



高等师范专科学校教材

解析几何

吕林根 编

高等教育出版社

本书是根据吕林根、许子道等编《解析几何》(1987年5月第三版)修改而成的。作者按照国家教育委员会师范教育司在1988年制定的《二年制师范专科学校数学专业解析几何教学大纲》中的要求,对原书作了适当的调整,精简了一些内容,补充一些例题。本书主要内容是:矢量代数,轨迹与方程,平面与空间直线,柱面、锥面,旋转曲面和二次曲面,二次曲线的一般理论,二次曲面的一般理论。

本书适合二年制师范专科学校数学专业的学生使用。带*号的内容,各校可以根据教学情况选讲。

高等师范专科学校教材

解 析 几 何

吕林根 编

*

高等教育出版社出版

新华书店总店北京科技发行所发行

人民教育出版社印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32 印张 9.375 字数 220 000

1990 年 4 月第 1 版 1990 年 4 月第 1 次印刷

印数 0001—3,620

ISBN 7-04-002837-9/O·896

定价 1.95 元

前 言

解析几何是高等师范专科学校数学专业的一门重要的专业基础课。本课程的目的，为的是培养学生系统掌握空间解析几何的基本知识和基本理论，提高运用代数的方法解决几何问题的能力，并为学习后继课程打好基础，也为将来能较好地处理中学数学教材的有关问题作好准备。

本书是按照二年制师专数学专业的培养目标，根据国家教育委员会师范教育司在1988年制定的二年制师专《解析几何》教学大纲(供数学专业用)的要求编写成的，在编写过程中，主要参考了编者于1986年主编的《解析几何》第三版(高等教育出版社出版)，其中不少章节是由该书的相应部分改编而成。

本书既系统地介绍了空间解析几何的基本内容，也对与中学解析几何联系较为密切的二次曲线的理论，在中学平面解析几何的基础上作了适当的拓宽与补充。

本书取材适度，深入浅出，循序渐进，文字通俗易懂，条理清楚，讲解详细。为了帮助读者及时巩固基本概念，掌握解题的基本方法与技巧，在每一节后配备了适量的习题，并在书末附上习题答案与提示。

全书共分六章，其中带有*号的内容，各校可根据实际情况进行取舍，也可组织学生自学讨论。全书的教学时数为80学时，其讲授与习题课之比一般在3:1与4:1之间，在教学进程中，可灵活掌握。

本书原稿承蒙张爱和同志认真审阅，提出了许多宝贵的意见，我系张筑生同志绘制了全书的插图，高等教育出版社的同志在本

书的定稿与出版过程中也做了大量的工作，在此谨向他们致以深切的谢意。

限于编者的水平与时间的仓促，书中的不妥与错误在所难免，恳切地希望使用本书的老师与广大读者批评指正。

吕林根

1989年8月于苏州大学数学系

目 录

第一章 向量代数	1
§ 1.1 向量的概念.....	1
§ 1.2 向量的加法与减法.....	4
§ 1.3 数量乘向量.....	10
§ 1.4 向量的线性关系与分解.....	15
1. 共线向量与共面向量 (15)	
2. 向量的分解 (19)	
*3. 向量的相关性 (24)	
§ 1.5 空间直角坐标.....	26
1. 空间直角坐标系 (26)	
2. 向量线性运算的坐标表示 (31)	
§ 1.6 向量在轴上的射影.....	37
§ 1.7 两向量的数量积.....	41
1. 两向量的数量积 (41)	
2. 数量积的坐标表示 (44)	
§ 1.8 两向量的向量积.....	49
1. 两向量的向量积 (49)	
2. 向量积的坐标表示 (54)	
§ 1.9 三向量的混合积.....	56
1. 三向量的混合积 (56)	
2. 混合积的坐标表示 (59)	
*§ 1.10 三向量的二重向量积.....	63
第二章 轨迹与方程	67
§ 2.1 曲面的方程.....	67
1. 曲面的方程 (67)	
*2. 曲面的参数方程 (70)	
§ 2.2 空间曲线的方程.....	73
1. 空间曲线的一般方程 (73)	
*2. 空间曲线的参数方程 (74)	
*§ 2.3 球面坐标与柱面坐标.....	76
1. 球面坐标 (76)	
2. 柱面坐标 (78)	
第三章 空间中的平面与直线	80
§ 3.1 平面的方程.....	80

