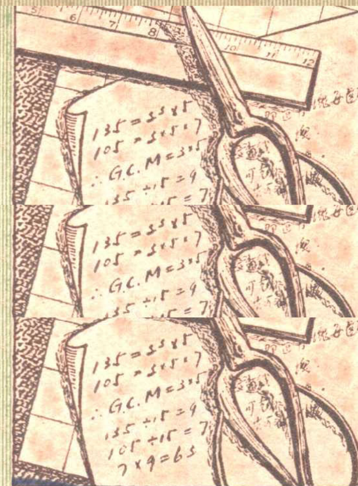
開明青年叢書



因數和因式

劉薰宇著

目　　次

一 因 數

1. 【自然數列】 假若我們把 0 也作爲一個數看，那末，從 0 起，依次加 1 上去，就可以得出有頭無尾的一串數：

0,1,2,3,4,……10,……20……100,……1000,……這一串數就叫做**自然數列**.

2. 【約數和倍數】 在自然數列中，如 2,3,4,6 都可以除盡 12，我們就說 2,3,4,6 是 12 的**約數**. 反過來，12 就叫做 2,3,4,6 的**倍數**.

一般地說，甲數能除得盡乙數，甲數就是乙數的約數，而乙數就是甲數的倍數，如 11 能除得盡 143，11 就是 143 的約數，而 143 就是 11 的倍數.

在這點，我們應當注意自然數列中：

(1) 1 是任何數的約數，因爲用它除什麼數都可以除盡.

(2) 0 是任何數的倍數，因爲除 0 自己以外，什麼數去除 0 就得 0，並沒有餘數，就是除得盡.

3. 【倍數的基本性質】 關於倍數，我們很容易推得下面的兩個性質：

45 是 5 的倍數，25 也是 5 的倍數.

$$45+25=70 \text{ 和 } 45-25=20,$$

我們知道 70 和 20 也是 5 的倍數. 這就是說:

一個數的幾個倍數的和或兩個倍數的差,還是它的倍數.

這是可以從乘法的分配定律說明的.

因爲 $45=9\times5$ 和 $25=5\times5$,

所以 $45+25=9\times5+5\times5=(9+5)\times5=14\times5$,

和 $45-25=9\times5-5\times5=(9-5)\times5=4\times5$.

45 是 5 的倍數,18 不是 5 的倍數.

$$45+18=63 \text{ 和 } 45-18=27,$$

我們知道 63 和 27 都不是 5 的倍數. 這就是說:

一個數的倍數加上或減去一個不是它的倍數的數,結果就不是它的倍數.

因爲由前一個性質,若 $45+18=63$ 和 $45-18=27$,63 和 27 都是 5 的倍數,則 $63-45=18$ 和 $45-27=18$,都應當是 5 的倍數,但這和我們提出的條件 18 不是 5 的倍數是矛盾的.

4.【2 的倍數】 用 2 除得盡的數叫做偶數,用 2 除不盡的數叫做奇數. 在自然數列中,奇數同着偶數是相互交替的. 1 是奇數,2 是偶數,3 是奇數,4 是偶數……. 由此我們把 0 看成偶數.

20 是 2 個 10 的和,150 是 15 個 10 的和. 但 10 是 2 的倍數,所以 20 和 150 都是 2 的倍數. 這就是說:

末位是 0 的數都是 2 的倍數.

$$34=30+4 \text{ 和 } 256=250+6.$$

兩個式子右邊的第一個數都是 2 的倍數,而第二個數也是 2 的倍數,所以它們的和也是 2 的倍數. 這就是說:

末位是偶數的數都是 2 的倍數.

反過來,$187=180+7$,第一個數是 2 的倍數,而第二個數卻不是 2 的倍數,所以 187 便不是 2 的倍數. 這就是說:

末位是奇數的數都不是 2 的倍數.

