

简单物质的本构方程 II

9

〔美〕 A.C. 爱林根 主 编
程 昌 钧 俞 焕 然 译



江苏科学技术出版社

现代连续统物理丛书

第九分册

简单物质的本构方程 II

(具有减退记忆的简单物质)

[美] E. H. 迪尔 著

程昌钧 俞焕然 译

江苏科学技术出版社

CONTINUUM PHYSICS

*

Ellis Harold Dill

Constitutive Equations for Simple Materials II

(Simple Materials with Fading Memory)

ACADEMIC PRESS, 1975

现代连续统物理丛书

第九分册

简单物质的本构方程 II

[美] E.H. 迪尔 著

程昌钧 俞焕然 译

出版：江苏科学技术出版社

发行：江苏省新华书店

印刷：江苏新华印刷厂

开本 787×1092 毫米 1/32 印张 5.875 字数 120,000

1983 年 3 月第 1 版 1983 年 3 月第 1 次印刷

印数 1—3,000 册

书号 13196·125 定价 0.64 元

责任编辑 王永发

《现代连续统物理丛书》译序

中国力学学会理性力学与力学中数学方法专业组，于一九七九年八月一日至十九日在兰州大学举办的第一次理性力学讲学讨论会上，来自全国二十七所高等院校和中国科学院力学研究所、计算中心的全体代表共同商定组织翻译由美国普林斯登大学 A. C. Eringen 教授主编的《连续统物理》(卷1—卷4)一书，共分十七分册，争取于一九八〇、八一年内陆续出版，以利于推进我国理性力学的发展。今得江苏科学技术出版社的大力支持，本《丛书》终于和读者见面了。原主编 A. C. Eringen 教授亲自撰就中文版序言，并为本《丛书》在我国翻译出版给予了热情的支持。

理性力学是在近代生产的大量经验事实的基础上，建立起较完备的公理体系，运用物质运动所必须遵循的基本定律，以严密的逻辑思维和推理方法去研究连续介质(简称连续统)的物质运动和变形的一般性规律的力学。它只有二十多年的历史。当然，关于用理性的方法对连续介质运动普遍规律的研究，最早应溯及贝努里、欧拉、柯西等著名的数学家和力学家；理性力学的学科名词也始见于该时。但从十九世纪末至二十世纪中，力学界主要着眼于传统力学在生产实际中的运用，而一度忽视了对连续介质力学的基础理论的探讨。人类工业生产的发展，引用了许多新材料，对原有材料的使用也大大地扩大了范围，只依靠象弹性材料这样简单材料的力学——弹性力学或一般流体力学，显然不能满足人们的生

产要求了。这种情况从一九四五年起开始发生了变化，M. Reiner 和 R. S. Rivlin 等人对橡皮物质大变形的研究，接着一九四八年 J. D. Oldroyd 对流变物质状态方程的研究，逐步为形成近代理性力学创造了条件。C. A. Truesdell, W. Noll 和 B. D. Coleman 等人从一九五八年后提出了更加完善的关于构造物质运动本构方程的公理体系，建立了各类物质本构方程的严密的数学模型，使理性力学形成了一个比较完美的理论体系，澄清了应用力学中关于应力、应变、应力率、应变率等含糊不清的基本概念。在此基础上，对物质进行了分类，确立了简单物质的谱系，并对谱系中各种物质（弹性物质、粘弹性物质、超弹性物质、次弹性物质）的本构方程进行了广泛深入的研究，用逆法或半逆法找到了在有限变形条件下不少问题的精确解。这就把二十世纪初期蓬勃发展起来的应用力学的研究范围大大地推进了一步，即把通用常线性物质方程如 Hooke 弹性体，Maxwell, Voigt 和 Boltzmann 线性粘弹性体，Newton 粘性流体的研究范畴，推进到非线性物质方程的研究范畴，而且考虑了机械变形和热、电、磁各种非线性耦合效应。与此同时，提出了各种新型物质如液晶、微极物质、微态物质、非局部物质、位错连续统的数学模型，并进行了大力的研究。在此基础上，逐步形成了前途十分广阔的新学科、新方向。这一切使我们对客观世界的认识更加深了。理性力学也研究连续统在热、电、磁等和力学的耦合现象，因此，被称为连续统物理。

