面向21世纪本科生教材

常微分方程

（第二版）

蔡燧林 编著

全国优秀出版社
武汉大学出版社

O175.1
C146

面向21世纪本科生教材

常微分方程

蔡燧林 编著

（第二版）

全国优秀出版社
武汉大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

常微分方程/蔡燧林编著.—2版.—武汉：武汉大学出版社，2003.8

面向21世纪本科生教材

ISBN 7-307-03965-6

Ⅰ.常… Ⅱ.蔡… Ⅲ.常微分方程—高等学校—教材 Ⅳ.O175.1

中国版本图书馆CIP数据核字(2003)第059438号

责任编辑：顾素萍　　责任校对：黄添生　　版式设计：支　笛

出版发行：**武汉大学出版社**　(430072　武昌　珞珈山)

(电子邮件：wdp4@whu.edu.cn　网址：www.wdp.whu.edu.cn)

印刷：武汉市汉桥印务有限责任公司

开本：850×1168　1/32　印张：13　字数：323千字

版次：1991年3月第1版　　2003年8月第2版

2003年8月第2版第1次印刷

ISBN 7-307-03965-6/O·284　　定价：18.00元

版权所有，不得翻印；凡购买我社的图书，如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请与当地图书销售部门联系调换。

内容简介

本书分 8 章：基本概念，初等积分法，一阶微分方程的基本理论，线性微分方程，常微分方程组，定性理论与稳定性理论初步，边值问题初步，一阶偏微分方程. 每章配有习题和复习题，全部计算题都有答案，个别证明题有提示.

本书可用作师范院校、理工科大学的数学类专业教科书和部分理工科其他专业的参考书.

第二版说明

本书第一版于 1991 年问世，至今已有十一余年．现在的第二版除了校正第一版的一些排版问题外，作了以下一些修改，总的篇幅比第一版有所减少．

1．删去了一阶隐式方程求解．

2．删去了回路振荡一节，改写了应用实例，特别增加了微分方程在生物种群方面的应用题及近年来在考研中出现的应用题．

3．改写了第 4 章中常系数线性非齐次方程的解法这一节，将待定系数法的论证写得更简洁，避免了繁琐的关于 $\sum$ 的运算．

4．增加了“边值问题初步”一章，作为第 7 章，而将原第 7 章一阶偏微分方程改为第 8 章．

5．改写了一阶拟线性偏微分方程的论证，使之更简单明了．

6．删去了总复习题与索引．

在完成本书第二版修改时，承浙江大学宁波理工学院的领导大力支持，得以及时在该院信息与计算科学系使用，深表感谢．

蔡燧林

于浙江大学求是村

浙江大学宁波理工学院

2003 年 6 月

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

第一版序言摘录

全书共分 7 章. 第 1 章是基本概念，介绍有关微分方程的一些名词术语，以及引入微分方程的某些实例. 第 2 章是初等积分法，介绍一些基本类型的微分方程的积分方法. 第 3 章是基本理论，介绍一阶方程初值问题解的存在惟一性定理，解的延展理论，解对初值的连续依赖性和可微性等定理，它们是学习本门课程的读者必须掌握的内容. 第 4 章和第 5 章分别介绍高阶线性方程和常微分方程组的解的理论和常系数线性系统的解法. 第 6 章介绍常微分方程定性理论和稳定性理论初步，它是继第 3 章之后进一步研究解的某些性态，同时也有丰富的实际背景. 第 7 章介绍常微分方程组的首次积分，以及一阶线性偏微分方程和一阶拟线性偏微分方程. 这两部分内容有密切的联系，所以放在同一章中介绍.

作者在编写时力求深入浅出，眉目清楚，讲清思路，便于阅读. 在论证和方法的叙述上，又注意细节的说明. 必要时，除了正面论述外，还从反面举例说明，以便读者更好地掌握要阐明的问题. 至于某些不宜在常微分方程初等教材中提及的内容或其他枝节问题，则不提及，以免增加难度或分散注意力.

