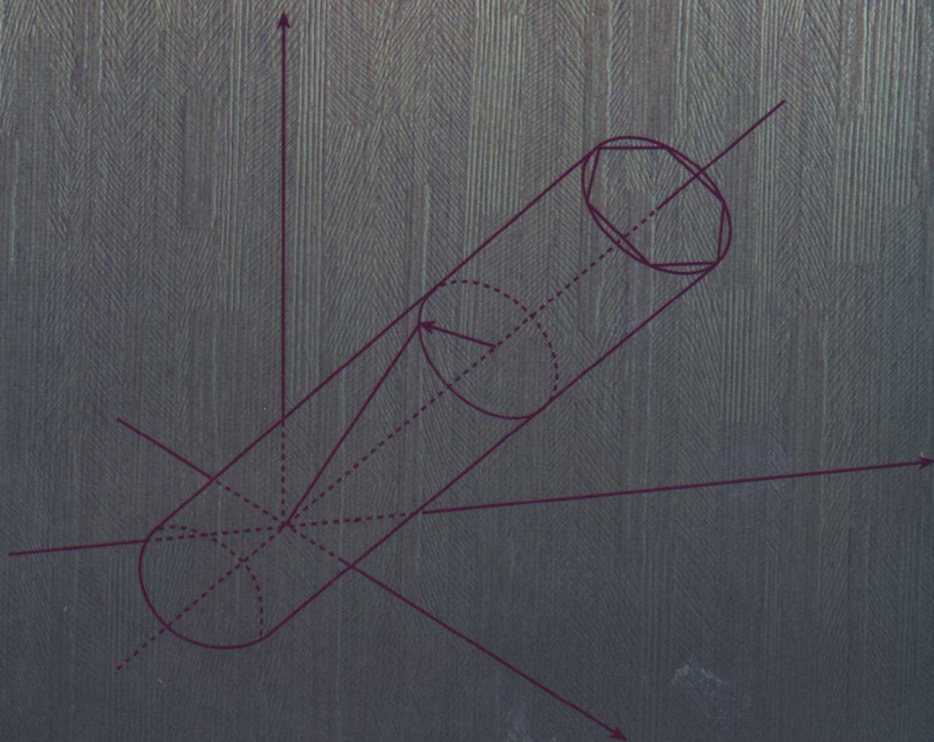


材料成形力学

赵德文 主编



NEUPRESS

东北大学出版社



东北大学资助

材料成形力学

赵德文 主编

东北大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

材料成形力学/赵德文主编. —沈阳: 东北大学出版社, 2002.9
ISBN 7-81054-800-X

I. 材… II. 赵… III. 材料力学 IV. TB301

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 057570 号

出 版 者: 东北大学出版社

(邮编: 110004 地址: 沈阳市和平区文化路 3 号巷 11 号)

出 版 人: 李霖兴

印 刷 者: 东北大学印刷厂

发 行 者: 东北大学出版社

经 销 者: 东北大学出版社

开 本: 787mm×1092mm 1/16

字 数: 365 千字

印 张: 14.625

出版时间: 2002 年 9 月第 1 版

印刷时间: 2002 年 9 月第 1 次印刷

责任编辑: 刘 莹

封面设计: 唐敏智

责任出版: 杨华宁

定价: 22.00 元

垂询电话: 024—83680267 (社务办)

83687331 (市场部)

024—83680265 (传 真)

83687332 (出版部)

E-mail: neuph@neupress.com

http: //www. neupress. com

前 言

本书是根据《材料成形专业教学计划》与《材料成形力学教学大纲》，按照《东北大学“十五”教材建设规划要求》编写的。全书从应力与应变的基本概念入手，建立求解材料成形问题的基本方程，结合材料成形实际，讲述了主要解析方法——工程法、滑移线法和上界法，并给出很多具体解析实例。为培养学生分析问题与解决问题的能力，各章均配有一定数量的思考题与习题。为便于学生自学，对书中涉及的主要公式都做了详细推导。

按照《新教学大纲》的要求，本书进一步增加了工程法与上界法的解析实例。根据具体情况，可以增加或删除带*号的小节。本书既可作为高等学校材料成形专业的教学用书，也可供生产、设计和科研部门的工程技术人员参考。

