JIAO·CAI

高等师范专科学校教材

解析几何

吕林根 编

高等教育出版社

本书是根据吕林根、许子道等编《解析几何》(1987年5月第三版)修改而成的. 作者按照国家教育委员会师范教育司在1988年制定的《二年制师范专科学校数学专业解析几何教学大纲》中的要求,对原书作了适当的调整,精简了一些内容,补充一些例题. 本书主要内容是:矢量代数,轨迹与方程,平面与空间直线,柱面、锥面,旋转曲面和二次曲面,二次曲线的一般理论,二次曲面的一般理论.

本书适合二年制师范专科学校数学专业的学生使用. 带*号的内容,各校可以根据教学情况选讲.

高等师范专科学校教材

解析几何

吕林根 编

*

高等教育出版社出版

新华书店总店北京科技发行所发行

人民教育出版社印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32 印张 9.375 字数 220 000

1990 年4月第1版 1990 年4月第1次印刷

印数 0001—3,620

ISBN 7-04-002837-9/O·896

定价1.95元

前　言

解析几何是高等师范专科学校数学专业的一门重要的专业基础课．本课程的目的，为的是培养学生系统掌握空间解析几何的基本知识和基本理论，提高运用代数的方法解决几何问题的能力，并为学习后继课程打好基础，也为将来能较好地处理中学数学教材的有关问题作好准备。

本书是按照二年制师专数学专业的培养目标，根据国家教育委员会师范教育司在1988年制定的二年制师专《解析几何》教学大纲(供数学专业用)的要求编写成的，在编写过程中，主要参考了编者于1986年主编的《解析几何》第三版（高等教育出版社出版)，其中不少章节是由该书的相应部分改编而成。

本书既系统地介绍了空间解析几何的基本内容，也对与中学解析几何联系较为密切的二次曲线的理论，在中学平面解析几何的基础上作了适当的拓宽与补充。

本书取材适度，深入浅出，循序渐进，文字通俗易懂，条理清楚，讲解详细．为了帮助读者及时巩固基本概念，掌握解题的基本方法与技巧，在每一节后配备了适量的习题，并在书末附上习题答案与提示．

全书共分六章，其中带有*号的内容，各校可根据实际情况进行取舍，也可组织学生自学讨论．全书的教学时数为80学时，其讲授与习题课之比一般在3:1与4:1之间，在教学进程中，可灵活掌握．

本书原稿承蒙张爱和同志认真审阅，提出了许多宝贵的意见，我系张筑生同志绘制了全书的插图，高等教育出版社的同志在本

书的定稿与出版过程中也做了大量的工作，在此谨向他们致以深切的谢意.

限于编者的水平与时间的仓促，书中的不妥与错误在所难免，恳切地希望使用本书的老师与广大读者批评指正.

吕林根

1989年8月于苏州大学数学系

目 录

第一章 向量代数

代数学与几何学的结合首先出现在解析几何里．解析几何的基本思想就是用代数的方法来研究几何，为了把代数运算引入到几何中来，最根本的做法就是设法把空间的几何结构有系统地代数化，数量化，把几何与代数沟通起来，使几何问题转化为代数问题．为此，我们首先在空间引进向量及其运算，并通过向量来建立空间坐标系，这是本章要讨论的主要课题，它也是解析几何的基础．

向量代数建立以后，不仅可使某些几何问题更简捷地得到解决，而且它在其他一些学科，例如力学、物理学与工程技术中也是解决问题的有力工具，它又为高等代数中的抽象的向量空间提供了一个具体的模型．

§1.1 向量的概念

在力学、物理学以及日常生活中常常遇到两类量，其中一类较为简单，例如象温度、时间、质量、功、长度、面积与体积等，这些量在规定的单位下，都可以由一个实数来表示，这种只有大小的量叫做数量，也称标量；另外还有一类比较复杂的量，例如象位移、力、速度、加速度、线速度、力矩等，它们不仅有大小，而且还有方向，这种量就是向量．

