一次方程组及开平方

中国数学会上海分会
中学数学研究委員会編

新知識出版社

一次方程組及开平方

中国数学会上海分会
中学数学研究委員会編

新知識出版社

一九五七年·上海

一次方程組及开平方

中国数学会上海分会
中学数学研究委員会編

新知識出版社出版
（上海湖南路9号）
上海市書刊出版业营业許可証出015号

上海國光印刷厂印刷　新華書店上海發行所总經售

开本：787×1092　1/32　印張：2 1/16　字数：46,000
1957年10月第1版　1957年10月第1次印刷
印数：1—73,000本

統一書号：13076·90
定　　价：(7) 0.20元

序　言

本会为了帮助教师学习苏联先进教学經驗，积极提高教学質量，并根据当前中学教学实际需要，决定編写一套有关初高中数学各科包括算术、代数、几何、三角的教学参考讀物，陆續出版，以便中学数学教师进一步研究和了解教材，从而更好地掌握教材的目的性．同时，这套小册子也可供初高中学生作为課外补充讀物．我們希望通过这套小册子的出版，能促进数学界同志对中学数学教材共同进行研究，并使教学經驗得到广泛的交流．

“一次方程組及开平方”这本小册子是根据“中学数学教学大綱”（修訂草案）中“一次方程組”及“开平方”兩部分編写的．首先說明方程組联立的意义，講述二元一次方程組的各种解法，并对于方程組可否联立的問題加以引申．至于解应用題着重說出布列成一次方程組較布列成一元一次方程为簡便．同时叙述方程的古意和我国古代算書在一次方程組解法上的卓越成就．最后叙述开平方的意义及其方法，主要是由多項式的开平方导出数的开平方．

本会在編写本册前，曾拟就編写計划，經編輯組討論确定編写提綱．然后由代数組同志担任提供材料、写稿、校訂、修正等工作．但由于我們水平有限，缺点是难免的，希望数学界同志予以批評和指正．

中国数学会上海分会中学数学研究委員会

1957年5月

目　录

一　二元一次联立方程

1. 二元一次联立方程的意义

在一元一次方程里面，我們已經說过使方程 $x+y=8$ 成立的 x, y 的值很多．如果我們給 x 的值依次为……$-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$,……，則可依次得另一未知数 y 的对应值．兹列表如下：

x	……$-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$,……
y	……$10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2$,……

那就表明适合这个方程的 x, y 的值不只一組，而有无穷多組．

又如方程 $x-y=2$，我們知道使它成立的 x, y 的值也是很多．同样，如果我們給 x 的值依次为……$-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$,……，則也可依次得另一未知数 y 的对应值．兹列表如下：

x	……$-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$,……
y	……$-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$,……

那就表明适合这个方程的 x, y 的值也不只一組而有无穷多組．

一般說来，方程 $ax+by=c$ (a, b, c 是任意的已知数)叫做二元一次方程．由于它不象一元一次方程 $ax=b (a \neq 0)$ 只含有一个未知数，而适合这个方程的未知数的值只有一个．它含有二个未知数，如果給定其中一个未知数任意一个数值，便可得出适合这个方程的另一个未知数的一个确定数值．因而使它成立的

x,y 的值不只一組，而是无穷多組，那就是說这个方程具有不定性，而满足这个方程的每組值都叫做这方程的解.

但我們要問使方程 $x+y=8$ 和方程 $x-y=2$ 都成立的 x,y 的值.如果給定这兩个方程同一个 x 的值，它們所得的 y 值不一定相同，例如：$x=1$，适合方程 $x+y=8$ 的 y 值是 7，适合方程 $x-y=2$ 的 y 值是 -1；因而如果要适合这兩方程的 y 值也相同，那么我們給定的 x 值便不能任意了.那就是說只能給定 $x=5$，y 才能都是 3.这样，便具有一定性了.

凡兩个二元一次方程成为一組，叫做方程組；如果每一个未知数各表示同一数值时，則此方程組叫做二元一次联立方程.而滿足这兩个方程同一組的数值，叫做联立方程的解.

2.二元一次联立方程的解法

(1) 列表法

上面我們把方程 $x+y=8$ 及 $x-y=2$ 各列成一表，然后在兩表中找出相同的一組 x,y 的值就是联立方程 $\begin{cases}x+y=8\\x-y=2\end{cases}$ 的解.