本书的编写分工如下：绪论和5，6章由赵德文执笔；1，3章由王平执笔；2，4章由邸洪双执笔。全书由赵德文主编。

由于编者水平所限，书中难免存在缺点与错误，敬请读者不吝批评指正。

编 者

2002年3月18日

目 录

0 绪 论	1
0.1 材料成形力学及其基本研究内容	1
0.2 材料成形方式与基本受力特点	1
0.3 材料成形力学的基本解法与发展方向	3
1 应力与应变	5
1.1 应力	5
1.1.1 应力状态的基本概念	5
1.1.2 点应力状态	7
1.2 主应力	10
1.2.1 主应力、应力张量不变量	10
1.2.2 应力椭球面	11
1.3 主剪应力	12
1.4 应力张量的分解	14
1.4.1 八面体面和八面体应力	14
1.4.2 应力张量的分解	15
1.4.3 主应力图与主偏差应力图	17
1.5 应变	18
1.5.1 应变状态的基本概念	18
1.5.2 几何方程	19
1.5.3 一点附近的应变分析	23
1.6 主应变、应变张量不变量	24
1.7 应变张量的分解	25
1.8 主应变图	26
1.9 应变速率	27
1.10 应变表示法	28
1.10.1 工程应变表示法	28
1.10.2 对数应变表示法	29
思考题	30
习 题	31
2 变形力学方程	32
2.1 力平衡方程	32

2.1.1 直角坐标系的力平衡方程	32
2.1.2 极坐标系的力平衡方程	35
2.1.3 圆柱面坐标系的平衡方程	36
2.1.4 球面坐标系的平衡方程	36
2.2 应力边界条件及接触摩擦	37
2.2.1 应力边界条件方程	37
2.2.2 材料成形中的接触摩擦	38
2.2.3 应力边界条件的种类	40
2.3* 应变协调方程	40
2.4 屈服准则	41
2.4.1 屈服准则的含义	41
2.4.2 屈雷斯卡(Tresca)屈服准则(最大剪应力理论)	41
2.4.3 密赛斯(Mises)屈服准则(应变能定值理论)及简化形式	42
2.4.4 屈服准则的几何解释	45
2.4.5 屈服准则的实验验证	46
2.4.6 屈服准则在材料成形中的实际运用	47
2.4.7 应变硬化材料的屈服准则	50
2.5 应力与应变的关系方程	52
2.5.1 弹性变形时的应力-应变关系	52
2.5.2 塑性应变时的应力-应变关系	53
2.5.3 应力-应变顺序对应规律及其应用	56
2.5.4 屈服椭圆图上的应力分区及其与塑性变形时工件尺寸变化的关系	59
2.6 等效应力和等效应变	62
2.6.1 等效应力	63
2.6.2 等效应变	63
2.6.3 等效应力与等效应变的关系	65
2.6.4 σ_e - ϵ_e 曲线——变形抗力曲线	65
2.7 变形抗力模型	68
2.7.1 变形抗力的概念及其影响因素	68
2.7.2 变形体的“模型”	70
2.7.3 变形抗力模型	72
2.8 平面变形和轴对称问题的变形力学方程	74
2.8.1 平面变形问题	74
2.8.2 轴对称问题	76
思考题	78
习 题	78
3 工程法	80
3.1 工程法简化条件	80
3.2 圆柱体锻造	82
3.2.1 接触表面压应力分布曲线方程	82

3.2.2 接触表面分区情况	83
3.2.3 平均单位压力计算公式及计算曲线	84
3.3 挤压	85
3.3.1 挤压力及其影响因素	85
3.3.2 棒材单孔挤压时的挤压力公式	87
3.3.3 多孔、型材挤压	91
3.3.4 管材挤压力公式	91
3.3.5 穿孔力公式	92
3.3.6 反向挤压力公式	94
3.4 拉拔	95
3.4.1 棒、线材拉拔力计算公式	95
3.4.2 管材空拉	100
3.4.3* 管材有芯头拉拔	102
3.5 平砧压缩矩形件	107
3.5.1 无外端的矩形件压缩	107
3.5.2 平砧压缩矩形厚件($l/h < 1$)	109
3.6 平辊轧制单位压力的计算	112
3.6.1 斯通(M. D. Stone)公式	112
3.6.2* 采利柯夫(Целиков)公式	115
3.6.3 西姆斯(Sims)公式	119
3.6.4* 艾克隆得(S. Ekelund)公式	121
3.7 电机传动轧辊所需力矩及功率	122
3.7.1 传动力矩的组成	122
3.7.2 轧制力矩的确定	123
3.7.3 附加摩擦力矩的确定	125
3.7.4 空转力矩的确定	125
3.7.5* 静负荷图	126
3.7.6* 可逆式轧机的负荷图	126
3.7.7* 主电动机的功率计算	128
思考题	130
习 题	130
4 滑移线理论及应用	131
4.1 平面塑性变形的基本方程式	131
4.2 滑移线场的基本概念	131
4.2.1 基本假设	131
4.2.2 基本概念	132
4.3 汉基(Hencky)应力方程	134
4.4 滑移线场的几何性质	137
4.5 H. 盖林格尔(Geiringer)速度方程与速端图	140
4.5.1 盖林格尔速度方程	140