定义 1.1.1 既有大小又有方向的量叫做向量，或称矢量，简称矢．

向量有两个特征，就是大小和方向，我们常用有向线段来表示

向量．有向线段的长度表示向量的大小，有向线段的方向表示向量的方向，有向线段的始点与终点分别叫做向量的始点与终点，始点是 A，终点是 B 的向量记做 $\overrightarrow{AB}$，有时用 $\vec{a},\vec{b},\vec{x}\cdots$ 或黑体字母 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{x}$，…来记向量①(图 1-1)．

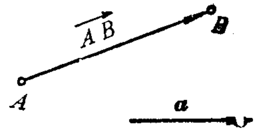


图 1-1

向量的大小叫做向量的模，也称向量的长度，向量 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的模分别记做 $|\overrightarrow{AB}|$ 与 $|\boldsymbol{a}|$．

模等于 1 的向量叫做单位向量，与向量 $\boldsymbol{a}$ 具有同一方向的单位向量叫做 $\boldsymbol{a}$ 的单位向量，常用 $\boldsymbol{a}^0$ 来表示．

模等于 0 的向量叫做零向量，记做 $\mathbf{0}$，零向量是起点与终点重合的向量．零向量没有确定的方向，也就是说它的方向是任意的．不是零向量的向量叫做非零向量．

定义 1.1.2 模相等且方向相同的向量叫做相等向量，所有的零向量都相等．向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 相等记做 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$．

两个向量是否相等，由它们的模与方向决定，而与它们的始点无关，几何学中研究的向量正是这种始点可以任意选取的向量，这种向量叫做自由向量，也就是说，自由向量可以任意平行移动，移动后的向量仍然代表原来的向量．由于自由向量始点的任意性，我们可以把一些向量平行移动到同一始点，这时我们就说，把那些向量归结到共同的始点．

必须注意，由于向量不仅有大小，而且还有方向，因此，模相等的两个向量不一定相等，因为它们的方向可能不同．另外，向量的

① 手写时常用 $\vec{a}$，印刷时常用 $\boldsymbol{a}$．

模可以比较大小，但方向却不能比较大小，因此“大于”与“小于”的概念对于向量来说是没有意义的.

定义 1.1.3 两个模相等，方向相反的向量叫做互为反向量，向量 $\boldsymbol{a}$ 的反向量记做 $-\boldsymbol{a}$.

显然，向量$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{BA}$互为反向量，也就是 $\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB}$ 或 $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{BA}$.

由于在几何中，我们把向量看成是一个有向线段，因此，下面说到向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行，意思就是它们所在的直线相互平行，并且记做 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$，向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不平行记做 $\boldsymbol{a}\nparallel\boldsymbol{b}$. 类似地我们可以说一个向量与一条直线或一个平面平行等.

如果把一组彼此平行的向量归结到共同的始点，这组向量一定在同一条直线上；同样，如果把平行于同一平面的一组向量归结到共同的始点，这组向量一定在同一平面上.

定义 1.1.4 平行于同一条直线的一组向量叫做共线向量. 零向量与任何共线的向量组共线.

定义 1.1.5 平行于同一平面的一组向量，叫做共面向量，零向量与任何共面的向量组共面.

显然，一组共线向量一定是共面向量，三向量中如果有两向量是共线的，这三向量一定也是共面的.

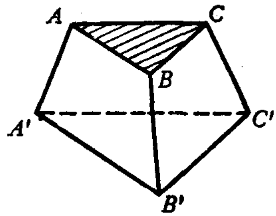
习 题

1. 设点 O 是正六边形 $ABCDEF$ 的中心，试问在向量 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{OE}$, $\overrightarrow{OF}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{FA}$ 中，哪些向量是相等的？

2. 设 $ABCD$ 是一个菱形，在向量$\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DA}$ 中指出互为反向量的向量对.

3. 已知三棱台 $ABC\text{-}A'B'C'$，试在向量$\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{A'B'}$, $\overrightarrow{B'C'}$, $\overrightarrow{C'A'}$,

$\overrightarrow{AA'}$，$\overrightarrow{BB'}$，$\overrightarrow{CC'}$中找出共线向量与共面向量.



