参数与参数方程

赵 慈 庚

CANSHU
YU
CANSHU
FANG
CHENG

天 津 人 民 出 版 社

参数与参数方程

赵 慈 庚

天 津 人 民 出 版 社

参数与参数方程

赵 慈 庚

*

天津人民出版社出版

（天津市赤峰道124号）

天津新华印刷二厂印刷　天津市新华书店发行

*

开本787×1092毫米 1/32印张1 5/8 字数29,000

一九八○年七月第一版

一九八○年七月第一次印刷

印数：1—20,000

统一书号：13072·11

定　价：0.14元

数学中的参数有一种活力，它能分解难点，化繁为简．活用参数是解题能力的一种提高．尽管它有时带来一点麻烦，却能从中培养分析问题的能力，好处还是主要的．这个小册子就是从解题能力着想来谈一谈参数．想要较好地运用参数，应当先熟习参数方程．所以我们前半部讨论参数方程，后半部再谈参数的运用．

目　　录

1. 参 数 方 程

大家知道一些曲线的参数方程，例如通过$A(a,b)$点，斜角为α的直线的点斜式参数方程是

$$x=a+\rho cos\alpha,\quad y=b+\rho sin\alpha \qquad (1)$$

其中参数ρ代表直线上由A到动点$P(x,\ y)$的有向距离（图1.1）.又如定比分点的公式

$$x=\frac{x_1+rx_2}{1+r},\quad y=\frac{y_1+ry_2}{1+r} \qquad (2)$$

也可以作为直线的两点式参数方程，其中(x_1,y_1)，(x_2,y_2)是两定点P_1，P_2的坐标，$r=P_1P/PP_2$是P分线段P_1P_2的分比，P_1P，PP_2（图1.2)都是有向线段. 又如圆心在$C(a,b)$半径为r的圆的参数方程是

$$x=a+rcos\theta,\quad y=b+rsin\theta \qquad (3)$$

其中参数θ是动半径CP（图1.3）的斜角.

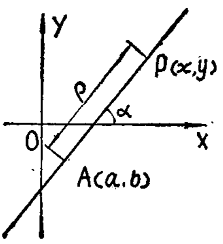

图1.1

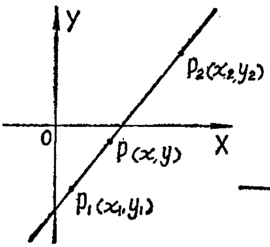

图1.2

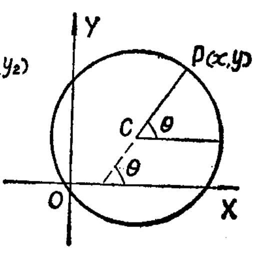

图1.3

对于平面曲线的参数方程，理解参数的几何意义是重要的.比如对于(1)、(2)里的ρ和r的几何意义体会不深，就不能很好地运用这些参数方程.

如何建立轨迹的参数方程，各解析几何书籍都有所论列，这里不必多说. 现在借一个例题看一下如何利用已知的参数方程建立较复杂的轨迹的方程.

例 从椭圆$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$上一点$M(x_1,\ y_1)$向椭圆族（图1.4）

$$b^2x^2+a^2y^2=ka^2b^2,\quad 0\leqslant k<1 \tag{4}$$

的每个椭圆作切线，求切点的轨迹.

解：假设切线的方程是

$$x=x_1+\rho\cos\theta,\quad y=y_1+\rho\sin\theta, \tag{5}$$

对于(4)里的某一个确定的k（即是对于某一个确定的椭圆）来说，(5)里的θ是固定的.现在先求这条切线上的切点. 由(4)、(5)消x、y

$$b^2(x_1+\rho\cos\theta)^2+a^2(y_1+\rho\sin\theta)^2=ka^2b^2.$$

整理成ρ的二次方程

$$(b^2\cos^2\theta+a^2\sin^2\theta)\rho^2+2(b^2x_1\cos\theta+a^2y_1\sin\theta)\rho$$
$$+(b^2x_1{}^2+a^2y_1{}^2-ka^2b^2)=0 \tag{6}$$