4.5.2 速端图	140
4.6* 滑移线场求解的一般步骤及应力边界条件	143
4.6.1 滑移线场求解的一般步骤	143
4.6.2 应力边界条件	144
4.7* 滑移线场的近似作法	147
4.7.1 按作图法绘制滑移线场	147
4.7.2 用数值法做近似的滑移线场	150
4.7.3 利用电子计算机做滑移线场	151
4.8 滑移线场理论在锻压方面的应用实例	154
4.8.1 平冲头压入半无限体	154
4.8.2 平冲头压缩 $l/h < 1$ 的厚件	157
4.8.3 平板间压缩 $l/h > 1$ 的薄件	161
4.9 滑移线理论在轧、挤、压方面的应用实例	167
4.9.1 平辊轧制厚件 ($l/\bar{h} < 1$)	167
4.9.2 平辊轧制薄件 ($l/\bar{h} > 1$)	169
4.9.3 横轧圆坯	169
4.9.4 在光滑模孔中挤压(或拉拔)板条	170
4.10* 滑移线场的矩阵算子法简介	172
4.10.1 矩阵算子法的发展概述	172
4.10.2 矩阵算子法的基本原理	172
思考题	176
习 题	176
5 极限分析原理	177
5.1 极限分析的基本概念	177
5.2 虚功原理	178
5.2.1 虚功原理表达式	178
5.2.2 存在不连续时的虚功原理	179
5.3 最大塑性功原理	181
5.4 下界定理	184
5.5 上界定理	185
5.6* 理想刚-塑性体解的惟一性定理	188
5.7 线性屈服准则及其塑性功率证明	189
5.7.1 屈雷斯卡准则塑性功率证明	189
5.7.2 双剪应力准则及塑性功率	190
思考题	191
习 题	191
6 上界法在成形中的应用	192
6.1 上界法简介	192
6.1.1 上界法解析的基本特点	192

6.1.2 上界法解析成形问题的范围	192
6.1.3 上界功率计算的基本公式	193
6.2 三角形速度场解析平面变形压缩实例	193
6.2.1 光滑平冲头压缩半无限体	193
6.2.2 在光滑平板间压缩薄片($l/h > 1$)	194
6.3 三角形速度场解析粗糙辊面轧板	196
6.4 连续速度场解析扁料平板压缩	198
6.4.1 不考虑侧面鼓形的扁料平板压缩	198
6.4.2* 考虑侧面鼓形的扁料平板压缩	200
6.5 楔形模平面变形拉拔和挤压	202
6.5.1 速度场的建立	202
6.5.2 上界功率及单位拉拔力	203
6.6* 上界定理解析轴对称压缩圆环	204
6.6.1 子午面上速度不连续线为曲线	204
6.6.2 平行速度场解析圆环压缩	206
6.7* 球面坐标系解析拉拔挤压圆棒(Avitzur B.)	208
6.8* 连续速度场解析板带轧制	212
6.8.1 参数方程与速度场	212
6.8.2 上界功率及最小值	213
6.8.3 轧制力能参数	214
6.9* 滑移线解与最小上界解一致证明实例	215
6.9.1 速度场的设定	215
6.9.2 上界功率	217
6.9.3 最小上界值	218
6.10* 有限元法概述	219
6.10.1 基本内容	219
6.10.2 基本解析步骤与评价	219
思考题	220
习 题	220
参考文献	222



绪 论

0.1 材料成形力学及其基本研究内容

材料成形力学与材料成形金属学是材料成形原理的两个分支,本书讲述材料成形力学内容。

材料成形力学的基本研究内容如下:

① 研究给定的材料成形过程(轧制、锻造、挤压、拉拔等)所需的外力;外力与变形外部条件之间的关系,诸如工具形状、变形方式、摩擦条件等,此外力是成形设备设计与成形工艺制定的基本依据。

② 研究成形材料内部的应力场、应变场、应变速率场以及边界位移等,从而分析成形时产生裂纹的原因和预防措施,预测产品内残余应力和组织性能,提高产品质量。

③ 研究新的、更合理的成形过程与组合成形过程及其力学特点,以提高成形效率,节省能源;研究新的、更合理的数学解析方法,以提高成形力学的解析性、严密性与科学性。

0.2 材料成形方式与基本受力特点

材料的成形方式和基本受力特点如表 0.1 所示,分为基本成形方式和组合成形方式。

(1) 靠压力作用使材料产生变形的的方式有锻造、轧制和挤压

① 锻造。是用锻锤锤击或用压力机的压头压缩工件。分自由锻(冶金厂常用的锻粗和延伸工序)和模锻。可生产各种形状的锻件,如各种轴类、曲柄和连杆等。

② 轧制。坯料通过转动的轧辊受到压缩,使横断面减小、形状改变、长度增加。可分为纵轧、横轧和斜轧。纵轧时,工作轧辊旋转方向相反,轧件的纵轴线与轧辊轴线垂直;横轧时,轧辊旋转方向相同,轧件的纵轴线与轧辊轴线平行;斜轧时,工作轧辊旋转方向相同,轧件的纵轴线与轧辊轴线成一定的倾斜角。用轧制法可生产板带材、简单断面和异型断面型材与管材、回转体(如变断面轴和齿轮等)、各种周期断面型材、丝杠、麻花钻头和钢球等。

③ 挤压。把坯料放在挤压筒中,垫片在挤压轴推动下,迫使成形材料从一定形状和尺寸的模孔中挤出。又分正挤压和反挤压。正挤压时,挤压轴的运动方向和从模孔中挤出材料的前进方向一致;反挤压时,挤压轴的运动方向和从模孔中挤出材料的前进方向相反。用挤压法可生产各种断面的型材和管材。

(2) 主要靠拉力作用使材料成型的方式有拉拔、冲压(拉延)和拉伸成型

① 拉拔: 用拉拔机的夹钳把成形材料从一定形状和尺寸的模孔中拉出, 可生产各种断面的型材、线材和管材。

② 冲压: 靠压力机的冲头把板料冲入凹模中进行拉延, 可生产各种杯件和壳体(如汽车外壳等)。

(3) 主要靠弯矩和剪力作用使材料产生成型的方式有弯曲和剪切

① 弯曲: 指在弯矩作用下成型, 如板带弯曲成型和金属材的矫直等。

② 剪切: 坯料在剪力作用下进行剪切变形, 如板料的冲剪和金属的剪切等。

基本成型方式简称“锻、轧、挤、拉、冲、弯、剪”。

为了扩大品种和提高成型精度与效率, 常常把上述基本成型方式组合起来, 形成新的组合成型过程, 如表 0.1 所示。仅就轧制来说, 目前已成功地研究出或正在研究与其他基本成型方式相组合的一些成型过程, 例如: 锻造和轧制组合的锻轧过程, 可以生产各种变断面零件, 以扩大轧制品种和提高锻造加工效率; 轧制和挤压组合的轧挤过程, 可以生产铝型材; 纵轧压力穿孔也是这种组合过程, 它可以对斜轧法难以穿孔的连铸坯(易出内裂和折叠)进行穿孔, 并可使用方坯代替圆坯; 拉拔和轧制组合的拔轧过程, 其轧辊不用电机驱动, 而靠拉拔工件带动, 能生产精度较高的各种断面型材; 冷轧带材时, 带前后张力轧制也是一种拔轧组合, 它可以减少轧制力; 轧制和弯曲组合的辊弯过程使带材通过一系列轧辊构成的孔型进行弯曲成型, 可以生产各种断面的薄壁冷弯或热弯型材; 因轧制和剪切组合的搓轧过程上下工作辊线速度不等(也叫异步轧制), 从而造成上下辊面对轧件摩擦力方向相反的搓轧条件, 可以显著降低轧制力, 能够生产高精度极薄带材。