5. 【4 的倍數】 $100=25\times 4$,100 是 4 的倍數. $1300=13\times 100$,就是 13 個 100,也就是 13 個 4 的倍數的和,所以也是 4 的倍數. 這就是說:

末兩位是 0 的數都是 4 的倍數.

$$3124=3100+24 \text{ 和 } 2576=2500+76.$$

兩個式子右邊的第一個數都是 4 的倍數,第二個數 24 和 76 也是 4 的倍數. 所以它們的和 3124 和 2576 也是 4 的倍數. 這就是說:

末兩位是 4 的倍數的數都是 4 的倍數.

相反地,**末兩位不是 4 的倍數的數也不是 4 的倍數.**

同樣地,我們還可以推得:

末三位是 0 或 8 的倍數的數都是 8 的倍數.

相反地,**末三位不是 8 的倍數的數都不是 8 的倍數.**

6. 【5 和 10 的倍數】 末位是 0 的數都可以看成是若干個 10 的和. 30 是 3 個 10 的和,170 是 17 個 10 的和. 但 10 是 5 和 10 的倍數. 這就是說:

末位是 0 的數都是 5 和 10 的倍數.

$$45=40+5 \text{ 和 } 1035=1030+5.$$

兩個式子右邊的第一個數都是 5 的倍數,第二個數 5 也是 5 的倍數. 所以它們的和 45 和 1035 都是 5 的倍數. 這就是說:

末位是 0 或 5 的數都是 5 的倍數.

相反地,**末位不是 0 或 5 的數都不是 5 的倍數.**

同樣地,我們還可以推得:

末二位是 0 或 25,50,75 的數都是 25 的倍數.

末三位是 0 或 125,250,375,500,625,750,875 (125 的倍數)的數都是 125 的倍數.

7.【3 和 9 的倍數】 我們先注意一下:

$$9\div3=3, \qquad 9\div9=1;$$

$$99\div3=33, \qquad 99\div9=11;$$

$$999\div3=333, \qquad 999\div9=111.$$

就是只用 9 這一個數字組織成的數都是 3 和 9 的倍數.

現在我們再來看:

$$36=30+6=10\times3+6=(9+1)\times3+6=9\times3+(3+6),$$

$$135=100+30+5=(99+1)\times1+(9+1)\times3+5$$
$$=(99\times1+9\times3)+(1+3+5),$$

$$2601=2000+600+1=(999+1)\times2+(99+1)\times6+1$$
$$=(999\times2+99\times6)+(2+6+1).$$

各個式子右邊的第一個數都是 9 的倍數，第二個數也都是 9 的倍數 所以它們的和 36，135，2601 都是 9 的倍數.

把各個式子右邊的第二個數來和原數對照一下，我們可以看出來，它們就是原數的‘各位數字的和’. 這就是說：

一個數的各位數字的和是 9 的倍數，它就是 9 的倍數.

自然，這也可以用到 3.

一個數的各位數字的和是 3 的倍數，它就是 3 的倍數.

9 是 3 的倍數，所以 9 的倍數都是 3 的倍數，上面的 36，135，2601 都是 3 的倍數. 但 3 的倍數不一定就是 9 的倍數，如 3，6，12，15……. 所以一個數的各位數字的和若只是 3 的倍數而不是 9 的倍數，它也就只是 3 的倍數而不是 9 的倍數.

8.【11 的倍數】 我們先注意一下：

$$1=1,\quad 10=11-1,\quad 100=9\times11+1,$$

$$1000=91\times11-1,\quad 10000=909\times11+1,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\begin{aligned}869&=800+60+9=100\times8+10\times6+9\\&=(9\times11+1)\times8+(11-1)\times6+9\\&=(9\times11\times8+11\times6)+(8-6+9),\\3553&=1000\times3+100\times5+10\times5+3\\&=(91\times11-1)\times3+(9\times11+1)\times5+(11-1)\times5+3\\&=(91\times11\times3+9\times11\times5+11\times5)+(-3+5-5+3),\\23419&=10000\times2+1000\times3+100\times4+10\times1+9\end{aligned}$$

$$=(909\times11+1)\times2+(91\times11-1)\times3+(9\times11+1)$$
$$\times4+(11-1)\times1+9$$
$$=(909\times11\times2+91\times11\times3+9\times11\times4+11\times1)$$
$$+(2-3+4-1+9).$$