1. 平面的点法式方程与点位式方程(80)	2. 平面的一般方程(84)	3. 平面的法线式方程(86)
§ 3.2 点到平面的距离		90
§ 3.3 两平面间的位置关系		93
§ 3.4 空间直线的方程		96
1. 直线的参数方程与标准方程(96)	2. 直线的一般方程与射影式方程(99)	
§ 3.5 直线与平面的位置关系		104
1. 直线与平面的位置关系(104)	2. 直线与平面的交角(105)	
§ 3.6 空间两直线的位置关系		108
1. 空间两直线的位置关系(108)	2. 空间两直线间的夹角(109)	3. 两异面直线间的距离与公垂线方程(110)
§ 3.7 点到直线的距离		116
§ 3.8 平面把与平面束		117
第四章 柱面、锥面、旋转曲面与二次曲面		122
§ 4.1 柱面		122
1. 柱面的方程(122)	2. 空间曲线的射影柱面(125)	
§ 4.2 锥面		128
§ 4.3 旋转曲面		131
§ 4.4 椭球面		138
§ 4.5 双曲面		143
1. 单叶双曲面与双叶双曲面(143)		
2. 双曲面的渐近锥面(148)		
§ 4.6 抛物面		150
§ 4.7 二次直纹面		155
§ 4.8 空间区域简图		162
第五章 二次曲线的一般理论		167
§ 5.1 平面直角坐标变换		167
§ 5.2 利用坐标变换化简二次曲线的方程及二次曲线的分类		172
1. 坐标变换下二次曲线方程系数的变换规律(172)		
2. 利用移轴化简二次曲线的方程(174)	3. 二次曲线	

	的中心(174) 4. 利用转轴化简二次曲线的方程(178)	
	5. 二次曲线的分类(182)	
§ 5.3	二次曲线在直角坐标变换下的不变量·····	188
§ 5.4	利用不变量化简二次曲线方程及二次曲线形状的判定·····	194
§ 5.5	二次曲线的一般性质·····	200
	1. 二次曲线与直线的交点, 渐近方向与渐近线 (200)	
	2. 切线与法线(203) 3. 直径与共轭直径(208) 4. 主直径与主方向(213)	
§ 5.6	二次曲线位置的确定·····	218
	1. 中心二次曲线位置的确定(220) 2. 非中心二次曲线位置的确定(223)	
*第六章	二次曲面的一般理论 ·····	230
§ 6.1	空间直角坐标变换·····	230
	1. 移轴(230) 2. 转轴(231) 3. 一般直角坐标变换(234)	
§ 6.2	二次曲面的中心, 径面, 主径面与主方向·····	238
	1. 中心(239) 2. 径面(243) 3. 主径面与主方向(245)	
§ 6.3	利用坐标变换化简二次曲面的方程及二次曲面的分类·····	252
§ 6.4	利用不变量化简二次曲面的方程及二次曲面形状的判定·····	261
	1. 二次型的变换(261) 2. 二次曲面的不变量与半不变量(263) 3. 二次曲面五种类的判别(271) 4. 利用不变量化简二次曲面的方程及二次曲面形状的判定(272)	
	习题答案与提示 ·····	279

第一章 向量代数

代数学与几何学的结合首先出现在解析几何里。解析几何的基本思想就是用代数的方法来研究几何，为了把代数运算引入到几何中来，最根本的做法就是设法把空间的几何结构有系统地代数化，数量化，把几何与代数沟通起来，使几何问题转化为代数问题。为此，我们首先在空间引进向量及其运算，并通过向量来建立空间坐标系，这是本章要讨论的主要课题，它也是解析几何的基础。

向量代数建立以后，不仅可使某些几何问题更简捷地得到解决，而且它在其他一些学科，例如力学、物理学与工程技术中也是解决问题的有力工具，它又为高等代数中的抽象的向量空间提供了一个具体的模型。

§1.1 向量的概念

在力学、物理学以及日常生活中常常遇到两类量，其中一类较为简单，例如象温度、时间、质量、功、长度、面积与体积等，这些量在规定的单位下，都可以由一个实数来表示，这种只有大小的量叫做数量，也称标量；另外还有一类比较复杂的量，例如象位移、力、速度、加速度、线速度、力矩等，它们不仅有大小，而且还有方向，这种量就是向量。