理性力学与近代数学有着密切的联系，在其发展过程中，用到了近代数学中包括张量分析、微分几何、不变量理论、群论、泛涵分析、拓扑学、解析函数论等许多基础知识。目前，尤其在欧洲业已形成了用纯粹数学来研究力学理论的新学派。

因此，理性力学在其发展过程中，虽曾经历了一段曲折的道路，但经过二、三十年的奋斗，作为连续介质力学的理论基础业已牢牢地树立了自己的地位。在国际上，它强烈地影响着传统的力学教育和力学研究，也大大地增强了力学处理现实生产问题和近代新型工业材料的能力。

A. C. Eringen 主编的《连续统物理》就包括了这一学科的几乎全部的现代成就，所以本《丛书》译名定为《现代连续统物理》。本《丛书》的译审小组成员：钱伟长（组长）、叶开沅、朱兆祥、朱照宣、汪家诤、苗天德、周焕文、张文、段祝平、戴天民。

钱 伟 长

一九七九年十二月八日

于清华园

中 译 本 序

当前,在所有物理学理论的构造中,共有两种基本的数学模型:一是离散体模型,另一是连续统模型。离散体模型认为,物体是由大量具有确定物理性质(如质量、电荷)、彼此又相互吸引而聚集在一起的几何点的集合所组成的。这方面最突出的例子莫过于原子模型了。虽然,对许多物质理论,牛顿力学仍然适用,但原子模型的基本定律则由量子力学所描述的。

连续统模型则引用场的概念去描述物体的几何点,不必去区分构成该物体的一个个粒子间的差异。在物体任一点上可以确定一个密度,例如质量密度、电荷密度和能量密度,不再把它们加以量子化。此外,表面上的点具有面密度,如应力和热流。在连续统模型中运用的物理定律是各种守恒律,此外还由本构方程予以补充。

一个数学模型,不论它是多么的谨严,也决不能真真实实地一丝不差地表达出物质的物理学规律的。外部特征长度(和/或时间)与物体内部特征长度(和/或时间)的比值决定了该物体对外界作用的反应。当外界作用的载荷给出的波长大大超过颗粒(原子)间的距离时,经典场论得到的结果和实验观测相符合。当该比值趋近1时,离散体模型便将取而代之了。但当特征长度的比值小于1时,点粒子(原子)可再度认为具有连续统的特性,这时,可把物体考虑成是由离散的连续体的集合组成的。在这里,我们明确地看到了离散体和连续体这两种模型交织在一起的混合模型。

量子力学是在一种尺度上建立起来的，而相对性场论用的是另一种尺度。这就足以使我们相信，一切离散体的模型和连续统的模型都具有它们理论自身适用的范畴，这种适用性取决于我们所要求的精度。

人们常说，原子模型描述了“真实的世界”。其实，这种说法仍然只是一种个人的喜爱或抱有成见的观点，因为几何点没有尺度就不可能具有诸如质量、电荷这样的物理属性的。相反地，对连续统模型又怎样呢？这里，几何点是用场来描述的。按此逻辑，连续统模型要比离散体模型“更加真实”。其实，这个结论也会给人以一种错觉，因为不可能有纯粹是几何点构造的物体的。

一种理论当它能说明许许多多的物理现象而同时结构简单又具有完美的感染力时才是最有生命力的。

过去的二十年，连续统场论在两个基本方面取得了重大的进展：（一）建立了经典的线性和非线性场论的数学模型，（二）把微极场论和非局部场论引导到具有内部结构的物质研究中去。在另一方面，我们有：非线性弹性理论，流体动力学，与记忆有关的弹性体、与记忆有关的流体、混合物理论以及电磁场理论。我们已毫不含糊地确立了普遍适用于这些场的基本定律，同时本构方程也有了更加坚实牢靠的基础。

研究这些基础理论产生了丰硕的成果。人们不但揭示了在这些乍看上去互不相同的物理场之间存在着基本的结构和统一的原理，而且能够更加深入和广泛地把我们的研究范畴扩大到包括复合介质（固体和流体的混和物、多孔介质）和有电磁场作用的变形介质中去。本专著第二卷和第三卷分别讨论了由单一物质和混合物组成的基本原理和本构理论。