此外, 还有铸造和轧制组合的液压铸轧, 粉末冶金和轧制组合的粉末轧制等新的组合成型过程。目前, 已采用液态铸轧法生产铸铁板、不锈钢高速钢薄带、铝带和铜带等, 钢的液态铸轧正在研究中; 用粉末轧制法已能生产出有一定强度和韧性的板带材。

0.3 材料成形力学的基本解法与发展方向

材料成形力学是运用塑性力学基础来求解材料成型问题。即在对成型工件进行应力-应变分析的基础上, 建立求解成型问题的变形力学方程和解析方法, 从而确定材料成形的力能参数和工艺变形参数, 以及影响这些参数的主要因素。然而, 作为实用塑性理论的材料成形力学, 直到 20 世纪 60 年代, 主要的解法仍然是初等解析法, 即传统工程法。此法的基本特点是, 采用近似的平衡方程与近似塑性条件, 并假定正应力在某方向均布、剪应力在某方向线性分布; 然后求解出工件接触面上的应力分布方程。由于方法较简单, 如参数处理得当, 计算结果与实际之间误差常在工程允许范围内, 结果可信, 因此, 今天仍有重要价值。但此种方法的主要缺点是不能研究变形体内部应力与变形分布, 并难以准确地计入材料强化。

另外一种发展较早的变形力学解法是分析理想刚-塑性材料的滑移线法, 该法采用精确平衡方程与塑性条件推导出汉基应力方程, 并按照边界条件与几何性质绘制出塑性流动区内的滑移线场, 借助滑移线场与速端图, 可以确定塑性区内各点的应力分布与流动情况。此法可以有效地解析平面变形问题, 但对轴对称问题及边界形状复杂的三维问题尚有待深入研究。应当指出, 对滑移线场的矩阵算子技术以及边界形状复杂的滑移线场积分方法研究仍是该领

域的研究亮点。

20 世纪 40 年代末与 50 年代初, A. A. 马尔科夫(Марков)与 R. 希尔(Hill)等从数学塑性理论角度, 以完整的形式证明了可变形连续介质力学的极值原理。到 70 年代, 极值原理解析材料成形实际应用已居主导地位。其中, 上界法发展成上界三角形速度场解法与上界连续速度场解法; 三角形速度场解法将变形区设定为由刚性的三角形块组成, 当成形工具具备已知速度时, 刚性块发生相互搓动, 借助速端图, 可以求出变形功率与边界外力; 此法因对变形区处理粗略, 目前已经逐渐被连续速度场解法取代。

上界连续速度场解法是对具体的成形问题设定满足运动许可条件含有待定参量的上界运动许可速度场, 然后计算应变速率场与成形功率, 再用数学方法使成形功率最小化, 进而得到相关力能参数。应当指出: 以张量形式表达与研究极值原理、以场论知识表达与计算速度场、以流函数确定速度场模型及计算机搜索上界最小值等研究仍是该领域目前的研究亮点。本书主要讲授前述工程法、滑移线法与上界法。

随着电子计算机的应用与数值解析技术的发展, 近年来, 材料成形发展的基本解法还包括有限元法、上界元法以及能量法。这些内容将在本专业研究生课程——现代材料成形力学——中讲授, 本书不予介绍。

材料成形力学今后发展的动向应当是: 采用较精确的初始和边界条件(包括接触摩擦条件等)以及反映实际材料流变特性的变形抗力模型, 依靠电子计算机求解精确化的变形力学方程, 并加强对三维流动问题的研究; 研究材料成形工件内部的矢量场(应力、位移和应变分布)和标量场(温度、硬度和晶粒度分布等); 研究材料成形力学中非线性力学与数学问题的线性化解法(塑性功率积分方法线性化、屈服准则线性化等), 以提高材料成形力学的解析性、严密性与科学性。



应力与应变

因为材料成形是材料在外力作用下产生塑性变形的过程，所以必须了解材料成形中工件所受的外力及其在工件内的应力-应变。本章将从材料成形中工件所受的外力和所呈现的现象入手，讲述成形工件内应力-应变状态的分析及其表示方法。这些都是材料成形的力学基础。

1.1 应力

1.1.1 应力状态的基本概念

在一定条件下，要使物体变形，必须施加一定的力，作用于物体上的力有两种类型，即体积力(质量力)及表面力(外力)，它们皆可使物体在一定情况中产生弹性变形或塑性变形。但对大多数成形材料来说，材料成形是由表面力来完成的，体积力与表面力相比较，在成形过程中所起的作用小，故一般略而不计。