定义 1.1.1 既有大小又有方向的量叫做向量，或称矢量，简称矢。

向量有两个特征，就是大小和方向，我们常用有向线段来表示

向量。有向线段的长度表示向量的大小，有向线段的方向表示向量的方向，有向线段的始点与终点分别叫做向量的始点与终点，始点是 A ，终点是 B 的向量记做 $\overrightarrow{AB}$ ，有时用 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{x} \cdots$ 或黑体字母 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{x}, \cdots$ 来记向量①(图 1-1)。

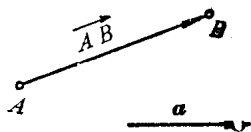


图 1-1

向量的大小叫做向量的模，也称向量的长度，向量 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\mathbf{a}$ 的模分别记做 $|\overrightarrow{AB}|$ 与 $|\mathbf{a}|$ 。

模等于 1 的向量叫做单位向量，与向量 $\mathbf{a}$ 具有同一方向的单位向量叫做 $\mathbf{a}$ 的单位向量，常用 $\mathbf{a}^0$ 来表示。

模等于 0 的向量叫做零向量，记做 $\mathbf{0}$ ，零向量是起点与终点重合的向量。零向量没有确定的方向，也就是说它的方向是任意的。不是零向量的向量叫做非零向量。

定义 1.1.2 模相等且方向相同的向量叫做相等向量，所有的零向量都相等。向量 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 相等记做 $\mathbf{a} = \mathbf{b}$ 。

两个向量是否相等，由它们的模与方向决定，而与它们的始点无关，几何学中研究的向量正是这种始点可以任意选取的向量，这种向量叫做自由向量，也就是说，自由向量可以任意平行移动，移动后的向量仍然代表原来的向量。由于自由向量始点的任意性，我们可以把一些向量平行移动到同一始点，这时我们就说，把那些向量归结到共同的始点。

必须注意，由于向量不仅有大小，而且还有方向，因此，模相等的两个向量不一定相等，因为它们的方向可能不同。另外，向量的

① 手写时常用 $\vec{a}$ ，印刷时常用 $\mathbf{a}$ 。

模可以比较大小,但方向却不能比较大小,因此“大于”与“小于”的概念对于向量来说是没有意义的.

定义 1.1.3 两个模相等,方向相反的向量叫做互为反向量,向量 a 的反向量记做 $-a$.

显然,向量 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{BA}$ 互为反向量,也就是 $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$ 或 $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$.

由于在几何中,我们把向量看成是一个有向线段,因此,下面说到向量 a 与 b 平行,意思就是它们所在的直线相互平行,并且记做 $a \parallel b$,向量 a 与 b 不平行记做 $a \nparallel b$. 类似地我们可以说一个向量与一条直线或一个平面平行等.

如果把一组彼此平行的向量归结到共同的始点,这组向量一定在同一条直线上;同样,如果把平行于同一平面的一组向量归结到共同的始点,这组向量一定在同一平面上.

定义 1.1.4 平行于同一条直线的一组向量叫做共线向量. 零向量与任何共线的向量组共线.

定义 1.1.5 平行于同一平面的一组向量,叫做共面向量,零向量与任何共面的向量组共面.

显然,一组共线向量一定是共面向量,三向量中如果有两向量是共线的,这三向量一定也是共面的.

习 题

1. 设点 O 是正六边形 $ABCDEF$ 的中心,试问在向量 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{OE}$, $\overrightarrow{OF}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{FA}$ 中,哪些向量是相等的?

2. 设 $ABCD$ 是一个菱形,在向量 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DA}$ 中指出互为反向量的向量对.