上面三個式子告訴我們，最後等式右邊的第一個數都是 11 的倍數．所以原數是不是 11 的倍數就要看它最後等式右邊的第二個數是不是 11 的倍數．

我們來仔仔細細地看看這些第二個數．同着原數對起來，它們都是奇數位數的數字在‘+’，偶數位數的數字在‘−’．

$$8-6+9=(8+9)-6=11,$$
$$-3+5-5+3=(5+3)-(3+5)=0,$$
$$2-3+4-1+9=(2+4+9)-(3+1)=11.$$

它們是 0 或 11 的倍數．所以原數也就是 11 的倍數．這就是說：

一個數的奇位數字的和同着它的偶位數字的和相減所得的差若是 0 或 11 的倍數，它就是 11 的倍數．

$869=79\times11,\quad 3553=323\times11,\quad 23419=2129\times11.$

二 質　　數

9.【質數和合數】 在自然數列中，如2,3,5,7,11……這些數，只有 1 同着它自己可以除盡它，這種數我們叫做質數．另外如 4,6,8,9,10……這些數，除了1和它自己，還有別的數可以除盡它，2 可以除盡 4,6,8,10……，3 可以除盡 6,9……，這種數我們叫做合數．

照這個說法，0 可以看成合數，但 1既不是合數，我們也不把它看成質數．因此，自然數列中的數可分成三類：

(1)單位數，就是 1，只有一個．

(2)質數，個數是無限的．下面我們再來證明．

(3)合數，個數是無限的．因爲一個合數卽如4，我們無論用什麽數去乘它得出來的都是合數．就是質數，只要用 1 以外的數去乘它也就得出合數，如 $3\times2=6, 3\times7=21$，…….

10.【判定質數的方法】 判定什麽數是質數，這有兩種說法：(1)從 1 起到某一個數比如 100，哪些數是質數？(2)任意提出一個數來，怎樣判定它是不是質數？下面我們來分別加以說明．

(1)從 1 起到某一個數比如 100，哪些數是質數？

解決這個問題，我們有一個很呆的方法，像下面所做的

[1]	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72
73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84
85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96
97	98	99	100								

把一百個數順次列出來．從 2 的下一個數 3 起，兩個兩個地數，數到的數都畫掉(表上畫在下面)．再從 3 的下一個數4 起，三個三個地數，數到的數都畫掉(表上畫在上面)．順着下來，5 沒有畫掉，就從 5 的下一個數 6 起，五個五個地數，數到的數都畫掉(表上畫在右邊)．再下去沒有畫掉的是 7，就從7 的下一個數8 起，七個七個地數，數到的數都畫掉(表上畫在左邊)．

假如我們不是從 1 起到 100 爲止，那末還要照推下去．現在只到 100 爲止，這樣就行了．因爲 7 以下沒有畫掉的已是

11．11除 100 不過得9．9 比 11 小，可以畫掉的數，如 22,33,44……等在數 2，數 3 的時候就畫掉了．

這樣做法，沒有畫掉的數都是質數． 現在把 200 以內的質數寫在下面供大家參考：

2	3	5	7	11	13	17	19
23	29	31	37	41	43	47	53
59	61	67	71	73	79	83	89
97	101	103	107	109	113	127	131
137	139	149	151	157	163	167	173
179	181	191	193	197	199		

(2)任意提出一個數來，如397 和 323，怎樣判定它是不是質數？

解決這個問題，我們還是只有一個很呆的方法． 就是把所有比它小的質數，從小到大地依次去除它． 除到商數已經比除數小了還除不盡，它就是質數． 因爲我們是先用小的數去除，再用大的數除的；假如商數比除數小以後還除得盡，那末，商數做除數的時候早已經除盡了．

先看397．由前面說過的法則，我們知道2,3,5,11都除不盡它．

$397 \div 7 = 56 \cdots\cdots 5$，　　$397 \div 13 = 30 \cdots\cdots 7$，

$397 \div 17 = 23 \cdots\cdots 6$，　　$397 \div 19 = 20 \cdots\cdots 17$，

$397 \div 23 = 17 \cdots\cdots 6$．

商數 17 比除數 23 小還除不盡，所以 397 是質數.