用这种方法去解联立方程的优点：(i)可以明确一个方程中兩个未知数的相依关系，为以后学习函数打下基础.(ii)可以明确認識为什么二元一次联立方程必須要兩个方程.(iii)某些特殊的二元一次联立方程用列表法去解比用任何方法都簡便.

例如 方程組 $\begin{cases}1452x-1447y=5, & (1)\\337x-348y=-11. & (2)\end{cases}$

由(1)，

x	0	1
y	$-\frac{5}{1447}$	1

，由(2)，

x	0	1
y	$\frac{11}{348}$	1

.

很明显，它們的解是 $\begin{cases}x=1,\\y=1.\end{cases}$

但用这种方法去解联立方程也是有缺点的：(i)对每一方程求出很多組x,y的对应值是相当麻煩的工作，而且当x,y的絕对值比較大的时候更加麻煩．(ii)倘若解里面x,y的值是分数，由于x的值依整数大小而变化，那便更难掌握．(iii)这联立方程的解只有一組呢？还是有二組或更多組呢？也不容易說明．所以这一种解法——**列表法**在初学时，举几个具有整数解的例子是有好处的，但不能强调这种解法．

（2）图象法

在“分式与比例”小册子里面，我們已經知道$y=-x$的图象是一直綫．又因知道兩点即可决定一直綫，故任取兩点，例如：$(0,0)$，$(-3,3)$，即可得出$y=-x$的图象．設于其上每点的縱坐标增加八單位，即可得适合于方程$y=-x+8$（即$x+y=8$）的諸点，故联結此諸点的图象必仍为一直綫，且与$y=-x$的图象平行．

同样，$y=x$的图象是一直綫，我們描出$(0,0)$，$(3,3)$兩点，即可得出它的图象．設于其上每点的縱坐标减少二單位，即可得适合于方程$y=x-2$（即$x-y=2$）的諸点，故联結此諸点的图象必仍为一直綫，且与$y=x$的图象平行．

在坐标平面内很明显地看到这兩直綫相交于一点$(5,3)$．(图1)

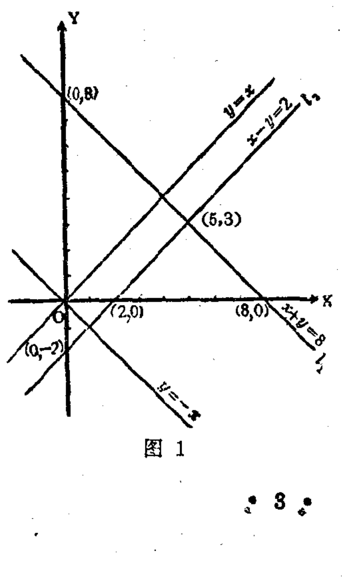

图 1

因为适合于方程$x+y=8$的任一对x,y的值，它的对应的点必在直綫l_1上；又适合于方程$x-y=2$的任一对x,y的值，它的对应的点必在l_2上；所以同时

适合于方程 $x+y=8$ 和方程 $x-y=2$ 的 x,y 的值，它的对应的点必是 l_1 和 l_2 的交点，因而 $x=5,y=3$ 是它們的解.

一般地說，凡 $y=mx+k(k\neq0)$ 的图象，都是平行于 $y=mx$ 的直綫.因二元一次方程 $ax+by=c$ 与方程 $y=-\frac{a}{b}x+\frac{c}{b}(b\neq0)$ 同値，所以它的图象是一直綫.又因知道兩点即可决定一直綫，通常作此直綫时，常取与 x 軸及 y 軸交点即 $\left(0,\frac{c}{b}\right)\left(\frac{c}{a},0\right)$ 較为簡便.所以我們描出 $(0,8),(8,0)$ 兩点即可得 $x+y=8$ 的图象，而描出 $(0,-2),(2,0)$ 兩点即可得 $x-y=2$ 的图象.

又当 $b=0$ 时，二元一次方程 $ax+by=c$ 与方程 $x=\frac{c}{a}$ 同値，它的图象是距离 y 軸为 $\frac{c}{a}$ 的 y 軸的平行綫.

这种解法——图象法，非常直观，且可明了它們仅有一組解.但如果碰到解是分数的时候，从图象上看来，只能获得近似値.所以我們仍然要講述其它的解法.

