# 矩阵论中不等式

王松桂　贾忠贞　著

安徽教育出版社

# 矩阵论中不等式

王松桂　贾忠贞　著

安徽教育出版社

(皖)新登字03号

责任编辑 杨晓原

矩阵论中不等式
王松桂 贾忠贞 著
安徽教育出版社出版发行
(合肥市金寨路381号)
新华书店经销 安徽新华印刷厂印刷
*
开本850×1168 1/32 印张11.25 字数220,000
1994年7月第1版 1994年7月第1次印刷
印数2,000
ISBN 7—5336—1386—4/G·1829
定价：7.20元

## 内容提要

本书系统地、全面地论述矩阵论中的各种不等式。全书共分九章。第一章是矩阵论的预备知识。接下来七章分别讨论有关秩、行列式、特征值、条件数、迹、偏序和受控等方面的不等式。第九章作为示例，给出了矩阵不等式在线性统计中几个应用。最后两个附录收集了数、函数和概率统计中常用的不等式。

本书读者对象为工程技术人员、数学工作者、高等院校有关专业教师、高年级学生和研究生。

## 作者简介

王松桂　北京工业大学教授，中国科技大学兼职教授。从事数理统计、线性代数等方面的教学和科研工作。在国内外刊物上已发表50余篇学术论文，出版学术专著“线性模型的理论及其应用”、“近代回归分析”、“实用多元统计分析”及“Advanced Linear Models”（英文专著，美国出版）。曾先后应邀访问美、日、加拿大、瑞典、瑞士、芬兰和波兰等国20余所大学。现是中国数学会、泛华统计协会、美国数学会会员，美国“数学评论”和德国“数学文摘”评论员。履历收入英国剑桥传记中心出版的“International who's who of intellectual”（1988）和美国出版的“who's who in the world”（1991）。

贾忠贞　北京工业大学数学系付教授，从事矩阵论、线性代数、概率统计等方面教学和科研工作。

# 序

正如作者在本书前言中所说，撰写一部系统地、全面地论述矩阵论中各种不等式的专著，是他们的一个夙愿。经过十多个春秋的努力，这个夙愿终于成了现实。我作为他们的一名同事和同行，并目睹了他们为创作这一专著而辛苦耕耘的过程，感到由衷的高兴。

“十年辛苦不寻常”，这确不是一部泛泛之作。首先，作者之一王松桂教授自七十年代后期起即从事线性统计的研究，多年来在国内外刊物上发表了一系列的论文和专著。矩阵不等式是进行这种研究的一个基本工具。所以，本书的写作有他多年研究工作的素养和经验作为背景。其次，作者十年来访问了欧美各国许多著名的学术研究中心，与国际上线性统计领域内卓有成就的同行进行了广泛的合作和切磋，在这过程中收集了许多最新的、国内不易见到的材料，这些都大大提高了本书的学术价值和实用价值。

本书收集的材料很多，这是一个显著的优点。因为在通常的矩阵论教本和专著中，对矩阵不等式这个题材多未作系统介绍，许多结果散布在大量文献中，使用和查找不便。如今有了本书，一卷在手，可免除许多查找翻检之劳。可贵的是，内容虽多，但作者努力做到了多而不乱，多而不偏。众多的材料按其性质组织成一些专题，重点突出，系统性强。作者注意了所选材料在应用上的意义，把它作为取舍的一项重要标准，相信凡是细读过本书的

人，都会有这种感觉。

作者之一王松桂教授是一位统计学家。因此可以理解，作者在材料选择上重视其在统计学上的应用，这是本书的一个特色。这个特色，加上材料收集之丰富，使本书必将成为线性统计方面的工作者案头必备的工具，也是统计和相近专业的研究生、大学生有用的参考读物。这当然不是说本书的读者仅限于这些人。相反，由于矩阵这个工具在数学、自然科学、工程技术乃至社会科学中的重要性，众多的读者将会发现，他们能从本书中找到一些对自己工作有用的东西。我想，这也是作者自己的愿望。

陈希孺

1993年12月9日

# 前言

关于不等式，已经出版了若干部英文专著。其中最有影响的是Hardy、Littlewood和Polya的“Inequalities(1934)(1953)”，Beckenback和Bellman的“Inequalities(1961)”以及Marshall和Olkin的“Inequalities: Theory of Majorization and its Applications(1979)”。这些书或以数量和函数的不等式为主要讨论对象，或从某一特定方面研究一类数量或矩阵的不等式。随着矩阵的理论及其在自然科学、工程技术和社会经济等领域广泛应用的迅速发展，关于矩阵的不等式的新结果层出不穷，它们或是经典不等式的改进和推广，或是完全新型的不等式，或是应用的深入或拓广。这些结果都散见在各种刊物或著作之中，对理论研究者和使用矩阵工具的广大科技工作者都带来诸多不便。多年来，作者有一个夙愿，就是广泛收集、整理各种涉及矩阵的不等式，撰写一部系统、全面地论述矩阵论中的各种不等式的专著。目前在国内外尚未见有这样内容的著作出版。