再看 323. 2,3,5,11 也都除不盡它.

$$323\div 7=46\cdots\cdots 1,\qquad 323\div 13=24\cdots\cdots 11,$$

$$323\div 17=19.$$

就是 $323=17\times 19$ 不是質數.

11. 【質數的個數是無限的】 我們說'有限'就是說有一個最大的數做界限. 假如質數的個數是有限的，那末就是有一個最大的質數，凡是比它大的數都不是質數. 我們就設這個最大的質數是 p.

現在我們來研究這樣一個數 N，它等於從 2 起到 p 止的一切質數的積加上 1，卽 $N=2\times 3\times 5\times 7\times\cdots\cdots\times p+1$.

首先，我們知道 N 總大於 p，所以若 N 就是質數，p 當然不是最大的質數.

其次，我們說 N 就是質數. 因爲比它小的質數，2,3,5,7,……p，無論拿哪一個去除它都要剩 1，就是總除不盡. 所以 N 是質數，並且是大於 p 的.

這就是說，質數沒有最大的一個. 所以質數的個數是無限的.

三 析 因 數

12. 【因數和質因數】 $3\times5=15$, $6\times7=42$ 或 $2\times3\times7=42$, 兩個以上的數相乘得出另一個數來,這些相乘的數就叫做那個得出來的數的**因數**. 3 和 5 是 15 的因數, 6 和 7 或 2, 3 和 7 是 42 的因數.

因數是質數的叫做**質因數**, 3 和 5 是 15 的質因數, 2, 3 和 7 是 42 的質因數.

質數便只有兩個因數, 1 和它自己, 如 $7=1\times7$.

13. 【析因數】 把一個合數分成幾個因數,用這些因數的連乘積來表示它,這叫做**析因數**.

析因數,我們總是把合數的質因數分析出來.

析一個合數的質因數的方法,除了 2, 3, 5, 11 我們可以用前面所講過的法則視察以外,只有把比它小的質數去試除它. 自然,除到可以判定它是質數的時候就用不着再做下去了.

前面我們還講過 4, 8, 9, 10, 25, 125 這些數的倍數的視察法,當然也是可以用的,不過要把它們分成質因數 2×2, $2\times2\times2$, 3×3, 2×5, 5×5, $5\times5\times5$ 的連乘積. 同一個因數的連乘,我們是把它連乘的個數記在它的右肩上,如 $2\times2=2^2$, $2\times2\times2=2^3$, $3\times3=3^2$, $5\times5=5^2$, $5\times5\times5=5^3$.

〔例 1〕 求 420 的質因數.

$$\begin{array}{r|l}2 & 420 \cdots\cdots \text{末位是 0, 所以用 2 去除.} \\ 2 & 210 \cdots\cdots \text{末位是 0, 所以用 2 去除.} \\ 5 & 105 \cdots\cdots \text{末位是 5, 所以用 5 去除.} \\ 3 & 21 \cdots\cdots 2+1=3 \text{ 是 3 的倍數, 所以用 3 去除.} \\ & 7 \cdots\cdots 7 \text{ 已經是質數.}\end{array}$$

$\therefore \quad 420=2\times 2\times 5\times 3\times 7=2^2\times 3\times 5\times 7.$

注意 我們很容易看出來 $420=42\times 10=21\times 20$. 所以也可以分別先將 42 和 10 或 21 和 20 分析它們的質因數,再把所分析得的各質因數連乘起來.