(1) 外力

平锤下镦粗时，圆柱体试件受上、下锤头力的作用，从而使其高度减小，断面扩大，如图 1.1(a)所示。

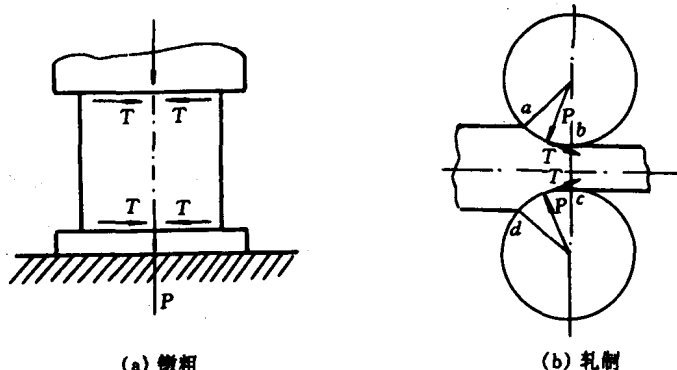


图 1.1 镦粗及轧制时的外力图

锤头力 P 是使柱体产生变形的有效作用力。由于锤头表面在横向上没有运动，而材料与工具接触处是相对运动的，这就产生了阻碍柱体断面扩大的摩擦力。图 1.1(b)所示为平辊间的轧制，轧辊沿径向对轧件施加压力 P ，使其高度减小。为了使轧件能够进入逐渐缩小的辊缝，在轧辊与材料接触表面之间也存在摩擦力，其作用是将轧件曳入两个轧辊之间，以实现轧制过程。

可见,使材料发生变形的表面力有垂直于接触表面的作用力与沿着表面作用的摩擦力。镦粗时,摩擦力妨碍柱体断面的扩大,是无效力;轧制时,摩擦力是实现轧件成形所必需的有力之一。

(2) 应力

变形物体受到外力作用时,内部将出现与外力平衡、抵抗变形的内力,故寻求变形力的平衡条件,不仅有作用于整个物体上外力的平衡条件,而且需要物体每个无穷小单元也处于平衡。变形物体的平衡条件具有微分性质,即意味着研究物体变形时力的情况,还需要了解物体内部的应力情况。内力的强度称为应力。物体内部出现应力,称物体处于应力状态之中。

为了研究应力情况,需要引入变形区的概念。在材料成形时,所谓变形区,是指那些受工具直接作用的金属坯料上正在产生塑性变形的那部分体积。如图 1.1(a)所示,镦粗时,金属整体全部在工具直接作用下发生变形,整块金属都处于变形区内,任意瞬时的变形都遍及全体。轧制则不然,每一瞬时的变形只发生在其纵向上的一小段中,如图 1.1(b)中 $abcd$ 所包围的部分。变形区前面部分变形已完毕,后面部分则尚未经受变形,这些部分又称为刚端。所谓刚端(或外区),是指变形过程的任意瞬时,金属坯料上不发生塑性变形的那部分金属体积。

从变形区内取出一个小体积,如图 1.2(a)所示,当其处于平衡状态时,作用着 $P_1, P_2, P_3, \dots$ 诸力。若截去 B 部分,为了保持与 A 部分的平衡,则截面上一定有一合力 P ,如图 1.2(b)所示,在截面的任一微小面素 ΔF 上,在 P 力方向有 ΔP 力,那么 $\lim_{\Delta F \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\Delta F}$ 定义为面素上的全应力。 ΔP 对 ΔF 而言,可分解为垂直分量(法线分量) ΔN 及切线分量 ΔT ,可得出

$$\sigma = \lim_{\Delta F \rightarrow 0} \frac{\Delta N}{\Delta F}, \quad \tau = \lim_{\Delta F \rightarrow 0} \frac{\Delta T}{\Delta F},$$