第 3 题

4. 下列情形中的向量的终点各构成什么图形？

(1) 把平行于某一直线的一切向量归结到某一共同的始点；

(2) 把平行于某一直线的一切单位向量归结到某一共同的始点；

(3) 把平行于某一平面的一切单位向量归结到某一共同的始点；

(4) 把空间的一切单位向量归结到某一共同的始点.

5. 回答下列问题(问题中的向量均指非零向量)：

(1) 如果向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 共线，向量 $\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共线，那么向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}$ 是否也共线？

(2) 如果向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面，向量 $\boldsymbol{c},\boldsymbol{d},\boldsymbol{e}$ 也共面，那么向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{c},\boldsymbol{e}$ 是否也共面？

(3) 如果向量$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{CD}$共线，那么在什么条件下$\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{BD}$也共线？

§ 1.2 向量的加法与减法

我们知道位移是向量，连续施行两次位移也是一个位移，两个位移的合成可以用“三角形法则”，如图 1-2，连续施行位移$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}$ 的结果，相当于位移$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{c}$.

我们还知道，求作用于一点的两个不共线的力的合力常用“平行四边形法则”，如图 1-3 中的两个力$\overrightarrow{OA}$与$\overrightarrow{OB}$的合力，就是以$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$为邻边的平行四边形 $OACB$ 的对角线向量$\overrightarrow{OC}$.

在自由向量的意义下，两个向量合成的平行四边形法则可归结为三角形法则，如图 1-3，只要平移向量$\overrightarrow{OB}$到$\overrightarrow{AC}$的位置就行了.

定义 1.2.1 已知向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$，以空间任意一点 O 为始点，接连作向量$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}$(图 1-2)，那么以 O 为始点，B 为终点的

向量$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{c}$叫做两向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的和，记做$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，由两向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$求它们的和$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$的运算叫做**向量的加法**.

如图 1-2 求两个向量和的方法叫做向量加法的**三角形法则**，如图 1-3 求两个向量和的方法叫做向量加法的**平行四边形法则**.

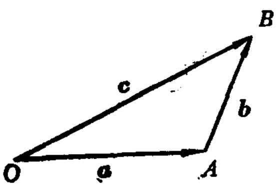


图 1-2

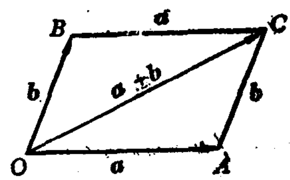


图 1-3

根据定义 1.2.1，我们有向量的求和公式

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}. \tag{1.2-1}$$

定理 1.2.1 向量的加法满足下面的运算规律：

1) 交换律 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$; (1.2-2)

2) 结合律 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$; (1.2-3)

3) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{a}$; (1.2-4)

4) $\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}$. (1.2-5)

证 1)设$\boldsymbol{a}\nparallel\boldsymbol{b}$，作$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，在以$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$为邻边的平行四边形$OACB$中(图 1-3)，因为

$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}, \qquad \overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$$

所以

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC},$$

$$\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}.$$

于是

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}.$$

当 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$ 时，留给读者自己证明.

2) 作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}$, $\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{c}$（图 1-4），那么

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB})+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC},$$

$$\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\overrightarrow{OA}+(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC},$$

所以

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}).$$

3)，4)显然成立.

由于向量的加法满足交换律与结合律，所以三向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 相加，不论它们的先后顺序与结合顺序如何，它们的和总是相同的，因此可以简单地写成

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}.$$

推广到任意有限个向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ 的和，就可以记作

$$\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_n.$$

有限个向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ 相加的作图法，可以由向量的三角形求和法则推广如下：自任意点 O 开始，依次引 $\overrightarrow{OA_1}=\boldsymbol{a}_1$, $\overrightarrow{A_1A_2}=$

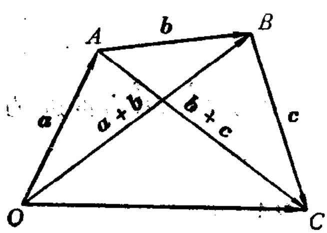


图 1-4

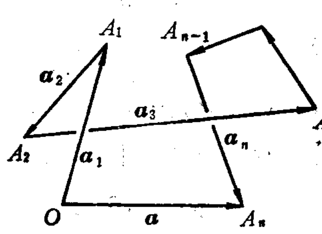


图 1-5

$\boldsymbol{a}_2,\cdots,\overrightarrow{A_{n-1}A_n}=\boldsymbol{a}_n$（图 1-5），于是向量 $\overrightarrow{OA_n}=\boldsymbol{a}$，就是 n 个向量 $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ 的和

$$a = a_1 + a_2 + \cdots + a_n,$$

即

$$\overrightarrow{OA_n} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{A_1A_2} + \cdots + \overrightarrow{A_{n-1}A_n}, \qquad (1.2\text{-}6)$$

