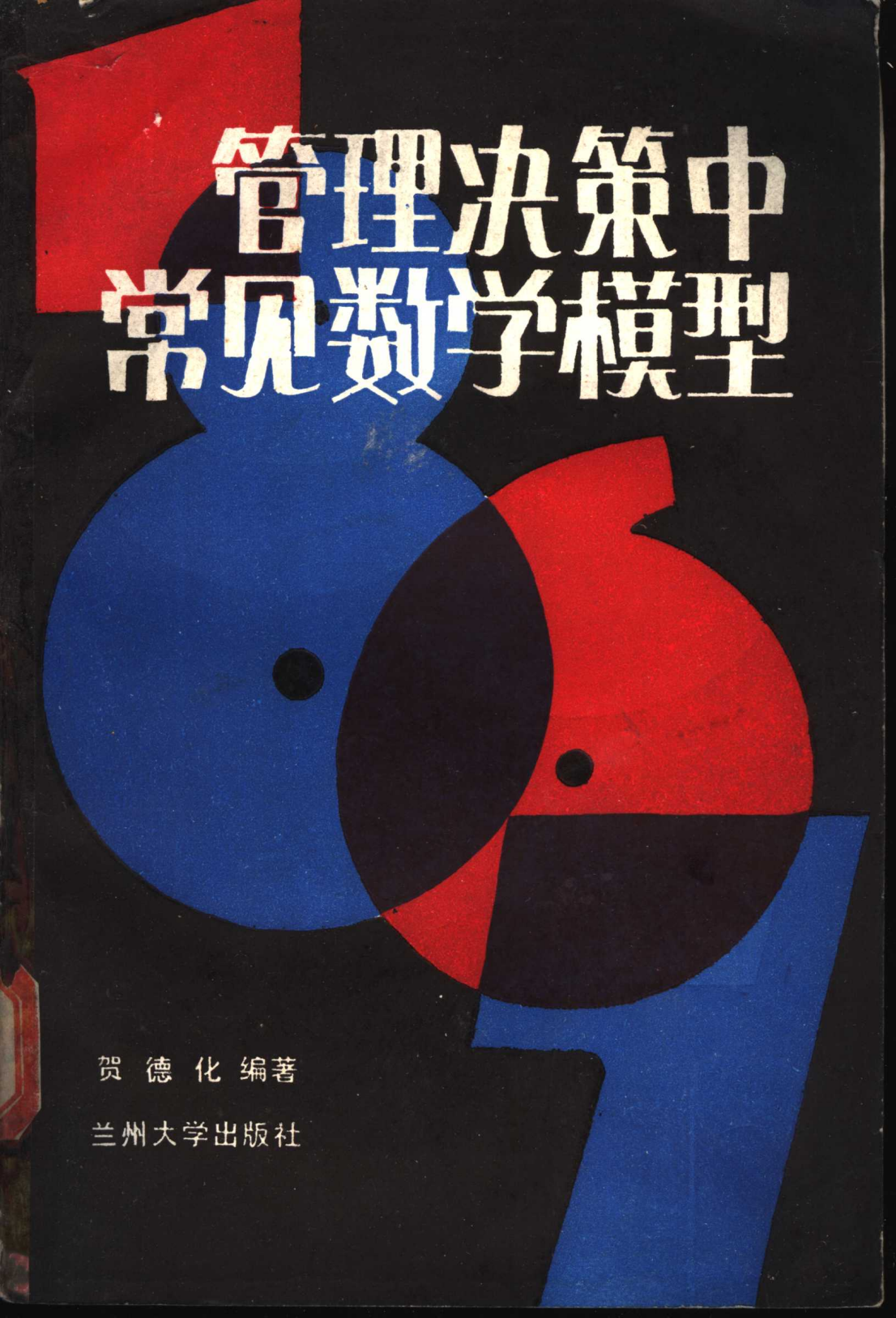




管理决策中 常见数学模型

贺 德 化 编著

兰州大学出版社

管理决策中常见数学模型

贺德化 编著

兰州大学出版社

1988·兰州

内 容 提 要

本书是针对现代管理过程中的决策问题如何建立数学模型、进行定量分析的一本著作。书中把广泛的数学知识运用到管理科学中，没有泛泛地去谈各种抽象的管理理论，而是简明扼要地阐述了管理决策中使用定量方法的基本理论知识。主要针对管理过程中的具体案例进行了深入细致、耐人寻味、具有启发性的判断分析。书中编选了400多个案例，分析起来生动有趣，颇具触类旁通的功效。

