递推式

陈永明 编

上海科学技术出版社

递推式

陈永明 编

上海科学技术出版社

内 容 提 要

这是一本介绍递推式及循环数列的书籍。主要内容有：递推式的意义；从递推式求数列的通项公式；从递推式求数列的部分和；从递推式研究数列的单调性和有界性；从递推式求数列的极限。在最后两章中，分析了不少例题，特别是详细分析了我国高考中出现的关于递推式的试题。

本书可供高中学生及中学数学教师作教学参考书，此外，还可供理工科大学低年级学生学习参考。

责任编辑　沈鲲龄

递 推 式

陈永明　编

上海科学技术出版社出版

（上海瑞金二路 450 号）

新华书店上海发行所发行　上海东方印刷厂印刷

开本 787×1092　1/32　印张 6.5　字数 139,000

1989年7月第1版　1989年7月第1次印刷

印数 1— 5.000

ISBN 7-5323-1005-1/O·113

定价：2.80元

前　言

随着电子计算机的出现，迭代算法越来越显示出它的威力，与迭代算法密切相关的递推式当然就显得身价百倍了。

近几年来，高考试题中多次出现了有关递推式的题目。但是，由于高中课本中并没有讲到这一内容，这就使中学师生颇感困难，中学的数学老师和高中学生很需要这方面的参考资料。可惜的是，除了一鳞半爪的材料之外，完整叙述递推式知识的书籍至今还没有出现在我国的书店里。为了满足中学师生及大学生学习的需要，笔者写出了这本书，将它奉献给读者，希望对迫切需要了解递推式知识的同志们有所帮助。

本书主要阐述从递推式求数列的通项、部分和、极限等等。书中有丰富的例题和习题，这些例题和习题有不少取材于日本各大学入学考试的试题，因为数量颇多，不予一一指明，至于其余国家的高考或竞赛试题，书中都作了说明，特别对于我国的高考题，则是专列一章予以解答。

在本书编写过程中，曾得到我的老师林炎生副教授的帮助，在此表示感谢。

由于笔者水平有限，书中不免有不少缺点，敬请专家们和广大读者提出宝贵意见。

陈永明

1987 年 7 月

目　录

第一章　递推式的意义

第一节　递推式和数列的归纳定义

在高中课本中，曾经遇到过等差数列和等比数列。在那里，等差数列是这样定义的：如果一个数列从第2项起，每一项与它前一项的差等于同一个常数，这个数列就叫做等差数列，这个常数叫做等差数列的公差。

设等差数列为

$$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$$

如果它的首项 a_1 等于 a，公差用 d 来表示，根据上面的定义，有

$$\begin{aligned} a_1 &= a, \\ a_2 &= a_1 + d, \\ a_3 &= a_2 + d, \\ &\cdots\cdots \\ a_{n+1} &= a_n + d, \\ &\cdots\cdots \end{aligned}$$

这些式子，可以归结为下面的式子：

$$\begin{cases} a_1 = a, \\ a_{n+1} = a_n + d \quad (n = 1, 2, 3, \cdots). \end{cases} \tag{1}$$

由定义，可以推导出等差数列的通项公式是

$$a_n = a + (n-1)d. \tag{2}$$

只要给定了 a(首项)和 d (公差)，我们可以根据通项公式 (2) 来确定该等差数列的任何一项，这一点，我们都已知

道。其实，我们也可以根据(1)式确定数列的各项。事实上，在(1)式中，令 $n=1$，就得到

$$a_2=a_1+d=a+d;$$

再令 $n=2$，就可得到

$$a_3=a_2+d=(a+d)+d=a+2d;$$

令 $n=3$，又可得到

$$a_4=a_3+d=(a+2d)+d=a+3d,$$

$$\cdots\cdots$$

$$\begin{aligned}a_n=a_{n-1}+d&=[a+(n-2)d]+d\\&=a+(n-1)d,\end{aligned}$$

$$\cdots\cdots.$$

通项公式(2)的特点是可以直接算出随意指定的项的值。譬如，计算第 100 项，只需在(2)式中令 $n=100$，立得

$$a_{100}=a+99d.$$

而用(1)式来计算 a_{100}，则必须先算出第 2 项，而后算 a_3，a_4，…，以至 a_{99}，最后才能算出所需的第 100 项 a_{100} 的值。正是由于这种算法的特点是"一个接着一个依次算出的"，所以，我们把(1)式中的

$$a_{n+1}=a_n+d\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

叫做递推式。光有这个递推式还不行，还必须知道首项 a_1 的值，它是递推的起点。我们把(1)式中的

$$a_1=a$$

叫做初始值。

由于(1)式和(2)式都可以确定等差数列，所以都可以作为等差数列的定义。高中教科书里的等差数列实质上就是利用(1)式定义的，也就是用递推式和初始值来定义的。数列的这种定义方式叫数列的归纳定义。