因为(5)是(4)的切线，这方程的两根一定相等，而且都等于

$$\rho=-\frac{b^2x_1\cos\theta+a^2y_1\sin\theta}{b^2\cos^2\theta+a^2\sin^2\theta} \tag{7}$$

代入(5)得切点的坐标

$$x=x_1-\frac{(b^2x_1\cos\theta+a^2y_1\sin\theta)\cos\theta}{b^2\cos^2\theta+a^2\sin^2\theta}=\frac{a^2tg\theta(x_1tg\theta-y_1)}{b^2+a^2tg^2\theta} \tag{8}$$

$$y=y_1-\frac{(b^2x_1\cos\theta+a^2y_1\sin\theta)\sin\theta}{b^2\cos^2\theta+a^2\sin^2\theta}=-\frac{b^2(x_1tg\theta-y_1)}{b^2+a^2tg^2\theta}$$

这里已经没有k，即是说这切点坐标的公式适用于(4)中的一切椭圆，也就是说这是所求轨迹的参数方程．剩下的工作就是从这参数方程消θ来求这轨迹的x、y方程．两式相除得

$$\frac{x}{y}=-\frac{a^2}{b^2}tg\theta.$$

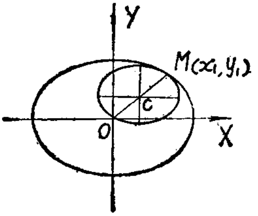

图1.4

由此解得 $tg\theta=-\frac{b^2x}{a^2y}$，代入(8)得

$$x=\frac{a^2\left(\frac{-b^2x}{a^2y}\right)\left(-x_1\frac{b^2x}{a^2y}-y_1\right)}{b^2+a^2\left(-\frac{b^2x}{a^2y}\right)^2}=\frac{x(b^2x_1x+a^2y_1y)}{b^2x^2+a^2y^2}$$

化简得 $\qquad x(b^2x^2+a^2y^2-b^2x_1x-a^2y_1y)=0$

显然(5)对于(4)的切点不能都在y轴上，所以应该抛去$x=0$，剩下的是

$$b^2x^2+a^2y^2-b^2x_1x-a^2y_1y=0$$

再将它变作

$$b^2\left(x-\frac{x_1}{2}\right)^2+a^2\left(y-\frac{y_1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}a^2b^2$$

便知道这轨迹是中心在$C\left(\frac{x_1}{2},\ \frac{y_1}{2}\right)$点，与椭圆$b^2x^2+a^2y^2$

$=a^2b^2$位似的椭圆，位似心是M，位似比是$\frac{1}{2}$. 这椭圆通过M和原点.

现在回顾一下我们的解法.既然椭圆(4)因k而变，那么切点的坐标也应该随着k变化，于是轨迹的参数方程应该以k为参数.这样来解就该借$y-y_1=m(x-x_1)$与(4)相切来确定m，然后求x、y，只是过程太复杂.我们放弃这条道路而采用(5)，就是为的使$cos\theta$与$sin\theta$分担纠缠在k上的关系.然而这时出现了k，ρ，θ三个参数，好象也麻烦了些.其实三个参数之间有对应关系，尤其ρ和θ是一对一地对应着的；因此在(6)式中采取了放弃k而只保留ρ、θ的道路.

曲线的参数方程，本质上只能有一个参数.参数多于一个时，它们之间必定另有约束条件，即是它们要满足某些方程；每多一个参数，要添一个约束条件.现在用ρ、θ代替k，就比原来多了一个参数，ρ与θ之间必须有一个约束条件. 这条件产生于(6)的两根相等.即是由(6)推出来的(7).所以下边才借(7)消ρ而求轨迹的参数方程.

