附：全国统一考试试卷解析　考试预测试卷

工程数学（概率论与数理统计）

高等教育自学考试同步辅导／同步训练

全国高等教育自学考试指定教材辅导用书

夏爱生　杨胜友／主编

（公共课程）

M F E B

修订版

双色印刷

华出版社

工程数学

（概率论与数理统计）

（修订版）

全国高等教育自学考试指定教材辅导用书

高等教育自学考试同步辅导/同步训练

主编 夏爱生 杨胜友

朝华出版社

图书在版编目(CIP)数据

工程数学(概率论与数理统计)/夏爱生·杨胜友主编.
—北京:朝华出版社,2003.10

(高等教育自学考试同步辅导·同步训练)

ISBN 7-5054-0781-3

Ⅰ.工… Ⅱ.①夏…②杨… Ⅲ.工程数学—高等教育—自学考试—自学参考资料 Ⅳ.TB11

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 090254 号

工程数学(概率论与数理统计)

主　　编　夏爱生　杨胜友
责任编辑　凌舒昉　王　磊
特约编辑　吴伶芝
封面设计　朱　珊
责任印制　赵　岭
出版发行　朝华出版社
社　　址　北京市车公庄西路 35 号　　邮政编码　100044
电　　话　(010)68433166
　　　　　(010)68413840/68433213(发行部)
传　　真　(010)88415285
印　　刷　化学工业出版社印刷厂
经　　销　全国新华书店
开　　本　32 开　　字　　数　400 千字
印　　数　0—10000　　印　　张　13.5
版　　次　2003 年 10 月第 1 版第 1 次印刷
装　　别　平
书　　号　ISBN 7-5054-0781-3/G.0221
定　　价　18.00 元

修 订 说 明

本书是全国高等教育自学考试指定教材公共课程《工程数学(概率论与数理统计)》的同步辅导/同步训练的修订本。

梯田品牌自考系列丛书,自1998年出版以来,由于其独具的特点和卓越的品质深得全国各省、市教委、学校和广大自考师生的好评和认可,全国每年约有800万人次的考生使用本品牌,销量居全国同类书之榜首,被誉为最受欢迎的自考辅导丛书。此次修订亦是进一步提高质量的举措。

本书的编写及修订依据:

全国高等教育自学考试指导委员会组编的指定教材《工程数学(概率论与数理统计)(附:工程数学(概率论与数理统计)自学考试大纲)》范金城主编,辽宁大学出版社出版)。

本书此次修订的主要侧重点:

1. 严格以考试大纲和指定教材为依据,根据最新全国统一考试题型,对本书进行了全面修订。

2. 根据读者反馈的信息和学生的需要,对重点章节从“内容提要”、“例题分析”以及“同步练习”中的内容、题型、题量都作了增加删减的全面调整。“参考答案”对相当数量的重点试题做出了详尽的解答过程,使读者能够对所学知识融会贯通,从而达到举一反三。

3. 精心设计的两套考试预测试卷,不仅题型、题量与最新全国统考试卷保持一致,而且从其内容、难度和广度方面亦全面预测考试趋向。

4. 所附的最新全国统考试卷为考生获知考试原卷、增强感性认识、把握考试动向提供准确的信息。

5. 人性化处理模式。重新进行了版式设计,仍采用国际流行开本,同时采用双色印刷,利于考生翻阅学习。

本书可供参加高等教育自学考试集体组织或个人自学使用,也可供相关专业人士参加其他考试使用。

编写高质量的全国高等教育自学考试辅导用书,是社会助学的一个重要环节。毫无疑问,这是一项艰难而有意义的工作,需要社会各方面的关怀和支持,使它在使用过程中不断提高和日臻完善。