高中课本中，等比数列的定义是：如果一个数列从第二项起，每一项与它前一项的比等于同一个常数，这个数列叫做等比数列，这个常数叫做等比数列的公比。如果设等比数列的首项 a_1 等于 a，公比是 q，那末，上面的定义相当于

$$\begin{cases} a_1 = a, \\ a_{n+1} = a_n q \quad (n = 1, 2, 3, \cdots). \end{cases} \tag{3}$$

不难看出，这也是归纳定义。

应该指出，(1)式和下列的(4)式

$$\begin{cases} a_1 = a, \\ a_n = a_{n-1} + d \quad (n = 2, 3, 4, \cdots) \end{cases} \tag{4}$$

是等价的。尽管(1)式和(4)式的递推式表面上看起来是不一样的，但是在(1)式中，若令 $n=1$，就可以算出 a_2，而在(4)式中，只要令 $n=2$，也同样可以算出 a_2，所以，它们本质上并没有差别。

同样地，(3)式和下面的(5)式

$$\begin{cases} a_1 = a, \\ a_n = a_{n-1} q \quad (n = 2, 3, 4, \cdots) \end{cases} \tag{5}$$

也是等价的。

一般地，用

$$\begin{cases} a_1 = a, \\ a_{n+1} = f(a_n) \quad (n = 1, 2, 3, \cdots) \end{cases}$$

确定的数列 $\{a_n\}$，和用

$$\begin{cases} a_1 = a, \\ a_n = f(a_{n-1}) \quad (n = 2, 3, 4, \cdots) \end{cases}$$

确定的数列 $\{a_n\}$ 是完全相同的。

我们有时会遇到更复杂的递推式。例如，

$$a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots) \tag{6}$$

就是一个较复杂的递推式。在(6)式中，令 $n=1$，得

$$a_3=3a_2-2a_1,$$

令 $n=2$，

$$a_4=3a_3-2a_2,$$

$$\cdots\cdots$$

这个递推式的特点是，必须给出第 n、$n+1$ 项两项的值，才能得到第 $n+2$ 项的值．与这个递推式相适应，必须给出两个初始值 a_1 和 a_2，才能递推出各项的值。

用归纳方式定义的数列又称为循环数列．用(1)式定义的等差数列，用(3)式定义的等比数列，它们的递推式都涉及了相邻两项，可以写成

$$a_{n+1}=f(a_n)\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

的形式，这种数列叫做一阶循环数列；而上面这个例子中的递推式(6)，是连接相邻三项的递推式，其结构呈

$$a_{n+2}=f(a_n,\ a_{n+1})\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

的形式，这样的数列称为二阶循环数列。一般地，用 k 个初始值和下列连接相邻 $k+1$ 项的递推式

$$a_{n+k}=f(a_n,\ a_{n+1},\ \cdots,\ a_{n+k-1})\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

定义的数列，叫做 k 阶循环数列。

例 1 指出由下列各式定义的数列是几阶循环数列，并求出其前 5 项的值：

(1) $a_1=5,\ a_{n+1}=a_n-3\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$；

(2) $a_1=2,\ a_2=3,\ a_{n+2}=a_n+a_{n+1}$
$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$。

解 (1) 这是一个一阶循环数列，其前 5 项的值是：

$$5,\ 2,\ -1,\ -4,\ -7.$$

(2) 这是一个二阶循环数列，其前 5 项的值是：

$$2,3,5,8,13.$$

习题一

1．写出由 $a_1=2$, $a_{n+1}=a_n\cdot n$ 决定的数列的前五项。

第二节　几个著名的例子

尽管利用通项公式可以方便地计算出随意指定的项的值，但有时从实际问题中寻找规律时，利用归纳方式更为容易些，并且更适合于计算机来进行计算。所以，通项公式和归纳方式这两种定义数列的方法各有其优点。

本节中将举出几个著名的例子，读者可以从中体会出归纳方式在寻求规律方面的优点。

例1（平面的分割问题） 平面上有 n 条直线，任两条不平行，任三条不共点。试回答下列各问题：(1)共有几个交点；(2)设 k 条直线将平面分成 $f(k)$ 个部份，求 $f(k-1)$ 和 $f(k)$ 的关系($2\leqslant k\leqslant n$)；(3)求 $f(n)$ 的表达式。

分析 第(1)小题是容易解决的。但本题的最终目的是第(3)小题，即求平面被割成的块数。直接求第(3)小题中的 $f(n)$ 是会有些困难的，但第(2)小题将有助于问题的解决。