自1987年以来，我们就开始在教学实践、科学研究和广泛的国内外学术交流中收集资料，特别在跟欧洲朋友们的学术磋商中，获益匪浅。随着工作的深入，我们发现有关矩阵论的不等式的文献之多出乎预料之外，于是我们不得不花费很多精力在资料筛选上，同时我们又特别注意一些最新结果(本书文献截止1992年10月)，力求使本书尽可能地反映这一方向的近代面貌。

全书共分九章，矩阵论中的各种不等式按秩、行列式、特征

值、条件数、迹、偏序和受控等内容分类，每一类构成一章。有些结果就其内容讲，既可排在这一章，也可排在另一章。对这样的内容，为读者查阅方便，我们把它们排在两处，但只在其中一处给出证明。为便于读者使用并使本书内容大体上做到自封，在第一章系统地叙述了矩阵论的预备知识，多数结果给出了证明。为了显示矩阵不等式在线性统计中的广泛应用，第九章举了几个例子作为介绍。限于本书的性质和篇幅，当然这一介绍不可能是全面的。最后，附录1和2罗列了常见的数量、函数不等式以及概率统计中的重要不等式，以便于读者参考。

跟每位写书的作者一样，在这里我们要特别感谢很多的朋友。他们是芬兰Tampere大学Liski博士和Puntanen博士，瑞典Umea大学Kulldorff教授，瑞士Berne大学Riedwyl教授，波兰Poznan大学Baksalary教授，英国Manchester大学Farebrother教授，加拿大Ottawa大学邵军教授和J.N.K.Rao教授，加拿大Waterloo大学吴建福教授，美国Chicago大学习锦赛教授以及Colorado州立大学Srivastava教授等。本书许多资料的收集是我们于1988—1989和1990—1991年先后访问这些地方时进行的，他们的各种形式的热情帮助和支持对本书的写作来说是非常重要的。这里我们还要提到我们的女儿王晓京和王晓天，感谢她们在美国读书期间帮助我们复印了一些国内不易找到的文献。作者还要感谢严利清和杨亚宁同志为本书出版所提供的帮助。这里，我们还要借此机会，向安徽教育出版社杨晓原同志表示谢意，感谢他为本书的出版所给予的自始至终的热情支持、大力帮助和有效合作。

最后，趁本书出版之际，作者还要对我们的老师陈希孺教授多年来的谆谆教诲、指导、关心和帮助表示诚挚的谢意。

本书前三章由贾忠贞执笔，后六章由王松桂执笔，最后由王松桂定稿。

本书系国家自然科学基金项目。

限于作者的水平，本书不妥乃至谬误之处在所难免，恳请国内同行和广大读者不吝赐教。

作者

1993年12月30日

于中国科技大学

注：作者现在通讯地址为：

北京，100022，北京工业大学应用数学系

# 符　号　表

| | |
|---|---|
| $R^n$ | 所有$n$维实向量的全体 |
| $\mathbf{C}^n$ | 所有$n$维复向量的全体 |
| $A'$ | 矩阵$A$的转置 |
| $\overline{A}$ | 矩阵$A$的共轭 |
| $A^*$ | 矩阵$A$的共轭转置(即$\overline{A'}$) |
| $A^{-1}$ | 矩阵$A$的逆矩阵 |
| $A^-$ | 矩阵$A$的广义逆矩阵 |
| $A^+$ | 矩阵$A$的*Moore-Penrose*广义逆 |
| $A\geqslant 0$ | 表示$A$为半正定阵(实对称阵或Hermite阵) |
| $A>0$ | 表示$A$为正定阵(实对称阵或Hermite阵) |
| $A\otimes B$ | $A$与$B$的Kronecker乘积 |
| $A\circ B$ | $A$与$B$的Hadamard乘积 |
| $\det A$ | 方阵$A$的行列式 |
| $r(A)$ | 矩阵$A$的秩 |
| $\mathrm{tr}A$ | 矩阵$A$的迹 |
| $\mathscr{M}(A)$ | 矩阵$A$的列向量张成的子空间 |
| $\lVert A\rVert$ | 矩阵$A$的任一范数 |
| $\lVert X\rVert$ | 向量$X$的欧氏长度 |
| $\lVert A\rVert_F$ | 矩阵$A$的欧氏范数，即Frobenius范数 |
| $\lVert A\rVert_2$ | 矩阵$A$的谱范数 |
| $A^{(k)}$ | 矩阵$A$的$k$阶复合阵 |