式中 σ, τ ——面素 ΔF 上的垂直应力(正应力)及切线应力(切应力)。

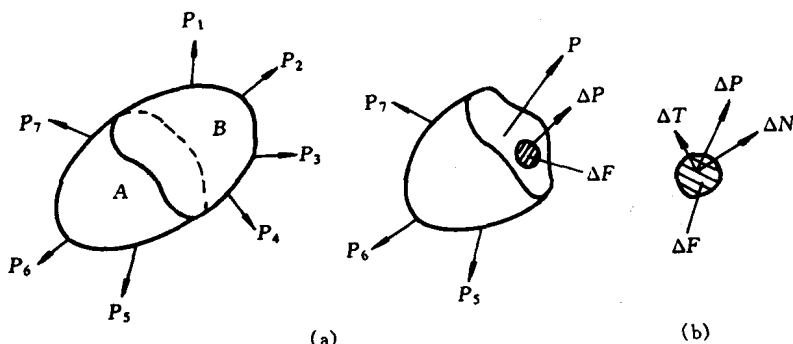


图 1.2 微小面素上作用力

(3) 应力状态

如图 1.3(a)所示,设均匀圆杆的一端固定,另一端受拉力 P 的作用,圆杆的截面积为 F ,则 F 单元面积上的拉应为 $\frac{P}{F}$ 。如图 1.3(b)所示,若垂直拉力轴向断面上的应力不变,由于 $P' = P$,所以该断面上的法线应力 $\sigma = \frac{P}{F}$ 。如图 1.3(c)所示,若所取截面的法线与拉力轴成 θ 角,则拉力的作用在该面上出现的力为 S' ,并且

$$S' = \frac{P}{F/\cos\theta} = \frac{P\cos\theta}{F}.$$

如图 1.3(d)所示, 若将 S' 分解为垂直于该面的法线分量 σ_θ 及作用于该面上的切线分量 τ_θ , 则它们分别为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_\theta &= \frac{P\cos^2\theta}{F} = \sigma\cos^2\theta, \\ \tau_\theta &= \frac{P\cos\theta\sin\theta}{F} = \sigma\cos\theta\sin\theta. \end{aligned} \right\} \quad (1.1)$$

式中 σ_θ ——该面的法线应力(正应力);
 τ_θ ——切线应力(剪应力, 切应力).

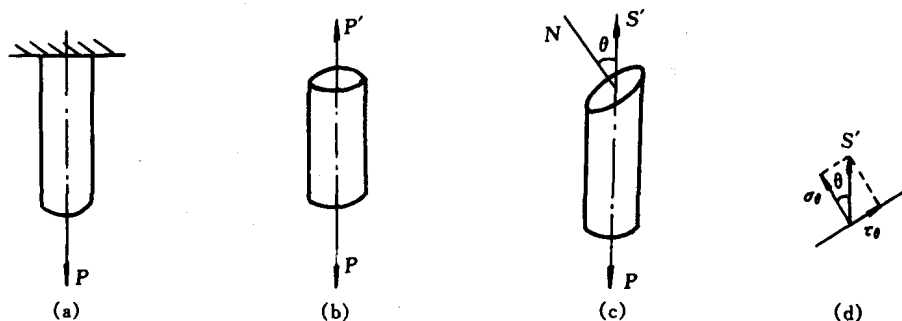


图 1.3 简单拉伸下应力的确定图

由上述两种情况可以看出, 即使物体的力学状态相同, 若所考查的面的位置发生变化, 则应力状态的表示方法也变化. 若以拉伸轴为法线的平面的应力状态 $(\sigma, 0)$ 已知, 则法线与拉伸轴成 θ 角的平面上的应力状态 $(\sigma_\theta, \tau_\theta)$ 与 $(\sigma, 0)$ 之间存在式(1.1)的关系.

1.1.2 点应力状态

要研究物体变形的应力状态, 必须了解物体内任意一点的应力状态, 才可以推断整个变形物体的应力状态.

点的应力状态是指物体内部任意一点附近不同方位上所承受的应力情况.

(1) 一点应力状态的描述方法

在变形区内某点附近取一无限小的单元六面体, 在其每个界面上都作用着一个全应力. 设单元体很小, 可视为一点, 故对称面上的应力是相等的, 只需在 3 个可见的面上画出全应力, 如图 1.4(a)所示. 将全应力按取定坐标轴向进行分解(注意, 这里单元体的 6 个边界面均为与对应的坐标面平行), 每个全应力能分解为一个法向应力(正应力)和两个切向应力, 如图 1.4(b)所示.