画一条直线，将平面分成2个部份；画两条直线，将平面分成4个部份，比刚才多了2个部份；画第三条直线，它与先画的两条直线都相交，并且不共点，所以，第三条直线必定被分成三段。与此相应地，平面被分割成的块数将增加3块；再画第四条直线，它与先画的三条直线形成三个交点，第四条直线被这三个交点分成四段，相应地，平面被分割的块数又将增加4块；如此等等。

由上述可知，有

$$f(1)=2,$$

$$f(2)=f(1)+2,$$

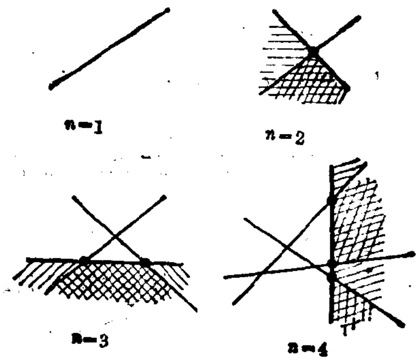


图 1-2-1

$$f(3)=f(2)+3,$$
$$f(4)=f(3)+4,$$
$$\cdots\cdots,$$

这样，容易推出 $f(k)$ 和 $f(k+1)$ 的关系来。

解 (1) 因为 n 条直线的任两条不平行，任三条不共点，所以，每两条直线必有一个交点。由此，n 条直线的交点总个数为

$$C_n^2=\frac{n(n-1)}{2}.$$

(2) 设 $k-1$ 条直线将平面分成 $f(k-1)$ 个部份。再画第 k 条直线，它与前面画的 $k-1$ 条直线应有 $k-1$ 个交点。这 $k-1$ 个交点将第 k 条直线分成 k 段，相应地，平面被分割的块数将增加 k 块。所以，

$$f(k)=f(k-1)+k \quad (2\leqslant k\leqslant n). \tag{1}$$

(3) 显然，

$$f(1)=2;$$

将 $k=2, 3, \cdots, n$ 代入(1)式，得

$$f(2)=f(1)+2,$$
$$f(3)=f(2)+3,$$
$$\cdots\cdots$$
$$f(n-1)=f(n-2)+n-1,$$
$$f(n)=f(n-1)+n.$$

将上面这些式子相加，得

$$\begin{aligned}f(n)&=f(1)+[2+3+4+\cdots+(n-1)+n]\\&=2+\frac{(n+2)(n-1)}{2}\\&=\frac{1}{2}(n^2+n+2).\end{aligned}$$

例 2(菲波那契数列) 有一对小兔，过一个月之后长成大兔，到第三个月就可以生下一对小兔，并且以后每月生下一对小兔，而所生的小兔，也同样到第二个月长成大兔，到第三个月生下一对小兔，以后也每月生下一对小兔。假设所有兔子一年内均不死亡，问一年后共有几对兔子？

分析 设每月兔子的对数为

$$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$$

本题即求其中的第 13 项 a_{13}。

显然：

$$a_1=1;$$

一个月之后，这对小兔长成了大兔，故

$$a_2=1;$$

到第三个月，这对大兔生下了一对小兔，所以

$$a_3=2,$$

注意，其中有一对大兔，一对小兔；到第四个月，一对小兔长成大兔，而一对大兔又生下一对小兔，所以共有 3 对，即

$$a_4=3,$$

其中有两对是大兔，一对是小兔。a_4 比起 a_3 来多了 1。这 1 对兔子是怎么会增加出来的呢？这是因为 $a_3(=2)$ 中有一对是大兔，牠们生下了一对小兔的缘故。可见，研究从某个月到它后面的一个月增加了几对兔子，只要观察某一个月中有几对大兔就可以了，而某一个月中大兔的对数就等于前面一个月的兔子总对数。以 a_2，a_3，a_4 为例，a_4 由两部份构成：大兔对数和小兔对数。其中，大兔对数就是 a_3，小兔对数（即增加的兔子对数）就是 a_3 中的大兔对数，也就是 a_2。所以，

$$a_4=a_2+a_3.$$

一般地，有

$$a_n=a_{n-1}+a_{n-2}\quad(n=3,\ 4,\ \cdots).$$

解

$$a_1=1,\ a_2=1,$$

$$a_3=a_1+a_2=2,\ a_4=a_2+a_3=3,$$

$$a_5=a_3+a_4=5,\ a_6=a_4+a_5=8,$$

$$a_7=a_5+a_6=13,\ a_8=a_6+a_7=21,$$

$$a_9=a_7+a_8=34,\ a_{10}=a_8+a_9=55,$$

$$a_{11}=a_9+a_{10}=89,\ a_{12}=a_{10}+a_{11}=144,$$

$$a_{13}=a_{11}+a_{12}=233.$$

所以，一年之后，共有 233 对兔子。

这个问题是中世纪意大利数学家莱昂纳多·菲波那契首先提出的，所以被称为菲波那契问题。问题中所涉及的数列

$$1,1,2,3,5,8,13,21,\cdots$$

称为菲波那契数列。

例 3（“世界末日”问题） 在一块平板上竖起三根柱子 A，B，C，另外，有 n 片大小不同的、中间开着小孔的圆片。开始时，如图 1-2-2 那样，把这些圆片套在 A 柱上，大的在下面，