本书配置的例题较多. 例题分三类. 一类是为了帮助读者理解概念和理论的，这种例题大多较简单，不追求技巧和解题方法. 另一类是计算题，讲过一种方法之后，举一些这方面的例子，作为读者演算习题的范例. 再一类是证明题，它们既充实了教材本身的内容，又用来说明如何运用理论来分析问题和进行推

理. 这些例题在方法上，有时也有一定的技巧，可以借鉴. 读者应细心领会这类例题的实质，抓住其思路.

本书的习题类型也可分成三类. 一是验证理论的，会用它们去印证理论，就达到这类习题的目的了. 第二类是计算题. 这类习题数量较多，读者能独立完成其中每一型题的三分之一到二分之一就可以了，当然能多做更好. 第三类是证明题. 这类习题数量不多，但是其类型一般是各不相同的，并且有的有一定难度. 全书的计算题在书末都给出了答案.

本书第一版由北京大学丁同仁教授主审. 参加审查的还有东北师范大学黄启昌教授，山东师范大学庄万教授，湖南大学钱祥征教授，杭州大学俞伯华教授. 以上诸位先生对本书的初稿进行了详细的分析与精心的审阅，并提出了许多宝贵的意见. 作者根据他们的意见对初稿的某些内容作了较大的修改. 赵申琪副教授仔细阅读了本书的初稿和修改稿，无论在内容上还是在文字上，都提出了许多有益的见解. 他还为本书编写了各章小结、习题、复习题、习题答案. 作者在此对审查的诸位先生的指导，对赵申琪同志的协助，一并表示衷心的感谢.

限于作者水平，书中难免存在缺点和不妥之处，敬请读者批评指正.

蔡燧林
1989 年 3 月
于浙江大学

目　　录

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

第1章 基本概念

本章首先从一些实例引入常微分方程，然后结合这些例子，介绍常微分方程的一些基本概念和术语，在本章最后，扼要指出常微分方程课程的主要任务.

§1.1 常微分方程的几个实例

在初等数学里，已见到过方程. 例如

(1) $x^2+2x-3=0$,

(2) $\tan x = x$

等都是方程，其中 x 是未知量.

有时未知而要去求的不是一个或几个特定的值，而是一个或几个函数，它们各自依赖于若干个变量. 例如

(3) $x^2-y^2=1$,

(4) $x+y+z=1$，$x^2+y^2+z^2=4$.

若 x 为自变量，则 y 和 z 是未知函数. (3)和(4)这种方程称为**函数方程**.

本书要研究的是另一类方程. 联系着自变量、未知函数以及未知函数的导数的这种方程称为**微分方程**，其中必须含有未知函数的导数. 例如

(5) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y\tan x+5$,

(6) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=x^2+y^2$,

(7) $\dfrac{d^2y}{dx^2}+p\dfrac{dy}{dx}+qy=f(x)$,

(8) $\dfrac{\partial u}{\partial t}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$,

(9) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$

等都是微分方程，其中(5),(6),(7)中，y 是未知函数，x 是自变量，p 和 q 是常数，$f(x)$是 x 的已知函数；(8)和(9)中 u 是未知函数，t,x 和 y 是自变量，a 是常数.

微分方程又分常数分方程和偏微分方程. 如果方程中所出现的未知函数的导数是一元函数的导数，则这种方程称为**常微分方程**；如果方程中所出现的未知函数的导数是偏导数，则称为**偏微分方程**. 例如上面的(5),(6)和(7)是常微分方程，(8)和(9)是偏微分方程.

本书主要讨论常微分方程以及与常微分方程有密切联系的一阶偏微分方程. 为方便起见，以后将微分方程简称为**方程**.

方程来源于实际. 从微积分诞生的时候起，同时产生了微分方程. 现在举几个简单的例子.

例 1 求一曲线，设在曲线上任意一点(x,y)处的切线斜率等于该点横坐标 x 的 2 倍，并且该曲线经过点(1,2).

解 设曲线方程为 $y=y(x)$. 由题设条件，可列出方程

$$\frac{dy}{dx}=2x. \tag{1.1}$$

这是一个常微分方程，所求曲线 $y=y(x)$应满足这个方程. 又因为所求曲线经过点(1,2)，所以又应满足条件

$$y|_{x=1}=2. \tag{1.2}$$

现在来求 $y=y(x)$. 将(1.1)改写为 $dy=2xdx$，然后两边积分，显然可得

$$y=x^2+C, \tag{1.3}$$

其中 C 是任意常数. 满足(1.1)的 y 都可由(1.3)来表示. 反之，

不论 C 是什么样的常数，由(1.3)表示的 y 都满足(1.1).