特别地，当 A_n 与 O 重合时，它们的和为零向量 $\mathbf{0}$.

这种求多个向量和的方法叫做向量加法的多边形法则.

定义 1.2.2 当向量 b 与向量 c 的和等于向量 a，即 $b+c=a$ 时，我们把向量 c 叫做向量 a 与 b 的差，并记做 $c=a-b$. 由两向量 a 与 b 求它们的差 $a-b$ 的运算叫做向量减法.

根据向量加法的三角形法则，总有

$$\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OA},$$

所以由定义 1.2.2，得

$$\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}. \qquad (1.2\text{-}7)$$

由此得到向量减法的几何作图法：自空间任意点 O 引向量 $\overrightarrow{OA}=a$，$\overrightarrow{OB}=b$，那么向量 $\overrightarrow{BA}=a-b$（图 1-6）. 如果以 $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$ 为一对邻边构成平行四边形 $OACB$，那么显然它的一条对角线向量 $\overrightarrow{OC}=a+b$，而另一条对角线向量 $\overrightarrow{BA}=a-b$（图 1-7）.

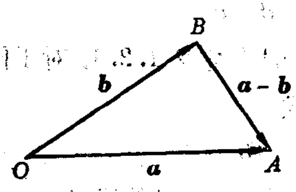


图 1-6

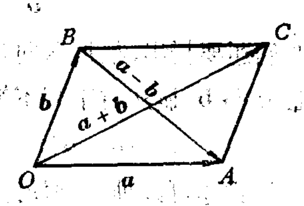


图 1-7

利用反向量，可以把向量的减法运算变为加法运算.

定理 1.2.2 减去一个向量等于加上这个向量的反向量，即

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b}). \tag{1.2-8}$$

证 设 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，那么根据定义 1.2.2，有

$$\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a},$$

在等式的两边分别加上向量 $\boldsymbol{b}$ 的反向量 $-\boldsymbol{b}$，得

$$\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}+(-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b}),$$

即
$$\boldsymbol{b}+(-\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b}).$$

因为
$$\boldsymbol{b}+(-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{0},$$

所以
$$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b}),$$

即
$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b}).$$

由定理 1.2.2 可以得出向量等式的移项法则：在向量等式中，将某一向量从等号的一端移到另一端，只需改变它的符号．例如向量等式

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{d}$$

可以变形为：

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{d}-\boldsymbol{c},$$

这是因为从向量等式 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{d}$ 两边减去 $\boldsymbol{c}$，即加上 $-\boldsymbol{c}$，得

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}+(-\boldsymbol{c})=\boldsymbol{d}+(-\boldsymbol{c}),$$

而
$$\boldsymbol{c}+(-\boldsymbol{c})=\boldsymbol{0},\quad \boldsymbol{d}+(-\boldsymbol{c})=\boldsymbol{d}-\boldsymbol{c},$$

因此
$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{d}-\boldsymbol{c}.$$

我们还要指出，根据两向量加法的定义 1.2.1，对于任何的两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$，显然有下列不等式

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|.$$

这个不等式还可以推广到任意有限多个向量的情况：

$$|\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_n|\leqslant|\boldsymbol{a}_1|+|\boldsymbol{a}_2|+\cdots+|\boldsymbol{a}_n|.$$

例 1 设三个互不共线的向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$，试证明顺次将它们的终点与始点相连而成一个三角形的充要条件是

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\mathbf{0}.$$

证 设三向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 可构成三角形 ABC(图 1-8)，即有

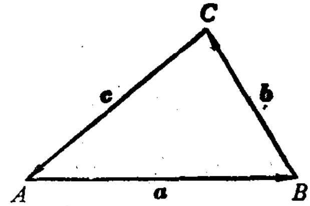


图 1-8

$$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a},\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b},\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{c},$$