3. 已知三棱台 $ABC-A'B'C'$,试在向量 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{A'B'}$, $\overrightarrow{B'C'}$, $\overrightarrow{C'A'}$,

$\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{BB'}$, $\overrightarrow{CC'}$ 中找出共线向量与共面向量。

4. 下列情形中的向量的终点各构成什么图形？

(1) 把平行于某一直线的一切向量归结到某一共同的始点；

(2) 把平行于某一直线的一切单位向量归结到某一共同的始点；

(3) 把平行于某一平面的一切单位向量归结到某一共同的始点；

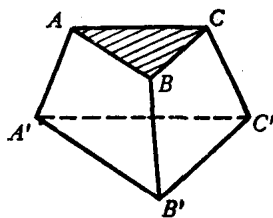
(4) 把空间的一切单位向量归结到某一共同的始点。

5. 回答下列问题(问题中的向量均指非零向量)：

(1) 如果向量 a, b 共线, 向量 b, c 共线, 那么向量 a, c 是否也共线？

(2) 如果向量 a, b, c 共面, 向量 c, d, e 也共面, 那么向量 a, c, e 是否也共面？

(3) 如果向量 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{CD}$ 共线, 那么在什么条件下 $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}$ 也共线？



第3题

§ 1.2 向量的加法与减法

我们知道位移是向量, 连续施行两次位移也是一个位移, 两个位移的合成可以用“三角形法则”, 如图 1-2, 连续施行位移 $\overrightarrow{OA} = a$, $\overrightarrow{AB} = b$ 的结果, 相当于位移 $\overrightarrow{OB} = c$.

我们还知道, 求作用于一点的两个不共线的力的合力常用“平行四边形法则”, 如图 1-3 中的两个力 $\overrightarrow{OA}$ 与 $\overrightarrow{OB}$ 的合力, 就是以 $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ 为邻边的平行四边形 $OACB$ 的对角线向量 $\overrightarrow{OC}$.

在自由向量的意义下, 两个向量合成的平行四边形法则可归结为三角形法则, 如图 1-3, 只要平移向量 $\overrightarrow{OB}$ 到 $\overrightarrow{AC}$ 的位置就行了.

定义 1.2.1 已知向量 a 与 b , 以空间任意一点 O 为始点, 接连作向量 $\overrightarrow{OA} = a$, $\overrightarrow{AB} = b$ (图 1-2), 那么以 O 为始点, B 为终点的

向量 $\overrightarrow{OB} = c$ 叫做两向量 a 与 b 的和, 记做 $c = a + b$, 由两向量 a 与 b 求它们的和 $a + b$ 的运算叫做向量的加法.

如图 1-2 求两个向量和的方法叫做向量加法的三角形法则,
如图 1-3 求两个向量和的方法叫做向量加法的平行四边形法则.

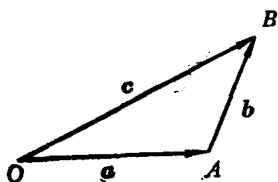


图 1-2

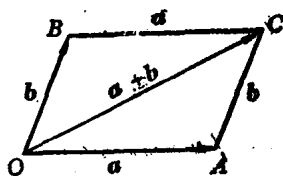


图 1-3

根据定义 1.2.1, 我们有向量的求和公式

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}. \quad (1.2-1)$$

定理 1.2.1 向量的加法满足下面的运算规律:

1) 交换律 $a + b = b + a;$ (1.2-2)

2) 结合律 $(a + b) + c = a + (b + c);$ (1.2-3)

3) $a + 0 = a;$ (1.2-4)

4) $a + (-a) = 0.$ (1.2-5)

证 1) 设 $a \nparallel b$, 作 $\overrightarrow{OA} = a, \overrightarrow{OB} = b$, 在以 $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ 为邻边的平行四边形 $OACB$ 中 (图 1-3), 因为

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OB} = b, \quad \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OA} = a$$

所以

$$a + b = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC},$$

$$b + a = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC}.$$

于是

$$a + b = b + a.$$

当 $a \parallel b$ 时, 留给读者自己证明.

2) 作 $\overrightarrow{OA} = a, \overrightarrow{AB} = b, \overrightarrow{BC} = c$ (图 1-4), 那么

$$(a + b) + c = (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}) + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC},$$

$$a + (b + c) = \overrightarrow{OA} + (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC},$$

所以

$$(a + b) + c = a + (b + c).$$

3), 4) 显然成立.