小的在上面。

现在，按下列规则将圆片从这根柱上移到另一根柱上：

(a) 一次只能移动一片；

(b) 不许把大圆片叠在小圆片上。

设把A柱上的n片圆片全部移到C柱所需的最少次数为a_n。试回答：(1) a_1，a_2，a_3是多少？(2) a_n和a_{n-1}间有怎样的关系？(3)求a_n。

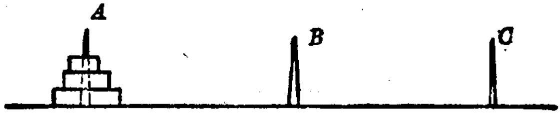


图 1-2-2

解 (1) 显然，当A柱上只有一片圆片时，只需移动一次，就可以将它移到C柱。所以

$$a_1=1.$$

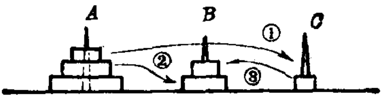
当A柱上有两片圆片时，必须利用B柱作过渡，即先将第一片移到B柱，再将第二片移到C柱，最后将B柱上的小圆片移到C柱上。这样，A柱上的两片圆片就转移到了C柱上，并且小片压在大片上。因此，

$$a_2=3.$$

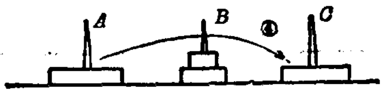
当A柱上有三片圆片时，应该怎样考虑呢？由于必须一片一片移动，大的又不许压在小的上面，所以，想要移动A柱上最底下的一片圆片，也就是第三片圆片，就必须将第一、二片圆片先搬到某一根柱上（当然是搬到B柱上比较恰当，注意，这需要用$a_2=3$次），这样一来，就可以将第三片圆片从A柱上移到C柱上（这样又是1次）。最后，将B柱上的两片圆片通过A柱过渡移到C柱上（这样又要$a_2=3$次）。所以，一共

要 7 次，即

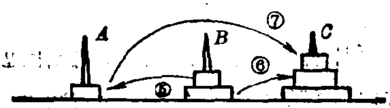
$$a_3=2a_2+1=7.$$



(a) 将第一、二片移到 B 柱上(3 次)



(b) 将第三片移到 C 柱上(1 次)



(c) 将第一、二片从 B 柱上移到 C 柱上(3 次)

图 1-2-3

(2) 从第(1)小题的讨论中，不难知道 a_n 与 a_{n-1} 间的关系应是

$$a_n=2a_{n-1}+1.$$

(3) 因为

$$a_n=2a_{n-1}+1,$$
$$a_{n-1}=2a_{n-2}+1,$$

两式相减，得

$$a_n-a_{n-1}=2(a_{n-1}-a_{n-2});$$

同理，有

$$a_{n-1}-a_{n-2}=2(a_{n-2}-a_{n-3}),$$
$$a_{n-2}-a_{n-3}=2(a_{n-3}-a_{n-4}),$$
$$\cdots\cdots$$
$$a_3-a_2=2(a_2-a_1),$$

把以上$(n-2)$个式子相乘，得

$$a_n-a_{n-1}=2^{n-2}(a_2-a_1).$$

又因

$$a_1=1,\ a_2=3,$$

所以，

$$a_n-a_{n-1}=2^{n-1}.$$

同理可得：

$$a_{n-1}-a_{n-2}=2^{n-2},$$
$$a_{n-2}-a_{n-3}=2^{n-3},$$
$$\cdots\cdots$$
$$a_2-a_1=2.$$

把这$(n-1)$个式子相加，得

$$a_n-a_1=2+2^2+\cdots+2^{n-1}.$$

即

$$a_n=1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}=2^n-1.$$

印度有一个古老的传说．相传在佛教圣地贝那勒斯的一个寺庙里有一块黄铜板，板上插着三根宝石针，第一根针上套着64片大小不等的金片，大的在底下，小的在上面。相传这是神在创世时留在那里的。不论白天黑夜，寺内都有一个僧人按照例3中所说的法则移动金片。神预言，当这64片金片都移到另一个针上时，世界末日就来临了。