该书是从从事管理工作的专业人员和学习管理科学、应用数学的广大师生以及工程技术人员的一本比较好的参考书。因该书所涉及的原理和案例对日常生活也非常适用，因此更具很大的实用价值。

管理决策中常见数学模型

贺德化 编著

兰州大学出版社出版

(兰州大学校内)

张掖地区河西印刷厂印刷 甘肃省新华书店发行

开本：850×1168毫米1/32 印张：19.125 插图129

1988年11月第1版 1988年11月第1次印刷

字数：510千字 印数：3000册

ISBN7-311-00043-2/O·11 定价：7.65元

前 言

在我国经济体制改革日益深入开展的形势下，迅速普及管理科学知识，提高管理科学的教学和科研水平，使广大管理者能使用现代管理手段，去取得“四化”建设的业绩，是当务之急。现在常见的管理科学类书籍不少，但其中属于管理决策定量研究的则不多，尤其是针对管理决策中具体案例，培养管理者建立数学模型能力方面的参考书则更少。美国 Frank·S·McLaughlin 与 Robert·C·Pickhardt 合著的《管理决策的定量技术》(1982 年中国铁道出版社翻译出版)是以管理决策的数学模型为基本内容的大学教材。该书有两个明显的特点：一是它为从事管理工作的专业人员和大学生提供了一套比较系统的、直接解决日常管理决策中的具体问题的数学方法，它并不泛泛地去谈各种抽象的管理理论，比较实用；另一特点是用丰富的实例来阐明理论。并且作者“花了相当的时间和精力”编选了 448 个案例，作为习题，以培养学生的建模能力，作为该书不可缺少的一部分。因此，该书在我国发行以来，很受欢迎。但是，这本书对于以传统管理方法为主的广大读者来说，读起来是有困难的。尤其书中精选的一批作业，虽然很富有启发性，而且是管理工作中司空见惯的问题，但对于没有相应训练的读者，要用数学方法解决它，常常比较困难。这里需要用到决策论、概率论和数理统计、库存论、对策论、线性规划、整数规划、目标规划、动态规划、排队论、网络技术、计算机模拟等广泛的数学知识，有点令人望

而生畏。但我们认为，在将有关理论适当叙述后，若能对书中的案例给予较详细的解答，对于不太熟悉数学方法的读者，通过阅读后再去进行演算，从而达到比较顺利地掌握本书内容的目的，无疑是有帮助的。对于管理专业的大学生，常常会遇到把实际问题与数学模型联系不起来的困难，这里编辑的案例，能帮助他们迅速打开将实际问题数学化的思路。以上各点，就是本书所希望达到的目的。

虽然本书是为解答《管理决策的定量技术》一书的习题而编写的，但为了没有该书的广大读者使用方便，在每章之前均增加了内容提要，对解答本章习题必须用到的基本概念和方法作了简要叙述，故可使本书自成体系独立使用。另外，为了对照方便，本书的章节和习题次序大体按原书编排，只对个别词句和不妥处作了改动。对原书习题中的个别纯属叙述性的题目和最后两章习题，因为在一般教科书中均可找到，故未作解答。

本书是在编者两遍教学的基础上编写而成的。哲学系85级科技管理班全体同学、数学系86级四位应用统计学研究生，林亨同志、贺明皓同志分头整理和核对了全部习题；陈文岷教授对本书出版始终给予了鼓励和帮助，在此谨致衷心谢意。

由于编者水平有限，加之许多计算非常复杂，错误在所难免，敬请读者不吝指正。

作 者

1987年7月于兰州大学

目 录

前言	(I)
第一章 管理定量分析导论	(1)
内容提要	(1)
例解	(2)
第二章 风险型决策分析	(7)
内容提要	(7)
例解	(12)
第三章 概率和决策分析	(47)
内容提要	(47)
例解	(50)
第四章 库存模型	(96)
内容提要	(96)
例解	(101)
第五章 线性规划导论	(129)
内容提要	(129)
例解	(138)
第六章 线性规划：更复杂的分析	(170)
内容提要	(170)
例解	(176)