(3) **比較法**

讓我們来看算术中的和差問題：今有大小二数，和为8，差为2，試求这二数.

設大数是 x，小数是 y，按題意得方程組：

$$\begin{cases} x+y=8; & (1)\\ x-y=2. & (2)\end{cases}$$

由 (1)，　　$y=8-x$，　　(3)

由 (2)，　　$y=x-2$.　　(4)

为了获得方程組的解，我們必須要求同时滿足兩个方程的 y 的値，所以自然会去比較所得的 y 的式子：

$$8-x=x-2,$$

这样一来，我們已經过渡到一元一次方程了.

移項， $-x-x=-2-8,$

合并， $-2x=-10,$

因得 $x=5.$

現在只余下决定 y 了. 以 $x=5$ 代入 (1),

$$5+y=8,$$

得 $y=3.$

由于將 $\begin{cases}x=5,\\y=3\end{cases}$ 代入 (2) 适合，所以它們的解是 $\begin{cases}x=5,\\y=3.\end{cases}$

答：大数是 5，小数是 3.

在这例中，我們获得象一元一次方程一样化为一連串的同値方程組，才能获得最后的解答.即

$$\begin{cases}x+y=8,\\x-y=2;\end{cases}\quad\begin{cases}y=8-x,\\y=x-2;\end{cases}\quad\begin{cases}8-x=x-2,\\x+y=8;\end{cases}\quad\begin{cases}x=5,\\y=3.\end{cases}$$

这种解法叫做比較法.

(4) 代入法

一般情况我們总是把比較法轉变为下面的方法：

解方程組 $\begin{cases}x+y=8, & (1)\\x-y=2. & (2)\end{cases}$

由 (1), $y=8-x,$ (3)

代入 (2), $x-(8-x)=2,$

去括号， $x-8+x=2,$

合并， $2x-8=2,$

移項， $2x=2+8,$

合并， $2x=10,$

因得 $x=5.$

代入(3)，　　$y=8-5=3.$

所以它們的解是　　$\begin{cases}x=5,\\y=3.\end{cases}$

解法的过程明显地表現出应用方程的同値原理化为一連串的同值方程組，才能获得最后的解答．即

$$\begin{cases}x+y=8,\\x-y=2;\end{cases}\quad\begin{cases}y=8-x,\\x-y=2;\end{cases}\quad\begin{cases}x-(8-x)=2,\\\qquad y=8-x;\end{cases}\quad\begin{cases}x=5,\\y=3.\end{cases}$$

解的驗算必須代入兩个方程，本書这个步驟完全省去．这种解法叫做**代入法**．很明显，它的解法原理和比較法是一样的．下面再举兩个例子．

例一　解方程組

$$\begin{cases}10x+3y=17, & (1)\\ 8x-5y=-16. & (2)\end{cases}$$

〔**解**〕　由(1)，　$y=\dfrac{17-10x}{3},$　　(3)

代入(2)，　$8x-\dfrac{85-50x}{3}=-16,$

$$24x-85+50x=-48,$$

$$74x=37,\qquad x=\frac{1}{2}.$$

代入(3)，　$y=\dfrac{17-5}{3}=\dfrac{12}{3}=4.$

所以它們的解是　$\begin{cases}x=\dfrac{1}{2},\\y=4.\end{cases}$

例二　解方程組　$\begin{cases}3x-4y=10, & (1)\\2x-\ \ y=\ \ 0. & (2)\end{cases}$

〔解〕 由(2)， $y=2x$， (3)

代入(1)， $3x-8x=10$， $-5x=10$， $x=-2$.

代入(3)， $y=-4$.

所以它們的解是 $\begin{cases} x=-2, \\ y=-4. \end{cases}$

由例二可知这个解法在某未知数的系数是1时比較方便．又如它的已知項是零，就更为方便．

(5) **代数加法**

讓我們再回到算术中的和差問題．

設 x 为大数，y 为小数，按題意得方程組

$$\begin{cases} x+y=8, & (1) \\ x-y=2. & (2) \end{cases}$$

由于方程組中 y 的系数的絕对値相等而符号相反，这时就可以把(1)(2)的各边对应相加．因为等数加等数仍得等数，所以兩方程左边的和必等于右边的和，而相加的結果 $+y$ 与 $-y$ 兩項被消去了，便得出只含有未知数 x 的方程，即

$$2x=10, \qquad \therefore \quad x=5.$$

又如方程(2)兩边同乘以-1，得

$$-x+y=-2, \qquad (3)$$

(1)+(3)， $2y=6$， $\therefore \quad y=3$.