习题1.1 已知a、b是满足$ab\neq 0$及$a^2\neq b^2$的常数. θ、φ是满足$atg\theta\pm btg\varphi=0$的参数. 试证

$$\begin{cases} x=asin^2\theta+bcos^2\theta \\ y=bsin^2\varphi+acos^2\varphi \end{cases}$$

的轨迹是通过原点的等轴双曲线.

提示：由两方程求$tg^2\theta$、$tg^2\varphi$.
再注意$a^2tg^2\theta-b^2tg^2\varphi=0$.

习题1.2 x轴交圆$x^2+y^2=a^2$于A. $P'(x',y')$是抛物线

$y^2=2px$上的动点.在圆上取弧$AB=x'$，在OB的延长线上取$BP=y'$.试证P的轨迹的极坐标方程是$(\rho-a)^2=2a\rho\theta$.这曲线叫做抛物螺线.

习题1.3 椭圆的参数方程

$$x=a\cos\varphi,\quad y=b\sin\varphi \tag{9}$$

中，参数φ叫做这椭圆的离心角.设A、B是对应于φ、φ'的两点.求证割线AB的方程是

$$\frac{x}{a}\cos\frac{\varphi+\varphi'}{2}+\frac{y}{b}\sin\frac{\varphi+\varphi'}{2}=\cos\frac{\varphi-\varphi'}{2}.$$

然后求切点为A的切线的方程.

习题1.4 如果知道定圆内接最大三角形是正三角形.问椭圆(9)的内接三角形何时面积最大?

提示：设椭圆(9)的内接三角形三顶点对应的参数值是φ_1，φ_2，φ_3，试证这三角形的面积是

$$2ab\sin\frac{\varphi_2-\varphi_3}{2}\sin\frac{\varphi_3-\varphi_1}{2}\sin\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2}.$$

习题1.5 OA为定圆的直径，动弦OP_1交A点上的切线于B. 过P_1和B分别作OA的垂线与平行线. 求这两线的交点P的轨迹（图1.5）

提示：取直线OA为y轴，O为原点，$\theta=\angle MOP_1$为参数.

答：参数方程为$x=2a\operatorname{ctg}\theta$，$y=2a\sin^2\theta$，$x$、$y$方程为$x^2y=4a^2(2a-y)$.曲线叫做箕舌线.

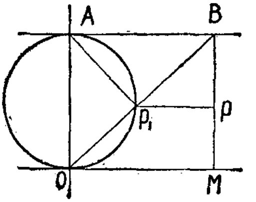

图1.5

习题1.6 图1.6中$OA=OB=2a$，$BC/\!/OA$，OC交BC于C，$AD\perp OC$于D，$CQ\perp OA$于Q，过D作直线平行于OA，交CQ于P. 求P的轨迹的方程.

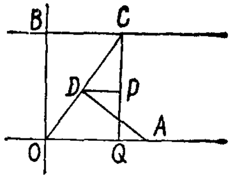

图1.6

提示： 以$t=\angle COB$为参数.

答：$x=2a\operatorname{tg}t$，$y=a\sin 2t$.

2. 变相的参数方程

有一类问题，看来不象属于参数方程的范畴，而实质是参数方程的问题.

例1. 假设k是参数，求两直线族

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=k, \qquad \frac{x}{a}-\frac{y}{b}=\frac{1}{k} \qquad (1)$$

中对应于同一个k值的两条直线的交点的轨迹.

一般一些，有两族曲线，它们的方程共用一个参数，求对应曲线的交点的轨迹. 关于这样的问题，许多解析几何的书只说，从两族曲线的方程消去参数，结果就是所求轨迹的方程. 照这样来说，本例的解法便是下边这样的.

解： 将所给两方程左右两端分别相乘，消去k，得

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (2)$$

这就是所求轨迹的方程. 轨迹是双曲线.