由于向量的加法满足交换律与结合律, 所以三向量 a, b, c 相加, 不论它们的先后顺序与结合顺序如何, 它们的和总是相同的, 因此可以简单地写成

$$a + b + c.$$

推广到任意有限个向量 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 的和, 就可以记作

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n.$$

有限个向量 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 相加的作图法, 可以由向量的三角形求和法则推广如下: 自任意点 O 开始, 依次引 $\overrightarrow{OA_1} = a_1, \overrightarrow{A_1A_2} =$

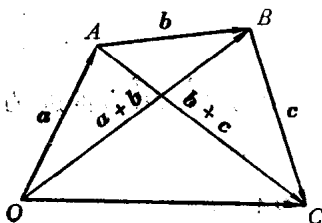


图 1-4

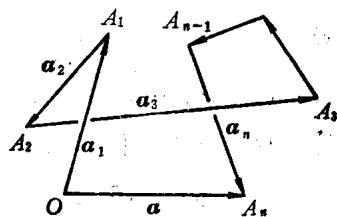


图 1-5

$a_2, \dots, \overrightarrow{A_{n-1}A_n} = a_n$ (图 1-5), 于是向量 $\overrightarrow{OA_n} = a$, 就是 n 个向量 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 的和

$$\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \cdots + \vec{a}_n,$$

即

$$\vec{OA}_n = \vec{OA}_1 + \vec{A_1A_2} + \cdots + \vec{A_{n-1}A_n}, \quad (1.2-6)$$

特别地, 当 A_n 与 O 重合时, 它们的和为零向量 $\vec{0}$.

这种求多个向量和的方法叫做向量加法的多边形法则.

定义 1.2.2 当向量 $\vec{b}$ 与向量 $\vec{c}$ 的和等于向量 $\vec{a}$, 即 $\vec{b} + \vec{c} = \vec{a}$ 时, 我们把向量 $\vec{c}$ 叫做向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的差, 并记做 $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$. 由两向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 求它们的差 $\vec{a} - \vec{b}$ 的运算叫做向量减法.

根据向量加法的三角形法则, 总有

$$\vec{OB} + \vec{BA} = \vec{OA},$$

所以由定义 1.2.2, 得

$$\vec{BA} = \vec{OA} - \vec{OB}. \quad (1.2-7)$$

由此得到向量减法的几何作图法: 自空间任意点 O 引向量 $\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OB} = \vec{b}$, 那么向量 $\vec{BA} = \vec{a} - \vec{b}$ (图 1-6). 如果以 $\vec{OA}$, $\vec{OB}$ 为一对邻边构成平行四边形 $OACB$, 那么显然它的一条对角线向量 $\vec{OC} = \vec{a} + \vec{b}$, 而另一条对角线向量 $\vec{BA} = \vec{a} - \vec{b}$ (图 1-7).

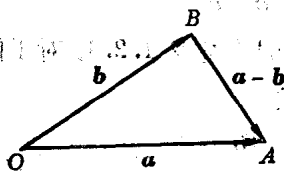


图 1-6

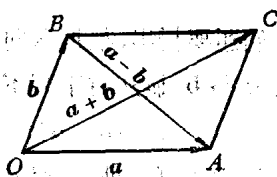


图 1-7

利用反向量, 可以把向量的减法运算变为加法运算.

定理 1.2.2 减去一个向量等于加上这个向量的反向量, 即

$$a-b=a+(-b). \quad (1.2-8)$$

证 设 $c=a-b$, 那么根据定义 1.2.2, 有

$$b+c=a,$$

在等式的两边分别加上向量 b 的反向量 $-b$, 得

$$b+c+(-b)=a+(-b),$$

即

$$b+(-b)+c=a+(-b).$$

因为

$$b+(-b)=0,$$

所以

$$c=a+(-b),$$

即

$$a-b=a+(-b).$$

由定理 1.2.2 可以得出向量等式的移项法则: 在向量等式中, 将某一向量从等号的一端移到另一端, 只需改变它的符号. 例如向量等式

$$a+b+c=d$$

可以变形为:

$$a+b=d-c,$$

这是因为从向量等式 $a+b+c=d$ 两边减去 c , 即加上 $-c$, 得

$$a+b+c+(-c)=d+(-c),$$

而

$$c+(-c)=0, d+(-c)=d-c,$$

因此

$$a+b=d-c.$$

我们还要指出, 根据两向量加法的定义 1.2.1, 对于任何的两个向量 a 与 b , 显然有下列不等式

$$|a+b| \leq |a| + |b|.$$

这个不等式还可以推广到任意有限多个向量的情况:

$$|a_1+a_2+\cdots+a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|.$$

例 1 设三个互不共线的向量 a , b 与 c , 试证明顺次将它们
的终点与始点相连而成一个三角形的充要条件是

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0}.$$

证 设三向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 可构成三角形 ABC (图 1-8), 即有

$$\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}, \overrightarrow{BC} = \mathbf{b}, \overrightarrow{CA} = \mathbf{c},$$