第七章 线性规划：运输和分派方法	(223)
内容提要	(223)
例解	(231)
第八章 另外几种规划模型：目标规划、整数规划和动态规划	(288)
内容提要	(288)
例解	(295)
第九章 网络模型：计划协调技术 (PERT) 和紧急线法 (CPM)	(344)
内容提要	(344)
例解	(351)
第十章 排队模型	(396)
内容提要	(396)
例解	(405)
第十一章 模拟	(435)
内容提要	(435)
例解	(449)
第十二章 马尔科夫分析	(517)
内容提要	(517)
例解	(527)
第十三章 对策论	(556)
内容提要	(556)
例解	(567)

第一章 管理定量分析导论

〔内容提要〕

1、管理科学概述

管理科学是研究办事规律的一门学科，它既有“管辖”“领导”之意，也有“办理”的意思。这是一门介于社会科学与自然科学之间的边缘学科。而本书所讨论的管理科学，则是狭义理解下的管理科学，即是管理决策中的定量技术，或者称作运筹学。

任何管理问题都包含质和量两个方面，因此研究方法也就有定性方法与定量方法之分。这两种方法是相辅相成的，片面地依靠一种方法对管理问题进行决策，往往导致决策的失误。定性决策是传统方法，流传较广；而定量决策则较多地依靠数学工具与计算机技术，大多数管理干部往往不熟悉。本书就是专门讨论管理决策中的数学方法的。

2、管理科学中的模型

模型是对真实事物的一种抽象或简化的表达形式。

日常生活中常见的模型可分为三大类，一类是形象模型，它们是真实事物的形象化代表，如飞机模型、建筑物模型等；另一类模型是模拟模型，它是用一组条件来代表真实事物的特征，通过模仿性实验来了解真实事物的特征，如体温表是温度的模拟，地

图是地形的模拟等；还有一类模型是符号模型，它又分为语言（描述）模型与数学（分析）模型两种。语言模型是用语言来描述真实事物的特征，如用文字表述某种工艺流程，来代表一种生产模型。它不要求求解，主要是控制管理决策的后果，只要求对管理决策有一个满意的或可行的解答即可。数学模型是用数学公式对真实事物的一种表达，它必须包含一个决策检验标准，能证明最优解是否存在，能提供寻求最优解的方法，并且求出最优解答。

3、管理决策定量模型举例——无盈亏模型

在以下讨论中，我们把随着产品生产数量而变化的成本称为单位可变成本；在一定范围内与产量无关的成本，如机器厂房折旧费等，称为不变成本。

在一个生产过程中，产品的销售量、成本和利润之间的关系，可用下述无盈亏模型表示：

$$P = SX - (F + VX)$$

用它可以对经营活动进行各种分析和决策，其中：

P = 利润

F = 固定成本

X = 生产周期内产量（销量）

S = 单位产品销售价格

V = 单位产品成本

若令 $P = 0$ ，即生产无盈亏时，就可以确定生产批量 X ，或其它变量的无盈亏平衡点。

〔例解〕

1.8、考虑本章中所讨论的简单无盈亏模型。假定一个商店其

可变成本为每单位 2 美元, 销售价格为每单位 6 美元, 固定成本为 900 美元。计算:

a、当销售量为 300 单位时的利润;

b、当销售量为 100 单位时的利润;

c、无盈亏点的销售量;

d、销售量为 200 单位而无盈亏, 销售价格应增加的数额。其余成本保持不变。

解: 设 $A =$ 销售价格应增加数额, 则有

$$a、P = SX - (F + VX)$$

$$= 6 \times 300 - (900 + 2 \times 300) = 300 \text{ (美元)}$$

$$b、P = SX - (F + VX)$$

$$= 6 \times 100 - (900 + 2 \times 100) = -500 \text{ (美元)}$$

$$c、\because P = 0$$

$$\therefore X = \frac{F}{S - V} = \frac{900}{6 - 2} = 225 \text{ (单位)}$$

$$d、\because P = 0$$

$$\therefore A = \frac{F}{X} + V - 6 = \frac{900}{200} + 2 - 6 = 0.5 \text{ (美元)}$$