这解法有些使人莫名其妙.实际这是参数方程. 本来我们应该先把对应线的交点求出来：

$$x=\frac{a}{2}\left(k+\frac{1}{k}\right), \quad y=\frac{b}{2}\left(k-\frac{1}{k}\right) \qquad (3)$$

这就是所求轨迹的参数方程. 为了求x、y方程而消参数k的

话，可以照下边这样进行：

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2=\frac{1}{4}\left(k+\frac{1}{k}\right)^2,\quad \left(\frac{y}{b}\right)^2=\frac{1}{4}\left(k-\frac{1}{k}\right)^2 \quad (4)$$

两式相减即得（2）．这就严格证明了（2）是所求轨迹的方程．懂得了这一点理论，也就很容易说明最初给出的解法是合理的．怎见得呢？（4）中两式相减，得

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{y}{b}\right)^2=\frac{1}{4}\left\{\left(k+\frac{1}{k}\right)^2-\left(k-\frac{1}{k}\right)^2\right\}$$

两端都析因式

$$\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left\{\left(k+\frac{1}{k}\right)+\left(k-\frac{1}{k}\right)\right\}\left\{\left(k+\frac{1}{k}\right)-\left(k-\frac{1}{k}\right)\right\}$$

右端化简就是$k\cdot\frac{1}{k}$．这恰好是（1）中两等式左右两端各相乘．

方程组（3）与方程组（1）是等价的，即是说两组方程可以互相推导，所以不论从哪组方程消k，结果一定相同．明白了这一点理论就知道与其从（3）消k，不如早些动手——从（1）消k．

例2． 两直线分别通过$A(a,\ 0)$、$B(-a,\ 0)$两点，它们在y轴上的截距b、b'的乘积等于常数a^2．求两直线交点的轨迹．

解：因为$bb'>0$，b、b'必定符号相同．按截距式写出两直线AC，BD（图2.1）的方程

$$\left.\begin{aligned}&\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1\\&\frac{x}{-a}+\frac{y}{b'}=1\end{aligned}\right\}\qquad(5)$$

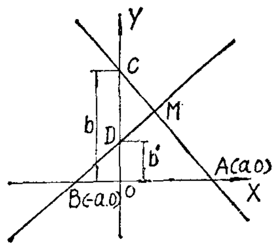

图2.1

把（5）改写为

$$\frac{y}{b}=1-\frac{x}{a},\ \frac{y}{b'}=1+\frac{x}{a}$$

两式左右两端各相乘，再将bb'换作a^2，化简得

$$x^2+y^2=a^2.$$

这里有两个参数b、b'，由于它们必须满足$bb'=a^2$，有一个不能自由取值，效果上只抵一个参数．理论上应当先从（5）解得交点

$$x=\frac{a(b-b')}{b+b'},\quad y=\frac{2bb'}{b+b'}\qquad(6)$$

这是所求轨迹的参数方程；然后借$bb'=a^2$消去b与b'：

$$x^2=\frac{a^2(b-b')^2}{(b+b')^2},\quad y^2=\frac{4(bb')^2}{(b+b')^2}=\frac{a^2\cdot 4bb'}{(b+b')^2}$$

相加化简得$x^2+y^2=a^2$.

（6）与（5）等价，从（6）消b、b'和从（5）消b、b'是一样的，只是动手有先后．

从$bb'=a^2$知道（5）中两直线互相垂直．这两直线分别通过A、B两个定点，显然交点的轨迹是圆（以AB为直径）．

但是现在 b、b' 都不能等于零．所以(5)里不包含 $y=0$，$x=a$ 和 $y=0$，$x=-a$ 两双直线．因而应当去掉圆上的 A、B 两点．

例3． 已知 $P(x, y)$ 是圆 $x^2+y^2=4$ 上的动点．另有定点 $Q(4, 0)$．求线段 PQ 的中点 R 的轨迹（北京市1978年数学竞赛第一试试题）．

解： 设 R（图2.2）的坐标是（x'，y'），那么

$$\left.\begin{aligned} x' &= \frac{x+4}{2} \\ y' &= \frac{y+0}{2} \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