显然，(1.3)所表示的不止是一条曲线，而是无穷多条曲线，是一个曲线族. 现在要从这许多曲线中找出满足条件(1.2)的曲线. 为此，以(1.2)代入(1.3)得 $2=1+C$，于是求得 $C=1$. 故满足方程(1.1)和条件(1.2)的曲线有且只有一条，是

$$y=x^2+1.$$

例 2 一物体放在温度为 τ 的恒温介质中冷却. 设在冷却过程中降温速率随物体与介质的温度差成正比，比例系数 $k>0$ 可以由实验确定. 设物体的初始温度为 T_0，$T_0>\tau$，求从实验开始算起时间 t 时的物体温度 T.

解 要求的是 T 随 t 的变化规律，即函数 $T=T(t)$. 冷却过程中降温速率就是 T 对 t 的变化率，即$\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}$. 由题中条件可列出方程

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}=-k(T-\tau). \tag{1.4}$$

这里等号右端添负号的原因是，$T>\tau$ 时，物体在介质中冷却，于是 T 随 t 的增长而减少，故$\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}<0$. 又因 $k>0$，故右端应添负号. 要求的函数 $T=T(t)$应满足方程(1.4). 显然，冷却规律又与初始温度有关. 现在的 $T=T(t)$还应满足

$$T|_{t=0}=T_0. \tag{1.5}$$

求满足方程(1.4)和条件(1.5)的函数 $T=T(t)$将在§2.1 例 1 中介绍.

例 3 在地表面上方 s_0 处以初速度 v_0 垂直上抛一物体. 设将坐标原点 O 取在地表面，Os 轴以向上为正，不计空气阻力. 求物体的运动规律.

解 按题中所讲取坐标系如图 1-1，设在时刻 t 物体的坐标为 s. 在运动的过程中，物体只受重力 F 的作用，设物体的质量为 m，则由牛顿第二定律，有

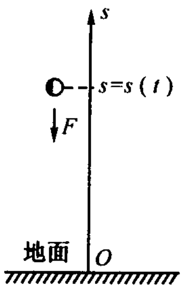

图 1-1

$$ma = F = -mg, \tag{1.6}$$

这里 a 是物体运动的加速度，右边的负号是因为重力 F 是向下的，与所建立的坐标轴 Os 的正向相反. 再由物理学知识，知

$$a = \frac{d^2 s}{dt^2}. \tag{1.7}$$

将(1.7)代入(1.6)并约去 m，得到物体的位移 $s=s(t)$应满足的方程

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = -g. \tag{1.8}$$

又当 $t=0$ 时，该物体在地表面上方 s_0 处且以初速度 v_0 垂直向上运动，因此 $s=s(t)$还应满足条件

$$s\big|_{t=0} = s_0, \quad \left.\frac{ds}{dt}\right|_{t=0} = v_0. \tag{1.9}$$

现在来求 $s=s(t)$. 将(1.8)两边对 t 积分一次，显然得到

$$\frac{ds}{dt} = -gt + C_1, \tag{1.10}$$

其中 C_1 是一个任意常数. 再将(1.10)两边对 t 积分一次，得到

$$s = -\frac{1}{2}gt^2 + C_1 t + C_2, \tag{1.11}$$

这里 C_2 又是一个任意常数. (1.11)中包含两个任意常数. 不论 C_1 和 C_2 是什么样的常数，(1.11)表示的 $s=s(t)$都满足方程(1.8).

为了要得到特定的物体运动规律，还必须考虑当运动开始时，物体是在什么地方并且以什么样的速度运动的，即条件(1.9). 将它分别代入(1.10)和(1.11)，得到

$$C_1 = v_0 \quad 和 \quad C_2 = s_0. \tag{1.12}$$

将它们代入(1.11)，就得到垂直上抛物体的运动规律：

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com