敬请读者批评指正。

编　者

2003 年 10 月

说　明

本书是全国高等教育自学考试《工程数学(概率论与数理统计)》(公共课程)的配套辅导用书。

编写依据：

1. 全国高等教育自学考试指导委员会颁布的《工程数学(概率论与数理统计)自学考试大纲》；

2. 全国高等教育自学考试指导委员会组编的指定教材《工程数学(概率论与数理统计)》(范金城主编,辽宁大学出版社出版,1999年版)。

本书的特点：

本书以自学考试大纲规定的考核知识点及能力层次为线索,按指定教材分章辅导,每章均有开篇知识简介、内容提要、例题分析、同步练习及参考答案,最后附有3套模拟试卷和6个附表。本书旨在帮助应试者迅速而全面地掌握本课程的内容、熟悉应试题型、掌握应试中所必需的技巧,取得理想的应试效果。

本书的第一章至第五章(概率论部分)由夏爱生编写,第六章至第九章(数理统计部分)由杨胜友编写。

限于编者的学识水平,疏漏之处望请专家及读者批评指正。

编者

2000年8月

目　录

第一章　随机事件与概率

在大自然、社会生活和生产活动中存在着大量的随机现象. 在一次试验中,这种现象出现与否具有偶然性,但是在大量重复试验中,它具有内在的必然性即规律性. 概率论就是研究随机现象及其规律性的一门数学分支.

内容提要

一、随机事件及随机事件的关系和运算

1. 随机试验　随机现象总在一定条件下进行并进行观察,把一次观察看作一次试验. 满足下列条件的试验称为随机试验:

(1)试验可以在相同条件下重复进行;

(2)每次试验的可能结果不止一个,并能事先明确试验的所有可能结果;

(3)进行一次试验之前不能确定会出现哪一种结果.

这样的试验叫做随机试验,简称试验. 记为 E.

2. 随机事件　在随机试验中,可能出现也可能不出现的事件,叫做随机事件,简称事件.

3. 基本事件　在随机试验中的最简单的随机事件,叫做基本事件或样本点.

随机试验中,除基本事件外,还有复杂事件,它们是由基本事件构成的随机事件,简称为事件. 一般用大写英文字母 A、B、C 等表示事件.

4. 必然事件　在随机试验中,必然发生的事件,叫做必然事件,记为 Ω.

5. 不可能事件　在随机试验中,不可能发生的事件,叫做不可能

事件,记为 ϕ.

6. **样本空间** 随机试验 E 的所有基本事件组成的集合,叫做 E 的样本空间,记为 Ω.

7. 事件之间的关系和运算

(1) **子事件(或事件的包含)** 若事件 A 发生,必然导致事件 B 发生,则称事件 A 为事件 B 的子事件(或称事件 B 包含事件 A),记为 $B\supset A$ 或 $A\subset B$.

(2) **事件的相等** 若 $A\supset B$ 且 $B\subset A$,则称事件 A 与事件 B 相等,记为 $A=B$.

(3) **和事件** 事件 A 和事件 B 至少有一个发生的事件,称为事件 A 与事件 B 的和事件,记为 $A\cup B$.

类似地,表示 A_1、A_2、…、A_k、…中至少有一个发生的事件,称为 A_1、A_2…、A_k、…的和事件,记为 $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}A_k$.

(4) **积事件** 事件 A 与事件 B 同时发生的事件,称为 A 与 B 的积事件,记为 $A\cap B$ 或 AB.

类似地,表示 A_1、A_2、…、A_k、…同时发生的事件,称为 A_1、A_2、…A_k、…的积事件,记为 $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}A_k$.

(5) **差事件** 事件 A 发生而事件 B 不发生的事件,称为 A 与 B 的差事件,记为 $A-B$.

(6) **互不相容事件** 若事件 A 与事件 B 不能同时发生,即 $AB=\phi$,则称事件 A 与事件 B 是互不相容的事件(或称互斥事件).

(7) **对立事件** 若事件 A 与事件 B 至少有一个发生且仅有一个发生,即 $A\cup B=\Omega$,$AB=\phi$,则称 A 是 B 的对立事件,或 B 是 A 的对立事件. A 的对立事件记为 $\overline{A}$.

(8) **完备事件组** 若 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n=\Omega$,且 $A_iA_j=\phi(i\neq j)$,则称 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为完备事件组.