| | |
|---|---|
| $A^{\frac{1}{2}}$ | 半正定阵$A$的半正定平方根 |
| $\lambda(A)$ | 方阵$A$的特征值 |
| $\sigma(A)$ | 矩阵$A$的奇异值 |
| $\kappa(A)$ | 矩阵$A$的条件数 |
| $\overline{z}$ | $z$的共轭复数 |
| $\lvert z\rvert$ | $z$的模 |
| $R_e(z)$ | $z$的实部 |
| $I_m(z)$ | $z$的虚部 |
| $x\prec y$ | 向量$x$受控于$y$ |
| $x\prec_w y$ | 向量$x$弱受控于$y$ |

$R_+^n=\{x\in R^n;\ x_i\geqslant 0,\ i=1,\ \cdots,\ n\}$

$D=\{x\in R^n;\ x_1\geqslant\cdots\geqslant x_n\}$

# 目　录

# 第一章　矩阵论的预备知识

本书的目的是系统地论述有关矩阵的各种不等式．因此，当我们写作本书时，假定读者已经具备了一般线性代数教科书中矩阵论的知识．但是，为了读者阅读上的方便和叙述简洁，在这一章，我们将扼要地给出本书讨论中要用到的一些重要结论和一般文献中不易查到的事实．因为前六节内容偏基础一些，为了节省篇幅，部分证明被略去了，读者可从许以超(1965)、蒋尔雄等(1978)找到它们的证明。而对其余各节，所有结论都给出了较详细的证明．

## §1.1　线性空间

我们用$C^n$和$R^n$分别表示全体$n$维复向量和实向量组成的线性空间．

设$S$为$C^n$的一个子空间，$a_1$，…，$a_k$为$S$的一组基．记$A=(a_1, \cdots, a_k)$，它是一个$n\times k$矩阵．则$S$可以表为

$$S=\{x:\ x=At,\ t\in C^k\},$$

即$S$是由$a_1$，…，$a_k$的所有线性组合生成的线性子空间，称为$A$的

列向量张成的子空间，简称为$A$的列空间，记为$\mathscr{M}(A)$. 若用$\dim(S)$表示$S$的维数，则从矩阵秩和空间的维数的定义可以推出

$$\dim\mathscr{M}(A)=r(A), \tag{1.1.1}$$

这里$r(A)$表示$A$的秩. 注意，$S$是零维子空间当且仅当$S=\{0\}$，即单个零向量构成的子空间.

设$S_1$和$S_2$为两个子空间，那么它们的和

$$S_1+S_2=\{x+y: x\in S_1, y\in S_2\}$$

以及它们的交

$$S_1\cap S_2=\{x: x\in S_1且x\in S_2\}$$

都是子空间，分别称为$S_1$与$S_2$的和空间、交空间. 设$A$、$B$为两个具有相同行数的矩阵，则容易证明

$$\mathscr{M}(A\vdots B)=\mathscr{M}(A)+\mathscr{M}(B). \tag{1.1.2}$$

下面的定理给出了和空间与交空间维数之间的关系.

**定理1.1.1** 设$S_1$和$S_2$为两个子空间，则

$$\dim(S_1+S_2)=\dim(S_1)+\dim(S_2)-\dim(S_1\cap S_2). \tag{1.1.3}$$

**证明** 记$p_i=\dim S_i$, $i=1, 2$. $r=\dim(S_1\cap S_2)$，设$a_1,\cdots, a_r$为$S_1\cap S_2$的基，将$a_1, \cdots, a_r$扩充为$a_1, \cdots, a_r, b_1, \cdots, b_{p_1-r}$，使其构成$S_1$的一组基. 同样地，将$a_1, \cdots, a_r$扩充为$a_1, \cdots, a_r, c_1, \cdots, c_{p_2-r}$，使其为$S_2$的一组基. 那么，向量组

$$a_1, \cdots, a_r, b_1, \cdots, b_{p_1-r}, c_1, \cdots, c_{p_2-r}$$

构成了$S_1+S_2$的基，这就证明了所要结论.

特别，若$S_1\cap S_2=\{0\}$，则称$S_1+S_2$为$S_1$与$S_2$的直和，记为$S_1\oplus S_2$，直和具有下列性质.

**定理1.1.2** (1) $\dim(S_1\oplus S_2)=\dim S_1+\dim S_2$.