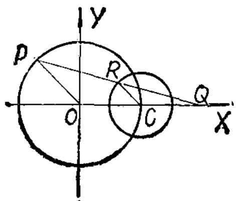

图2.2

由此

$$x = 2x' - 4, \quad y = 2y' \qquad (8)$$

代入已知的方程 $x^2+y^2=4$，化简，去掉 x'、y' 的撇号，得所求方程

$$(x-2)^2+y^2=1.$$

每个初学的人看到这种解法都叹服它的巧妙，同时觉得自己想不到这里．这奥妙最好用参数方程解释．其实(7)就是所求轨迹的参数方程，其中有两个参数 x 和 y，这两个参数满足约束条件 $x^2+y^2=4$．应该借这条件消去(7)中的 x、y 来求轨迹的普通方程．要做的工作就是从(7)和 $x^2+y^2=4$ 消去 x、y．这说明了为什么将(8)代入 $x^2+y^2=4$ 便能得到最后的结果．

这问题的内容在几何里是位似变换．位似心是定点 Q

（4，0），位似比是$\frac{1}{2}$.所得的位似形是圆心在$C(2，0)$半径为1的圆．凡当给定了一条曲线K和一个不在K上的定点Q（x_0，y_0），以Q为位似心，按指定的位似比来变换K时，都可以这样解决．如果K的方程是$F(x，y)=0$，

$\frac{QR}{QP}=r$；由此$\frac{RP}{PQ}=r-1$，

$$x=\frac{x'+(r-1)x_0}{r},\quad y=\frac{y'+(r-1)y_0}{r}$$

所求位似曲线的方程是

$$F\left(\frac{x'+(r-1)x_0}{r},\ \frac{y'+(r-1)y_0}{r}\right)=0.$$

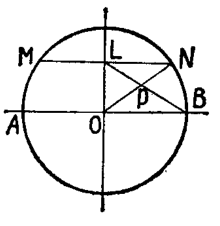

图2.3

习题2.1 AB是定圆O内的定直径．弦$MN/\!/AB$．L是MN的中点(图2.3).求ON与BL的交点P的轨迹．

答：$y^2=a^2-2ax$，其中a是$\odot O$的半径．

习题2.2 从抛物线的顶点向切线作垂线，求垂足的轨迹．

提示： 抛物线$y^2=2px$的切线的斜率为t时，切线的方程是$y=tx+\frac{p}{2t}$.

答：　　尖点蔓叶线 $y^2\left(x+\frac{1}{2}p\right)=-x^3$.

习题2.3　从等轴双曲线的中心作切线的垂线，试证垂足的轨迹是双纽线.

习题2.4　从原点向圆 $x^2+y^2+2ax+a^2-b^2=0$ 的切线作垂线，试证垂足的轨迹是蜗线

$$(x^2+y^2+ax)^2=b^2(x^2+y^2).$$

习题2.5　从原点向抛物线 $y^2+4ax+4a^2=0$ 的切线作垂线.试证垂足的轨迹是结绳线

$$y^2=x^2\cdot\frac{a+x}{a-x}.$$

习题2.6　借变相的参数方程解§1的例题.

提示：假设通过 $M(x_1,\ y_1)$ 的直线切椭圆

$$b^2x^2+a^2y^2=ka^2b^2$$

于 $T(x',\ y')$.那么

$$b^2x'^2+a^2y'^2=ka^2b^2 \tag{9}$$

切线的方程可以写作 $b^2x'x+a^2y'y=ka^2b^2$.因为这直线通过 $M(x_1,\ y_1)$，所以

$$b^2x'x_1+a^2y'y_1=ka^2b^2 \tag{10}$$

(9)、(10)两式相减，然后配平方得

$$b^2\left(x'-\frac{1}{2}x_1\right)^2+a^2\left(y'-\frac{1}{2}y_1\right)^2=\frac{1}{4}a^2b^2.$$