σ 表示法线应力, σ_x 为垂直于 x 轴的坐标面 yOz 上的法线应力, σ_y 为垂直于 y 轴的坐标面 xOz 上的法线应力, σ_z 为 xOy 面上的法线应力. 当法线应力的方向与所作用平面的外法线方向一致时, 规定该法线应力为正, 反之为负.

τ 表示切线应力, 在 yOz 面上, 有 τ_{xy} 及 τ_{zx} 分别表示指向 y 及 z 方向的切应力, 对其他面, 也存在 τ_{yx} , τ_{yz} 及 τ_{zx} , τ_{zy} 等.

当切应力所在平面外法线方向与所取坐标轴方向一致, 而且切应力本身所指方向又和与其平行的坐标轴方向一致时, 此切应力为正; 如果其中的一个方向相反, 那么为负; 若两个

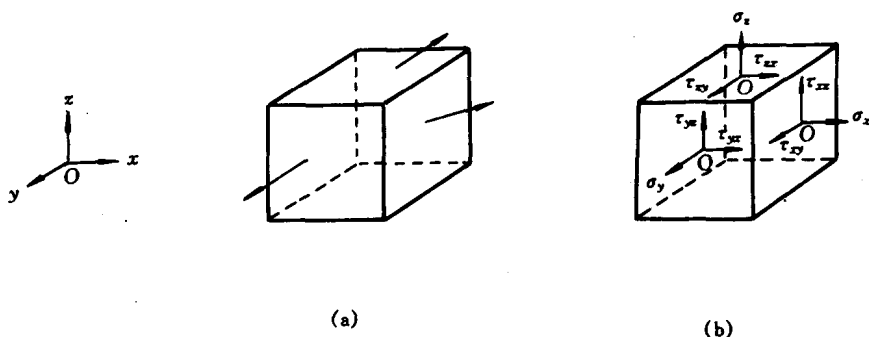


图 1.4 单元六面体应力图

方向皆相反, 亦为正。

例如, 若某点应力状态各分量为: $\sigma_x = 10\text{MPa}$, $\sigma_y = -10\text{MPa}$, $\sigma_z = 0$, $\tau_{xy} = 5\text{MPa}$, $\tau_{yx} = 5\text{MPa}$, $\tau_{yz} = -5\text{MPa}$, $\tau_{zy} = -5\text{MPa}$, $\tau_{zx} = \tau_{xz} = 0$, 则此应力状态如图 1.5 所示。

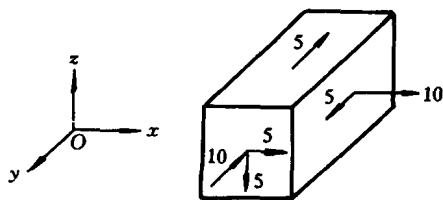


图 1.5 点应力状态分量图

可见, 任意点的应力状态完全可以由 3 个法线应力 σ_x , σ_y , σ_z 及 6 个切线应力 τ_{xy} , τ_{yx} , τ_{yz} , τ_{zy} , τ_{zx} , τ_{xz} 表示, 如图 1.5, 也可用下列对称应力张量来描述

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}.$$

因为上述两种表示方法表示沿相应坐标轴的方向上有无应力分量及应力方向的图形概念, 所以分别命名为应力状态图与应力状态张量。

可以证明, 当小单元体没有转动时, 存在 $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, $\tau_{zx} = \tau_{xz}$, $\tau_{yz} = \tau_{zy}$, 这样, 任意点的应力状态可以用 6 个分量描述

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \cdot & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \cdot & \cdot & \sigma_z \end{bmatrix}.$$

式中 $\cdot$ ——分量与位置对称的分量相等。

(2) 一点应力状态的数学表达式

若在六面体(如图 1.6(a)所示)的一角, 沿微分面 abc 截割, 则得如图 1.6(b)所示的小四面体。为了与 3 个坐标面上的应力平衡, 微分斜面 abc 上应出现全应力 S 。设斜面法线 N 与坐标轴 x , y , z 的夹角为 α_x , α_y , α_z , 且令各夹角的余弦值为

$$\begin{cases} \cos \alpha_x = l, \\ \cos \alpha_y = m, \\ \cos \alpha_z = n. \end{cases}$$

为了简化, 设斜面 abc 的面积为一个单位, 则四面体其他 3 个坐标平面 Oac , Obc , Oab 的面积分别为 l , m , n 。

现求四面体斜面上的应力与另外 3 个坐标平面上应力间的关系式。