1.9、设一个商店买进为每单位 12 美元, 卖出为每单位 18 美元。没有其他的可变成本。固定成本为 3000 美元。使用本章中讨论过的简单无盈亏公式计算:

a、当利润为 9000 美元时的销售量;

b、当销售量为 400 单位时的利润;

c、无盈亏点;

d、为使商店在销售量为 300 单位时无盈亏。每单位可变成本必须减少的数额。销售价格和固定成本保持不变。

解: a、 $\because P = SX - (F + VX)$

$$\therefore 9000 = 18X - (3000 + 12X)$$

$$\therefore X = 2000 \text{ (单位)}$$

$$b、P = SX - (F + VX)$$

$$= 18 \times 400 - (3000 + 12 \times 400) = -600 \text{ (美元)}$$

$$c、\text{令 } P = 0, \text{ 则有}$$

$$18X - (3000 + 12X) = 0$$

所以无盈亏点为 $X = 500$ (单位)

$$d、\text{令 } P = 0, \text{ 则有}$$

$$18 \times 300 - (3000 + 300V) = 0$$

$$\therefore V = 8 \text{ (美元)}$$

所以每单位可变成本必须减少的数额为

$$8 - 4 = 4 \text{ (美元)}$$

1·10、一家商店生产和销售一种专门产品。可变成本每单位20美元，销售价格每单位30美元，固定成本为60000美元。使用本章中讨论过的简单无盈亏模型计算：

a、当销售量为9000单位时的利润；

b、无盈亏点；

c、利润为9000美元时的销售量；

d、为使商店在销售量为5000单位时无盈亏。固定成本须减少的数额。每单位的可变成本和销售价格保持不变。

解：

$$a、P = SX - (F + VX)$$

$$= 30 \times 9000 - (60000 + 20 \times 9000) = 30000 \text{ (美元)}$$

$$b、\text{令 } P = 0, \quad \text{则 } 30X - (60000 + 20X) = 0$$

$$\text{故 } X = 6000 \text{ (单位)}$$

$$c、\text{由 } P = SX - (F + VX) \text{ 得}$$

$$X = P + F / (S - V) = (9000 + 60000) / (30 - 20) \\ = 6900 \text{ (单位)}$$

d、由 $P = SX - (F + VX)$ 得

$$F = (S - V)X - P$$

令 $P = 0$

$$\text{则 } F = (30 - 20) \times 5000 - 0 = 50000 \text{ (美元)}$$

故 固定成本须减少的数额为

$$60000 - 50000 = 10000 \text{ (美元)}$$

1.11、根据本章中讨论过的简单无盈亏模型，假定一个商店出售一种专门产品，每单位0.6美元，可变成本每单位0.4美元。总固定成本为1200美元。

计算：

- a、无盈亏点的销售量；
- b、当销售量为10000单位时的利润；
- c、当销售量为5000单位时的利润；
- d、为使该商店销售4000单位时无盈亏，销售价格须增加的数额；
- e、为使商店销售4000单位时无盈亏。固定成本须减少的数额。设销售价格保持每单位0.6美元。可变成本保持每单位0.4美元。

解：

$$a、\text{令 } P = 0, \quad \text{则 } 0.6X - (1200 + 0.4X) = 0$$

$$\text{故 } X = 6000 \text{ (单位)}$$

$$b、P = SX - (F + VX)$$

$$= 0.6 \times 10000 - (1200 + 0.4 \times 10000)$$

$$= 800 \text{ (美元)}$$

$$c、P = 0.6 \times 5000 - (1200 + 0.4 \times 5000) \\ = -200 \text{ (美元)}$$

$$d、\because P = 0, \text{若设 } h \text{ 为商品价格需增加的数额, 则有} \\ (0.6 + h) \times 4000 - (1200 + 0.4 \times 4000) = 0$$

$$\text{故 } h = 0.1 \text{ (美元)}$$

$$e、\because P = 0, \text{若设 } g \text{ 为固定成本需减少的数额, 则有} \\ 0.6 \times 4000 - [(1200 - g) + 0.4 \times 4000] = 0$$