8. 事件的运算性质

(1) **交换律** $A\cup B=B\cup A$,$A\cap B=B\cap A$;

(2) **结合律** $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$,$(AB)C=A(BC)$;

(3) **分配律** $(A\cup B)C=AC\cup BC$,

$$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C);$$

(4) 对偶律 $\overline{A\cup B}=\overline{A}\,\overline{B},\overline{AB}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

二、随机事件的概率

概率，是概率论中最基本的概念. 随机事件的概率，是随机事件在试验中出现可能性大小的数值度量. 用概率度量随机事件在试验中出现的可能性大小，与用长度度量线段、用面积度量平面几何图形相类似，随机事件 A 的概率用 $P(A)$ 表示.

1. 频率 设事件 A 在 n 次重复试验中发生 n_A 次，比值 $\frac{n_A}{n}$ 称为在这 n 次试验中 A 发生的频率，记为 $f_n(A)$.

由频率的定义知频率具有下列性质：

(1) $0\leqslant f_n(A)\leqslant 1$;　　(2) $f_n(\Omega)=1$;

(3) 若 A、B 互不相容，即 $AB=\phi$，则 $f_n(A\cup B)=f_n(A)+f_n(B)$.

2. 概率 事件 A 的概率，就是事件 A 发生可能性大小的数值度量. 当重复试验次数增加时，如果事件 A 的频率 $f_n(A)$ 围绕一个稳定的数值 P 做微小的摆动，这个数值 P 称为事件 A 的概率，记为 $P(A)$.

事件 A 的概率 $P(A)$ 满足下列三条公理：

(1) 对于每一个事件 A 有 $0\leqslant P(A)\leqslant 1$;

(2) $P(\Omega)=1$;

(3) 对于有限个互不相容的事件 A_1、A_2、…、A_k 有

$$P(\bigcup_{i=1}^{k}A_i)=\sum_{i=1}^{k}P(A_i);$$

(3)′ 对于可数无穷多个互不相容的事件 A_1、A_2、…、A_k、…有

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i);$$

上述三条公理无须证明. 由此可推出概率的其他性质.

3. 概率的性质

(1) 设 $\overline{A}$ 是 A 的对立事件，则 $P(\overline{A})=1-P(A)$.

(2) $P(\phi)=0$.

(3) 若 $AB=\phi$，则 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$.

这一性质可以推广到有限多个互不相容事件的情形.

(4)设A、B为两个事件,如果$A \subset B$,则

$$P(B-A)=P(B)-P(A),P(A) \leqslant P(B).$$

(5)设A、B为两个事件,则

$$P(A \cup B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

上式可以推广到n个事件的情形. 设A_1、A_2、$\cdots A_n$为几个事件,则

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i)-\sum_{1 \leqslant i<j \leqslant n} P(A_i A_j)+\sum_{1 \leqslant i<j<k \leqslant n} P(A_i A_j A_k)+\cdots +(-1)^{n-1} P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i).$$

4. 古典概型

(1)古典概型

①随机试验E的样本空间Ω中的基本事件只有有限个.

②每个基本事件出现的可能性是相等的.

具有这两种特征的概率模型,称为古典概型.

(2)古典概率

如果随机试验E构成一个古典概型,E中随机事件A的概率$P(A)$,叫做古典概率.

其计算公式为:$P(A)=\frac{M}{N}$.(其中M为事件A包含的基本事件数,N为样本空间Ω中基本事件总数.)

对于古典概型应注意以下几点:

①在概率论发展初期古典概型曾经是研究的主要对象,直到今天,它仍然是学习概率统计的基础. 因此,古典概型是非常重要的概率模型.

②在实际问题中如何判断一个概率模型是不是古典概型? 主要是判断有限性和等可能性. 而有限性往往容易判定,但等可能性较难判定. 一般在包含有N个基本事件的样本空间中,如果没有理由认为某些基本事件发生的可能性比另一些基本事件发生的可能性大时,就认为每个基本事件出现的可能性相等,都等于$\frac{1}{N}$.