经典场论不包含有内在的特征长度，所以它只限于在宏

观物理学的范畴内应用。随着微极场论和非局部场论的发展，我们进入了具有内部结构的物质领域。属于微极理论和非局部理论应用范畴的例子有：颗粒固体、非结晶材料、复合材料、多孔材料、各向异性流体、悬浮体、血液、液晶和磁性材料等等。诚然，数学上已有了相当多的解可以作为我们的证明，但人们还在期待着有更多的解的到来。非局部场论实际上具有一种潜在的力量，它可以解释和预言在分子和原子尺度范围内发生的物理现象。对这一点，看一看近来在波的传播、位错理论、断裂力学（例如，裂纹尖端问题）等领域内获得的结果便会深信无疑了。本专著第四卷对微极理论和非局部理论进行了讨论，第三卷讨论微磁场理论。可惜的是，在本专著出版的时候，尚无这一方面的更多解法和其他的结果，因而只能暂付阙如。

毫无疑问，一切理论随着时间的流逝，都会对其作出修改，同时会给出更加满意的证明。尽管如此，所有的物理学理论，倘若得以生存，还必须经受住来自实验的严峻考验。有些时候，实验期待着上升到理论的高度（例对液晶），有时，为提出一个决定性的实验却需要得到一些更新的数学解法。

在连续场论发展的过程中，数学的许多分枝起到了重要的作用。本专著第一卷包含的数学内容就是根据编者在撰稿时的喜爱选择的。由于篇幅有限，无奈有不少重要的其他的数学分枝都不在本卷选编之列。

这四卷专著译成中文，本人感到极为荣幸。现代连续场论能和这样广大的中国读者见面，这在开拓其他理论领域和发展科学及技术的应用方面必将产生重大效果。我们希望，中译本的出版也将为加强中美之间的友谊作出贡献。

A · C · 爱林根

一九八〇年五月

主 编 者 原 序

在过去十年里，连续统场论的基础和有关应用都得到了
一些明确而又重大的进展，变形介质的几何学和运动学都已
严格地建立起来了。单一介质、材料的混合物和具有微结构
的材料平衡定律已经形成了。具有单一材料的连续介质的
热力学取得了牢固的基础，而且，在建立混合物和具有化学反
应的介质的热力学方面，也取得了重大的进步。我们已经有了
一个包罗万象的而且严格的本构方程理论，它已成功地应用
于许多特殊类型的材料，例如，非线性弹性体、非牛顿流体、
记忆性材料、混合物以及电磁固体和流体等。除此而外，还
认真地用不同的几何学在各种不同类型的介质中寻找过非线性
静力学和非线性波动学问题的各种解。

面对着这类研究工作的爆炸性的快速发展，即使专家也
很难跟上去、理解它，并把它用在各自的研究工作中去。由于
这个领域的文献既广泛又分散，搜寻、阅读和理解这些文献
的确存在着困难。许多在古典领域中进行研究工作的人员，都
遇到了上述实际困难；不少新形成的学派，还是孤立地工作
着的。

三卷本^①的《连续统物理》就是为各个互不联系的专家和
学者提供必要的基础来阅读连续统物理各个方面的最新文

^① 译注 后来又出了第四卷，主要介绍了在广义连续统的理论的
研究基础上建立起来的微极场论、非局部场论和非局部极性场论。

献。这样,我们希望不同领域的研究工作者能够携起手来,共同工作,而且从其他领域发展的一些强有力的方法中,各自有所借镜。

我们一定要在非线性理论和发展得很完善的古典线性理论以及近似理论之间,建立种种桥梁。通过谨慎地选择问题和选择解法,非线性场论和线性场论在某些应用中将能带来有意义的启发。

这个规划是宏伟的。在建立过程中,常常诱使人们追求详尽。力求完备的心情是不小的。如果我们不注意克服这种意图,常常会使我们偏离基本目标,不仅不能保持头脑清醒,反而引起更多的混乱和失望。所以,我们不得不在许多重要的领域内采取简述,在另一些领域内,力求严加选材。