那么

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AA} = \mathbf{0},$$

即

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0}.$$

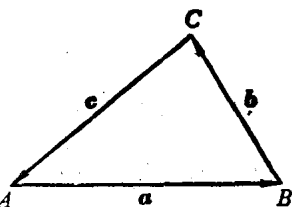


图 1-8

反过来, 设 $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0}$, 作 $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}, \overrightarrow{BC} = \mathbf{b}$, 那么 $\overrightarrow{AC} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$, 所以 $\overrightarrow{AC} + \mathbf{c} = \mathbf{0}$, 从而向量 $\mathbf{c}$ 是 $\overrightarrow{AC}$ 的反向量. 因此 $\mathbf{c} = \overrightarrow{CA}$, 于是三向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 可以构成一个三角形 ABC .

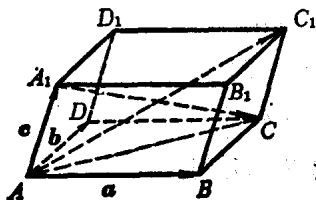


图 1-9

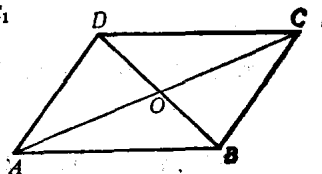


图 1-10

例 2 在平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中 (图 1-9), $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{AD} = \mathbf{b}$, $\overrightarrow{AA_1} = \mathbf{c}$, 试用 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 表示对角线向量 $\overrightarrow{AC_1}$, $\overrightarrow{A_1C}$.

$$\begin{aligned} \text{解 } \overrightarrow{AC_1} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1} \\ &= \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{A_1C} &= \overrightarrow{A_1A} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} \\ &= -\mathbf{c} + \mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{a} + \mathbf{b} - \mathbf{c}, \end{aligned}$$

$$\text{或 } \overrightarrow{A_1C} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AA_1} = \mathbf{a} + \mathbf{b} - \mathbf{c}.$$

例 3 利用向量证明: 对角线互相平分的四边形是平行四边形.

证 设四边形 $ABCD$ 的对角线 AC, BD 交于点 O 且相互平分 (图 1-10), 于是

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{DO} = \overrightarrow{DO} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{DC},$$

因此 $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{DC}$, 且 $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{DC}|$, 所以四边形 $ABCD$ 为平行四边形.

§ 1.3 数量乘向量

位移、力、速度与加速度都是向量, 而时间、质量等都是数量, 这些向量与数量之间常常会发生某些结合的关系, 如

$$f = ma,$$

这里 f 表示力, a 表示加速度, m 表示质量. 再如

$$s = vt,$$

这里 s 表示位移, v 表示速度, t 表示时间.

在向量的加法中, n 个向量相加仍然是向量, 特别是 n 个相同的非零向量 a 相加, 这时的和向量的模为 $|a|$ 的 n 倍, 方向与 a 相同. n 个 a 相加常记做 na 或 an .

定义 1.3.1 实数 λ 与向量 a 的乘积是一个向量, 记做 λa 或 $a\lambda$, 它的模是 $|\lambda a| = |\lambda| |a|$; λa 的方向, 当 $\lambda > 0$ 时与 a 相同, 当 $\lambda < 0$ 时与 a 相反. 我们把这种运算叫做数量与向量的乘法, 简称为数乘.

根据这个定义, 当 $\lambda \neq 0$ 或 $a = 0$ 时 $|\lambda a| = 0$, 所以 $\lambda a = 0$, 这时就不必讨论它的方向了. 当 $\lambda = -1$ 时, $(-1)a$ 就是 a 的反向量, 因此我们常把 $(-1)a$ 写成 $-a$.

根据定义 1.3.1, 任意非零向量 a 都可以写成

$$a = |a| a^0 \quad \text{或} \quad a^0 = \frac{a}{|a|}, \quad (1.3-1)$$