$$\text{故 } g = 400 \text{ (美元)}$$

第二章 风险型决策分析

〔内容提要〕

1、决策论简介

决策论是在人类社会实践的基础上，用定性分析与定量分析相结合的方法，优选所研究事物的目标与完成目标的方法的一门学科。在管理科学中，决策分析是一项最重要的内容。

如果按照决策的条件和目标的关系进行分类，则决策问题可以分为四种类型：确定型决策、不确定型决策、风险型决策和竞争型决策。

本书第二、三章主要讨论风险型决策；第五、六章讨论确定型决策；竞争型和不确定型决策在第十三章中讨论。

2、决策问题中的有关概念

确定型决策：当影响决策目标的条件已知时，每一种决策只导致一种可能的结果，这种决策称为确定型决策。

不确定型决策：当一种决策可能导致多种结果，且每种结果出现的概率是未知的，这种决策称为不确定型决策。

风险型决策：当一种决策可能导致多种结果，而这些结果的概率又是已知的，这种决策称为风险型决策。

竞争型决策：在决策问题中有两个或者两个以上的决策者参与，决策的结果不仅取决于决策者本人的选择，而且也取决于其竞争者的选择，这种决策称为竞争型决策。

随机事件：在一定条件下也可能发生，也可能不发生的事件。

随机变量：在随机试验中样本点的一个单值实函数，它按照某种概率分布取值。

客观概率：根据历史资料或理论推导而得到的概率。

主观概率：凭决策者本人的经验和专业知识，对随机事件发生可能性大小的一种最佳估计值。

连续分布：连续型随机变量服从的分布函数或分布密度函数。

离散分布：离散型随机变量服从的概率分布。一般记作

$$X \sim \begin{pmatrix} x_1, x_2 \cdots x_n \cdots \\ p_1, p_2 \cdots p_n \cdots \end{pmatrix} \text{ 其中 } \sum p_i = 1$$

正态分布：如果随机变量X的概率密度为

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} \right]$$

其中， $-\infty < x < \infty$ ， $\sigma > 0$ ， $-\infty < \mu < \infty$

则称X服从正态分布，记作

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

期望值：若离散型随机变量X的概率分布为

$$X \sim \begin{pmatrix} x_1, x_2, \cdots x_n \\ p_1, p_2, \cdots p_n \end{pmatrix}$$

则称数值

$$EX = \sum_{i=1}^n x_i p_i$$

为其(数学)期望值;

若连续型随机变量 X 的密度函数为 $p(x)$, 且积分

$$\int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx$$

绝对收敛, 则称它为 X 的(数学)期望。记作

$$EX = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx$$

完善信息: 从外界得到的, 并被作为绝对正确而予以接受的信息, 即确定可靠的信息。

信息概率: 为了进行决策分析, 分配到位置 Q 的信息(随机事件)所有可能结果的概率。

无差异关系: 即决策者对一确定事件的金额收益和随机事件的期望收益之间没有选择的必要。因此, 可以用固定金额来代替一个随机事件。在一个无差异关系中, 随机事件与确定事件的收益有相等的吸引力, 决策者不应只愿选择其中之一而不愿选择另一决策。这种决策规则称作无差异关系。

条件利润: 货物销售金额与其成本之差。又称毛利。

后悔值: 当实际购进量大于理想购进量时, 理想购进量利润与实际购进量利润之差称为后悔值。

机会损失: 当实际购进量小于理想购进量时, 理想购进量利润与实际购进量利润之差称为机会损失。

期望边际利润(EMP): 存有和卖出一追加单位产品的边际利润(MP)乘以该单位产品能被卖出的概率。

期望边际损失(EML): 存有一追加单位的商品而卖不出去所造成的边际损失(ML)乘以卖不出去这一单位产品的概率。

边际分析: 决策者安排计划, 使得边际费用等于边际收入,

以求得最大利润的分析过程。

具有完善信息的存货量期望值 (EVWPI) :

$$EVWPI = \sum_{i=1}^n P_i V_i'$$

其中, V_i' 是与每一可能需求量对应的最优存货量的条件利润, P_i 是对应需求量的概率。

据定义可知: $EVWPI = \text{期望后悔值} + \text{期望条件利润}$ 。

3、风险型决策的几种基本方法

〈决策树方法〉

决策树是对决策过程的一种图解表示。它使用三种符号: 方框□表示一个决策点, 这是需要决策者作出决策的一个步骤; 圆圈○表示决策变点, 是决策过程中出现的随机事件, 其结果是不能由决策者预先决定的, 但决策者知道随机事件的概率; 箭头→表示由这一决策点到下一决策点(或变点)的方向。一个完整的决策树, 应该包括树状图、随机事件发生的概率、每一决策终点标明经济效益。

决策树画好后, 一般采用从决策终点到决策起点, 逐步计算经济效益的所谓“逆向简化法”进行决策。在分析过程中将优选的决策路线保留, 逐步删去未被采用的决策。在优选决策时, 必须遵守下述两条决策规则:

1°、无差异原则(前已叙述);

2°、最大利益原则。即决策者在选择不同方案时, 必须取经济效益最大的决策, 抛弃效益小的决策。

决策树算法的实例, 请参见后面的〔例解〕