那就是說方程組 $\begin{cases} x+y=8, \\ x-y=2 \end{cases}$

与方程組 $\begin{cases} 2x=10, \\ 2y=6 \end{cases}$ 的値相同．

所以它們的解是 $\begin{cases} x=5, \\ y=3. \end{cases}$

很容易看出算术中的和差公式：

$$大数=\frac{和+差}{2},\quad 小数=\frac{和-差}{2}$$

即由此得出.

这个解法叫做代数加法.下面再举兩例以熟練这种解法.

例一 解方程組 $\begin{cases}10x+3y=17, & (1)\\ 8x-5y=-16. & (2)\end{cases}$

〔**解**〕

$$\begin{array}{lrl} (1)\times 4, & 40x+12y= & 68,\\ (2)\times -5, & -40x+25y= & 80, \quad (+\\ \hline & 37y= & 148, \end{array}$$

$$\therefore \quad y=4.$$

$$\begin{array}{lrl} (1)\times 5, & 50x+15y= & 85,\\ (2)\times 3, & 24x-15y= & -48, \quad (+\\ \hline & 74x \quad = & 37, \end{array}$$

$$\therefore \quad x=\frac{1}{2}.$$

所以它們的解是 $\begin{cases}x=\dfrac{1}{2},\\ y=4.\end{cases}$

例二 解方程組 $\begin{cases}23x+17y=63, & (1)\\ 17x+23y=57. & (2)\end{cases}$

〔**解**〕

$$\begin{array}{lrll} (1)+(2), & 40x+40y= & 120, & \\ & x+y= & 3, & (3)\\ (1)-(2), & 6x-6y= & 6, & \\ & x-y= & 1, & (4) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} (3)+(4),\\ (3)-(4), \end{array}\quad \begin{cases}2x=4,\\ 2y=2,\end{cases}$$

所以它們的解是 $\begin{cases} x=2, \\ y=1. \end{cases}$

代入法和代数加法是解二元一次方程組的兩种主要方法.一般情况总是兩种解法結合起来做,如上面例一,如果消去 x 得到 $y=4$ 后,

再代入(2), $8x-20=-16$, $8x=4$, $x=\frac{1}{2}$.

如果代入(1),也可得 $x=\frac{1}{2}$. 一般总是代入其对应項系数絕对値較小的方程,因为这样可使得运算过程較簡便.

或先消去 y 获得 $x=\frac{1}{2}$ 后,再代入(2),

$$4-5y=-16, \quad 5y=20, \quad y=4.$$

下面我們再举些例子,里面幷且还有些二元一次分式方程組的解法.

例一 解方程組
$$\begin{cases} 64x-71y=50, & (1) \\ 56x-69y=30. & (2) \end{cases}$$

〔**解**〕 (1)−(2), $8x-2y=20$,

即 $4x-y=10$, 也即 $y=4x-10$, (3)

代入(1), $64x-71(4x-10)=50$,

$64x-284x+710=50$,

$220x=660$, $x=3$.

將 $x=3$ 代入(3),得 $y=4\times3-10=2$.

所以它們的解是 $\begin{cases} x=3, \\ y=2. \end{cases}$

例二 解方程組

$$(2x-y-5):(x+3y-1):(4x-3y-15)=3:-4:3.$$

〔解〕 原方程組即 $\dfrac{2x-y-5}{3}=\dfrac{x+3y-1}{-4}=\dfrac{4x-3y-15}{3}$,

它們有三个方程,但仅有兩个方程是独立的.我們取

$$\begin{cases}\dfrac{2x-y-5}{3}=\dfrac{4x-3y-15}{3}, & (1)\\[2ex] \dfrac{2x-y-5}{3}=\dfrac{x+3y-1}{-4}, & (2)\end{cases}$$

