由自然语言表述的命题写成符号形式, 就是要寻找每一个称作自然语言命题的真值形式的合式公式的表达式, 即将它们符号化或翻译为命题公式, 这是一个困难而复杂的问题。一般只要求对一些常见的逻辑结构较为清晰的命题语句能作出正确的翻译。

为了翻译准确, 我们要客观的分析与理解自然语言命题。采用“真值表方法”取值对照是一有效手段。通过真值表上真值对照, 容易检查公式翻译是否妥贴, 而且还能克服情感、心态等方面的干扰或影响。

例 2.(a)考虑命题“只有你走我才留下”。

这一命题是说: “若你不走, 则我不留”; 也是说: “如若我留则你得走”。因此, 它的正确翻译是:

令 P 为“你走”, Q 为“我留”, 则原命题的真值形式是: $\neg P \rightarrow \neg Q$, 亦即: $Q \rightarrow P$ 。

与原命题类似的命题还有:

仅当你走我才留下;

仅当你走我将留下;

我留下仅当你走。

在一般的命题表述中，“仅当”是必要条件，译成条件命题时是后件；而“当”是充分条件，译成条件命题时是前件。

(b)考虑命题“我今天进城，除非下雨”。

这一命题是说：“若不下雨，则我今天进城”，也是说：“若我今天不进城，则必下雨”。因此，它的正确翻译是：

令 P 为“我今天进城”， Q 为“今天下雨”，则原命题可以符号化为 $\neg Q \rightarrow P$ ，亦可： $\neg P \rightarrow Q$ 。

“除非”，表示唯一的条件，相当于“只有…才不…”。因此，与原命题类似的命题还有：

只有下雨，我今天才不进城；

除了下雨，我今天进城。

单用“除非”的命题，“非…”是充分条件，译成条件命题时，“非…”是前件。要是“除非…，否则…”的命题，其真值形式就是双条件了。

(c)考虑命题“小张或小李都可以办好这件事”。

令 P 为“小张可以办好这件事”， Q 为“小李可以办好这件事”，则原命题 $F(P, Q)$ 的真值表是：

P	Q	$F(P, Q)$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

从真值表，我们可得 $F(P, Q) = P \wedge Q$ 。所以要翻译成合取形式，“都”字起了决定性作用。如果原命题中略去“都”字，那么就要翻译成析取形式的命题公式。

在例 2(c)的讨论中，使用了标记“ $F(P, Q)$ ”。其含义是：要求的命题形式由命题 P, Q 组成，该命题形式在 $\{T, F\}$ 上定义，且在 $\{T, F\}$ 上取值。换句话说， $F(P, Q)$ 是函数， $F(P, Q)$ 是以 $\{T, F\}$ 为定义域和值域的真值函数。

事实上，每一命题形式都确定一个函数，这一函数的自变元