③计算古典概率时,首先要弄清楚随机试验是什么,即判断有限

性和等可能性是否满足;其次要弄清楚样本空间是怎样构成的. 对于复杂问题只要求出样本空间 Ω 中,基本事件总数 N,同时求出 A 所包含基本事件的个数 M,再利用公式 $P(A)=\frac{M}{N}$即可算出$P(A)$.

(3)排列、组合、乘法原理的基本公式

排列 从 n 个不同的元素中任取 m 个不同的元素按照一定的顺序排成一列,这样的一列称一种排列. 所有不同的排列种数记为 P_n^m.

$$P_n^m=\frac{n!}{(n-m)!}$$

组合 从 n 个不同元素中任取 m 个不同元素构成一组,这样的一组称一个组合. 所有不同的组合种数记为 C_n^m.

$$C_n^m=\frac{n!}{m!\ (n-m)!}$$

乘法原理 如果一个过程可以分两个阶段进行,第一阶段有 m 种不同的做法,第二阶段有 n 种不同的做法,那么整个过程有$m\cdot n$ 种做法.

古典概型研究的对象大致可以概括为三类问题:抽样、分法和随机取数问题.

三、条件概率与事件的独立性

1. **条件概率** 如果 A、B 是随机试验的两个事件,且$P(B)>0$,则称事件 B 发生的条件下事件 A 的概率为事件 B 发生条件下事件 A 发生的条件概率,记为 $P(A/B)$.

条件概率可以通过下列公式计算.

设 $P(B)>0$,则 $P(A/B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$.

2. **乘法公式** 若 $P(B)>0$,则有 $P(AB)=P(B)\cdot P(A/B)$.

对任意 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$,若 $P(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0$,则有

$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2/A_1)\cdots P(A_n/A_1A_2\cdots A_{n-1})$.

注意 乘法公式与条件概率公式实际上是一个公式,当求 $P(AB)$时,必须知道 $P(A/B)$或 $P(B/A)$. 反之,当求 $P(A/B)$时,必须知道 $P(AB)$. 在解决实际问题时,不要将求 $P(AB)$的问题误认为

是求 $P(A/B)$ 的问题.

3. 全概率公式 若事件 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 为完备事件组,且$P(B_i)>0$ $(i=1,2,\cdots,n)$,则对任一事件 A,有

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(B_i)P(A/B_i).$$

全概率公式非常重要,对于一些复杂事件,有时不好求它的概率,利用全概率公式把它转化为一组事件 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 和事件 A 就好求了. 把完备事件组 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 看作导致 A 发生的一个原因,而这些原因的概率是已知或能求的. 这样,对于复杂事件 A 的概率 $P(A)$ 就容易求了.

4. 贝叶斯公式 设 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 为完备事件组,A 为任一事件,且 $P(B_i)>0(i=1,2,\cdots,n)$,$P(A)>0$,则

$$P(B_i/A)=\frac{P(B_i)P(A/B_i)}{\sum_{j=1}^{n}P(B_j)P(A/B_j)}\qquad(i=1,2,\cdots,n).$$

公式中 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 是导致事件 A 发生的原因,$P(B_i)(i=1,2,\cdots,n)$ 是各种原因发生的概率,称为先验概率. 现在要求 A 发生的条件下 B_i 发生的条件概率 $P(B_i/A)(i=1,2,\cdots,n)$,它们称为后验概率. 贝叶斯公式正是反映先验概率和后验概率关系的.

5. 事件的独立性

(1)对于任意两个事件 A、B,若 $P(AB)=P(A)P(B)$ 成立,则称事件 A、B 是相互独立的.

(2)对于任意三个事件 A、B、C,若有

$$P(AB)=P(A)P(B),\quad P(BC)=P(B)P(C),$$
$$P(AC)=P(A)P(C),\quad P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$$

四个等式同时成立,则称 A、B、C 相互独立.

(3)设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是 n 个事件. 若对于任意整数$k(1<k\leqslant n)$和任意 k 个整数 $1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n$,有

$$P(A_{i1}A_{i2}\cdots A_{ik})=P(A_{i1})P(A_{i2})\cdots P(A_{ik}),$$

则称 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立.