(1) $\begin{array}{r|l}2 & 42 \\ 3 & 21 \\ & 7\end{array}$ $\begin{array}{r|l}2 & 10 \\ & 5\end{array}$ $\therefore \quad 420=42\times 10=(2\times 3\times 7)\times(2\times 5)$
$=2^2\times 3\times 5\times 7.$

(2) $\begin{array}{r|l}3 & 21 \\ & 7\end{array}$ $\begin{array}{r|l}2 & 20 \\ 2 & 10 \\ & 5\end{array}$ $\therefore \quad 420=21\times 20=(3\times 7)\times(2\times 2\times 5)$
$=2^2\times 3\times 5\times 7.$

〔例 2〕 求 2743 的質因數.

$\begin{array}{r|l}13 & 2743 \\ & 211\end{array}$ $\qquad 13 \; 211 \cdots\cdots 211$ 已是質數.
$\qquad\qquad 16 \cdots\cdots 3$

$\therefore \quad 2743=13\times 211.$

由視察我們知道 2,3,5,11 都不是 2743 的因數. 由心算,我們知道 7 也不是它的因數.

用 13 去除它得 211. 因為 2,3,5,7,11 都不是 2743 的因數,所以也不是 211 的因數. 再用 13 去除 211 得 16 剩 3. 比 13 大的質數是 17 已經比 16 大,所以用不着再去試除,已經可以判定 211 是一個質數.

四　最大公約數

14.【公約數和最大公約數】 幾個數公共有的約數叫做它們的**公約數**. 如 12 的約數是 2,3,4,6,12;18 的約數是 2,3,6,9,18;24 的約數是 2,3,4,6,8,12,24. 2,3,6 是 12,18 和 24 所公共有的約數,就是它們的公約數.

幾個數的公約數中最大的一個叫做它們的**最大公約數**,我們用 *G.C.M.* 代表它. 在前面所舉的例中,6 就是 12,18,24 的最大公約數.

15.【互質數】 幾個數除 1 以外沒有公約數的叫做**互質數**. 如 5 和 6 以及 12,35 和 121 各是互質數.

16.【求最大公約數法——析質因數法】 先把要求最大公約數的各數析成質因數的連乘積.

其次把各數公有的質因數提出來相乘,所得的積就是所求的最大公約數. 如果同一個質因數各有幾個,只取最少的個數.

〔例 1〕 求 180 和 126 的最大公約數.

$$\because\quad 180=2^2\times3^2\times5 \text{ 和 } 126=2\times3^2\times7.$$

$$\therefore\quad G.C.M.=2\times3^2=18.$$

這個演算又可列成下式:

$$\begin{array}{r|rl}
2 & 180 & 126 \cdots\cdots 2\text{ 是公因數.} \\
3 & 90 & 63 \cdots\cdots 3\text{ 是公因數.} \\
3 & 30 & 21 \cdots\cdots 3\text{ 是公因數.} \\
 & 10 & 7 \cdots\cdots 10\text{ 和 }7\text{ 已經是互質數.}
\end{array}$$

$$\therefore \quad G.C.M.=2\times 3\times 3=18.$$

注意 這裏只是將各個公因數，就是各次的除數連乘． 又各數的最大公約數去除各數所得的商一定是互質數．

〔例 2〕 求 210, 1260 和 245 的最大公約數．

$$\because \quad 210=2\times 3\times 5\times 7,$$

$$1260=2^2\times 3^2\times 5\times 7,$$

和

$$245=5\times 7^2.$$

$$\therefore \quad G.C.M.=5\times 7=35.$$

這個演算又可列成下式：

$$\begin{array}{r|rrr}
5 & 210 & 1260 & 245 \\
7 & 42 & 252 & 49 \\
 & 6 & 36 & 7
\end{array}$$

$$\therefore \quad G.C.M.=5\times 7=35.$$

〔例 3〕 求 9000 和 1350 的最大公約數．

$$\begin{array}{r|rl}
10 & 9000 & 1350 \cdots\cdots 10\text{ 是公因數.} \\
5 & 900 & 135 \cdots\cdots 5\text{ 是公因數.} \\
9 & 180 & 27 \cdots\cdots 9\text{ 是公因數.} \\
 & 20 & 3
\end{array}$$

$$\therefore \quad G.C.M.=10\times 5\times 9=450.$$