即 $$\begin{cases}x-y=5, & (3)\\ 11x+5y=23, & (4)\end{cases}$$

由(3), $$y=x-5, \qquad (5)$$

代入(4), $$11x+5(x-5)=23,$$

$$16x=48,$$

$$\therefore\ x=3.$$

將 $x=3$ 代入(5),得 $$y=-2.$$

所以它們的解是 $$\begin{cases}x=3,\\ y=-2.\end{cases}$$

例三 解方程組 $$\begin{cases}\dfrac{x+3}{x-2}=\dfrac{y+4}{y-1}, & (1)\\[2ex] 2x+3y=1. & (2)\end{cases}$$

〔解〕 这个方程組中有一个方程是分式方程,便叫做分式方程組.显然,$x=2,y=1$ 是不允許的值;我們在 $x\neq 2, y\neq 1$ 的限制下把方程(1)的分母去掉.即兩边同乘以 $(x-2)(y-1)$,得

$$(x+3)(y-1)=(x-2)(y+4),$$

$$xy-x+3y-3=xy+4x-2y-8,$$

$$5x-5y=5, \qquad \text{即} \quad x-y=1.$$

也即 $$x=y+1, \qquad (3)$$

代入(2), $$2(y+1)+3y=1,$$

$$2y+2+3y=1,\quad 5y=-1,\quad y=-\frac{1}{5}.$$

將 $y=-\frac{1}{5}$ 代入 (3), 得 $x=\frac{4}{5}.$

所以它們的解是 $\begin{cases} x=\frac{4}{5}, \\ y=-\frac{1}{5}. \end{cases}$

由于这組值是允許的，即不使方程(1)的最低公分母$(x-2)(y-1)$为零，所以是原方程組的解.(驗算步驟省去)

例四 解方程組 $\begin{cases} \frac{x+3}{x-2}=\frac{y+4}{y-1}, & (1) \\ 5x-3y=7. & (2) \end{cases}$

〔**解**〕 由 (1), 得 $x=y+1,$ (3)

代入 (2), $5(y+1)-3y=7,$

$$5y+5-3y=7,\quad 2y=2,\quad y=1.$$

將 $y=1$ 代入 (3), 得 $x=1+1=2.$

但 $x=2, y=1$ 是不允許的值，因为可使方程(1)的最低公分母$(x-2)(y-1)$为零，所以它們是增解，而原方程无解. 由这个例可以看到解分式方程組和解分式方程一样，可能引入原方程組所不允許的解，这个不允許的解也是在去分母这个步驟中引进的.

例五 解方程組 $\begin{cases} 0.2x-\frac{3.2-4y}{5}=x+0.16, & (1) \\ \frac{1.2y}{0.3}-\frac{2.5x+1}{y+0.6}=4y-\frac{5}{3}. & (2) \end{cases}$

〔**解**〕 (1)的兩边同乘以 5, $x-3.2+4y=5x+0.8,$

$4x-4y=-4,\quad x-y=-1.$ (3)

(2)即 $$4y-\frac{2.5x+1}{y+0.6}=4y-\frac{5}{3},$$

也即 $$\frac{2.5x+1}{y+0.6}=\frac{5}{3}, \tag{4}$$

两边同乘以 $3(y+0.6)$，得 $3(2.5x+1)=5(y+0.6)$，

$$7.5x+3=5y+3, \quad y=\frac{7.5}{5}x=1.5x, \tag{5}$$

代入(3)， $x-1.5x=-1$. $-0.5x=-1$, $x=2$.

代入(5)， $y=1.5\times2=3$.

由于 $y=3$ 不使(4)的最低公分母 $3(y+0.6)$ 是零，

所以 $\begin{cases} x=2, \\ y=3 \end{cases}$ 是原方程組的解。

例六 解方程組 $\begin{cases} \dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{y}=2, & (1) \\ \dfrac{5}{x}-\dfrac{3}{y}=1\dfrac{3}{4}. & (2) \end{cases}$

〔解〕 这个方程組是一个分式方程組（两个方程都是分式方程），但这例我們可以不用先去分母来解它。

令 $\dfrac{1}{x}=u, \qquad \dfrac{1}{y}=v.$

原方程組即 $\begin{cases} 3u+2v=2, & (3) \\ 5u-3v=1\dfrac{3}{4}; & (4) \end{cases}$

解(3)与(4)，得 $\begin{cases} u=\dfrac{1}{2}, \\ v=\dfrac{1}{4}. \end{cases}$