那么 $$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{AA}=\mathbf{0},$$

即 $$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\mathbf{0}.$$

反过来，设 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\mathbf{0}$，作 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$，那么$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，所以$\overrightarrow{AC}+\boldsymbol{c}=\mathbf{0}$，从而向量 $\boldsymbol{c}$ 是 $\overrightarrow{AC}$的反向量. 因此 $\boldsymbol{c}=\overrightarrow{CA}$，于是三向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 可以构成一个三角形 ABC.

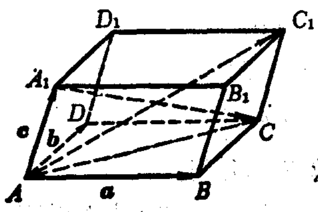


图 1-9

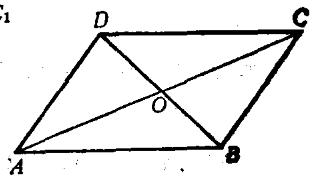


图 1-10

例 2 在平行六面体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中(图 1-9)，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AA_1}=\boldsymbol{c}$，试用 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 表示对角线向量 $\overrightarrow{AC_1}$，$\overrightarrow{A_1C}$.

解
$$\overrightarrow{AC_1}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC_1}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1}$$
$$=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c};$$

$$\overrightarrow{A_1C}=\overrightarrow{A_1A}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=-\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$$
$$=-\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c},$$

或 $$\overrightarrow{A_1C}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AA_1}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AA_1}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}.$$

例 3 利用向量证明：对角线互相平分的四边形是平行四边形.

证 设四边形 $ABCD$ 的对角线 AC, BD 交于点 O 且相互平分(图 1-10),于是

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{DO}=\overrightarrow{DO}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{DC},$$

因此 $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{DC}$, 且 $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{DC}|$, 所以四边形 $ABCD$ 为平行四边形.

§ 1.3 数量乘向量

位移、力、速度与加速度都是向量, 而时间、质量等都是数量,这些向量与数量之间常常会发生某些结合的关系,如

$$\boldsymbol{f}=m\boldsymbol{a},$$

这里 $\boldsymbol{f}$ 表示力,$\boldsymbol{a}$ 表示加速度,m 表示质量. 再如

$$\boldsymbol{s}=\boldsymbol{v}t,$$

这里 $\boldsymbol{s}$ 表示位移,$\boldsymbol{v}$ 表示速度,t 表示时间.

在向量的加法中, n 个向量相加仍然是向量,特别是 n 个相同的非零向量 $\boldsymbol{a}$ 相加,这时的和向量的模为 $|\boldsymbol{a}|$ 的 n 倍,方向与 $\boldsymbol{a}$ 相同. n 个 $\boldsymbol{a}$ 相加常记做 $n\boldsymbol{a}$ 或 $\boldsymbol{a}n$.

定义 1.3.1 实数 λ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 的乘积是一个向量,记做 $\lambda\boldsymbol{a}$ 或 $\boldsymbol{a}\lambda$, 它的模是 $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$; $\lambda\boldsymbol{a}$ 的方向,当 $\lambda>0$ 时与 $\boldsymbol{a}$ 相同, 当 $\lambda<0$ 时与 $\boldsymbol{a}$ 相反. 我们把这种运算叫做数量与向量的乘法,简称为数乘.

根据这个定义,当 $\lambda=0$ 或 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ 时 $|\lambda\boldsymbol{a}|=0$, 所以 $\lambda\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$, 这时就不必讨论它的方向了. 当 $\lambda=-1$ 时, $(-1)\boldsymbol{a}$ 就是 $\boldsymbol{a}$ 的反向量,因此我们常把 $(-1)\boldsymbol{a}$ 写成 $-\boldsymbol{a}$.

根据定义 1.3.1,任意非零向量 $\boldsymbol{a}$ 都可以写成

$$\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}^0 \quad 或 \quad \boldsymbol{a}^0=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}, \tag{1.3-1}$$