注意 ①若事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中任意两个相互独立,则称 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两独立,相互独立,一定两两独立,反之不然;

②事件的独立性,常常不是根据定义来判断,而是根据实际情况来判断的,如电器元件间的工作、车床间的工作和独立射击等各自试验中的事件之间是相互独立的.

6. 贝努利(Bernoulli)概型

(1)贝努利概型　在确定条件下进行 n 次重复独立试验,每次试验只有两个相互对立的结果 A 及 $\overline{A}$. 称这 n 次重复独立试验为贝努利概型.

(2)二项概率公式

如果在独立试验序列中事件 A 的概率为 $p(0<p<1)$,则在 n 次试验中事件 A 恰发生 m 次的概率

$P_n(m)=C_n^m p^m q^{n-m}\quad(m=0,1,2,\cdots,n)$. 其中 $p+q=1$.

例题分析

一、事件及事件的关系和运算

例 1.1　写出随机试验 E 的样本空间、样本点及所列出的随机事件.

(1)掷一颗骰子.

$A=\{$出现奇数点$\}$.

(2)将一枚硬币抛两次.

$A=\{$第一次出现正面$\}$;　$B=\{$至少出现一次正面$\}$;

$C=\{$不出现正面$\}$.

(3)4 件产品中有一件次品,从中任取两件.

$A=\{$取得两件一件为次品$\}$;　$B=\{$取得两件都为正品$\}$.

答案　(1)E 的样本空间 $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$, $A=\{1,3,5\}$.

(2)设正面为 ω_1,反面为 ω_2, E 的样本空间为:

$\Omega=\{\omega_1\omega_1,\omega_1\omega_2,\omega_2\omega_1,\omega_2\omega_2\}$;　　$A=\{\omega_1\omega_1,\omega_1\omega_2\}$;

$B=\{\omega_1\omega_1,\omega_1\omega_2,\omega_2\omega_1\}$;　　$C=\{\omega_2\omega_2\}$.

(3)设 3 件正品为 1、2、3,次品为 4,则

$\Omega=\{(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,4)\}$;

$A=\{(1,4),(2,4),(3,4)\}$;

$B=\{(1,2),(1,3),(2,3)\}$.

例 1.2 在数学系的学生中任选一名学生,令事件 A 表示被选的学生是男生,事件 B 表示该生是三年级的学生,事件 C 表示该生是校排球运动员.

(1)叙述事件 $AB\overline{C}$的意义.

(2)在什么条件下 $ABC=C$ 成立?

(3)什么时候关系式 $C\subset B$ 是正确的?

(4)什么时候$\overline{A}=B$ 成立?

答案 (1)该生是三年级男生,不是校排球运动员.

(2)在校排球运动员都是数学系三年级男生的条件下$ABC=C$.

(3)当数学系的校排球运动员全是三年级学生时,$C\subset B$ 是正确的.

(4)当数学系三年级学生都是女生,而其他年级都是男生时,$\overline{A}=B$成立.

例 1.3 随机点 x 落在区间$[a,b]$上这一事件,记作$\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$.设 $\Omega=\{x\mid -\infty<x<+\infty\}$,$A=\{x\mid 0\leqslant x<2\}$,$B=\{x\mid 1\leqslant x<3\}$.问下述运算分别表示什么事件:

(1)$A\cup B$; (2)AB; (3)$\overline{A}$; (4)$A\overline{B}$.

答案 (1)$A\cup B=\{x\mid 0\leqslant x<3\}$.

(2)$AB=\{x\mid 1\leqslant x<2\}$.

(3)$\overline{A}=\{x\mid -\infty<x<0,$或$2\leqslant x<+\infty\}$.

(4)$A\overline{B}=\{x\mid 0\leqslant x<1\}$.

例 1.4 设 A、B、C 表示三个随机事件,试将下列事件用 A,B,C 表示出来.

(1)只有 A 发生;

(2)A 与 B 都发生,而 C 不发生;

(3)三个事件都不发生;

(4)三个事件至少有一个发生;

(5)三个事件至少有两个发生;

(6)三个事件恰好有一个发生;

(7)三个事件恰好有两个发生;