在第一卷内,我们致力于讨论一些选用的数学方法。每个方法都只能有精简的分量。在连续统物理研究工作中,几乎要用到所有数学领域,哪怕只用一点点,但都有一席之地。我们只选取了数学的六个领域,在连续统物理的发展中,它们都曾占有了中心地位,并曾反复使用过的。它们是张量分析、群论、不变量理论、泛函分析、解析函数论、随机过程。它们都纳入第一卷的第一至第四部分。不幸的是,还有许多数学领域同样地是基础,但只好割爱了。它们包括偏微分方程、积分方程、可微的和拓扑的流形等诸重要领域。

本书的第二卷,致力于单一材料连续统的非线性理论,讲述了变形的几何学和运动学,讨论了平衡定律、热力学和本构理论。第二卷第一部分是基础理论,它专门处理热弹性固体,热粘性统体,塑性力学以及与记忆有关的材料。第二卷第二第三部分涉及固体介质和流体介质的非线性静动力学诸问题的解法。为了阐明使用积分方程和解析函数论的基本数学方

法，这里也处理了线性理论和一些重要的线性混合边界值问题。近似法和数值法同样是重要的，但并未包括在本卷之内。

本书的第三卷致力于混合物、位错和电磁相互作用的连续统理论。

我必须声明：本书得到了许多作者愉快的合作，没有他们的贡献，本书的目的就无法实现。为此，我向他们致谢。我和我的同事之间的友好的讨论，耐心的修订和热忱的工作，经常给我不断的鼓励。

许多文章不仅是已知材料的重新组织，而且包括着作者们的新发现。我们诚恳希望，这些工作不仅对研究人员有帮助，而且也可以供工程和应用科学、应用数学和数学物理的研究生教学学习之用。

目 录

《现代连续统物理丛书》译序.....	I
中译本序.....	IV
主编者原序.....	VII
第1章 内容概述.....	1
第2章 线性粘弹性.....	4
第3章 数学预备.....	17
第4章 非线性本构关系.....	26
第5章 物质对称性.....	39
第6章 减退记忆空间.....	59
第7章 有限线性粘弹性.....	65
第8章 积分型物质.....	78
第9章 开尔芬-沃依特(kelvin-Voigt)物质 的热力学.....	92
第10章 具有减退记忆物质的热力学.....	102
第11章 力学本构关系的热力学限制.....	110
第12章 小变形.....	132
第13章 材料试验.....	138
第14章 流 体.....	155
参考文献	169

第 1 章 内 容 概 述

近代连续统理论的显著特征是探求物质类的一般理论，而不是对特殊的理论作数值计算。在这些近代的研究中，对每一物质类都要寻求物质标架无差异性、物质对称性以及热力学第二定律对于本构方程的限制。已发现了某些很重要的一般结果，使我们能较好地理解物质的性质；而也许最重要的是，近代方法提供了关于想象物质的一个框图。这样一种理论的数学结构是本书研究的主要内容，这种理论对于粘弹性物质是适合的。它是第八分册的第 1.7 节的一个特殊情况。

实际物质在不变应力下显示出一定程度的继续变形，同时在不变应变下显示出应力的衰退。在许多物质中，这些效应是很显著的，而在另一些物质中这些效应则可以被忽略，而且对于一种具体的物质，这些效应的重要性常常强烈地依赖于该物质的温度。为了试图表示和解释有关的现象而发展了流变学理论，并且为了处理行为受限制的物质类，已建立了一些特殊的理论。其中一个重要的特殊理论就是线性粘弹性理论，它将在第 2 章中叙述。线性粘弹性理论包含了能由过去的应力或应变的效应的线性迭加而刻画的那些现象。而更为特殊的线性弹性理论和线性粘性流体理论可以看作是它的特殊情况，因而可以更为完美地叙述，并且由于它们的重要性，所以在单独的章节中作了论述。具有内部结构变化的物质不适合迭加原理，如象屈服，因而它们不包含在粘弹性中。因此，在本分册中我们不涉及塑性。

粘弹性型物质行为的一般理论认为目前的应力状态决定于每一过去瞬时的变形,但却不要求这种关系是线性迭加的。这样的物质被说成是具有过去变形的记忆。它的一般理论已在第八分册第1章中导出。在特殊情况下,当粒子的应力由该粒子的应变历史决定时,这样的物质被说成是简单的。简单物质的力学的一般本构方程在第4章中考虑。关于这种一般本构关系性质的若干结论可直接应用在第8分册第1章中引进的原理而得到。然后,探讨我们所期望的粘弹性型物质的力学行为的各种特殊类型。具有记忆的这一类物质被说成是具有减退记忆的物质类,并且它是本分册的主要的客体。第6章到第13章详细地处理了具有减退记忆的简单物质。

在某些简单运动中,利用物质的对称性可将一般本构关系大大简化。最重要的情况是各向同性物质。简单物质的特殊运动在第5章中讨论。这些结果实际上适用于所有简单物质,而且它们大多都能直接应用于具有减退记忆的物质。

减退记忆理论能够精确地由在某一个希尔伯特(Hilbert)函数空间上的连续可微的本构函数所给定。在第6章中将讨论这个希尔伯特空间的相适应的内积。然后,由这样一个本构函数定义的物质指出粘弹性物质的基本特性。一般本构函数对于物质理论的理性见解是非常重要的。然而,为了计算的目的,必须讨论具体的物质和更特殊的关系。一般理论可以用在泰勒(Taylor)级数中保留所要求的项的方法来得到特殊的关系。在第7章中得到了应变在过去常历史附近的展式,在第8章中得到了在零应变历史附近的展式。这样得到的本构方程确定了一种想象的物质称为有限线性粘弹性物质和积分型物质。当在某种所谓的精确意义下,应变历史是很小时,具有减退记忆的所有物质都能由这些方程来刻画。

简单物质的热力学和力学的统一理论在第9章和在第10章中介绍。这些理论给出了温度对于力学性质的影响，同时也给出了热传导对于应变历史的依赖性。于是，纯力学理论可以看成是属于这个热力学体系的。热力学关系提供了对于力学本构关系的进一步的限制。在第11章中给出了对于有限线性粘弹性和积分型物质的某些热力学限制。

有大量的试验，其中每一个如象拉伸试验那样都可以直接由特殊理论来描述。有许多试验，在其中线性理论适用于有两个非零应力分量的试验。还有很少数的试验具有一个以上的非零的应力分量，在这种试验中一般非线性理论是适用的。关于物质特性试验的评述在第13章中得到。

过去的二十年，在发展具有记忆物质的数学理论的研究方面取得了显著的进展。许多研究者如科尔曼(B. D. Coleman)、诺尔(W. Noll)，和特鲁斯德尔(C. A. Truesdell)对这个理论作出了贡献，其中大部分包含在本分册中。

我们将尽可能地列出普遍公认的经典理论的开创者的文献，并指出大部分理论的年代。在书中还有选择地给出了近代工作的参考文献，但并没有给出全部的文献，因而要对没有被提到的许多很有意义的工作的作者表示歉意。关于文献的全面的评述不能与特鲁斯德尔所做的相比[参见特鲁斯德尔和图平(Toupin)(1960)以及特鲁斯德尔和诺尔(1965)的文献，在那里有大量的原始材料]。

第 2 章 线性粘弹性

波尔兹曼(Boltzmann) (1874)已考虑了物质的松弛和延迟弹性[弹性后效(elastischen Nachwirkung)]。他所给出的线性理论基于如下的假设: 对于一个物质粒子, 为了产生一个给定的应变而要求的应力, 依赖于物质粒子在这之前所有已经经受过的应变。如果先前的应变在同一方向上, 则结果将简化所要求的应力。先前的应变的影响依赖于在给定的应变出现以前的过去了的时间, 并且, 这个影响对很久以前所发生的应变的依赖较小。波尔兹曼还假设, 先前的应变的影响可以迭加。然而, 他还指出, 这样一个“迭加原理”就相当于在时刻 τ 以前的应变, 对于在时刻 t 的应力的影响与在 $\tau \leq t$ 的其他时刻所经受的应变无关, 并且这样的假设将只局限于小应变。

波尔兹曼的理论等价于如下的关系, 即等价于对某一固定的物质粒子而言, 相对于某一固定的标准正交基, 应力张量和应变张量分量之间有下列的关系:

$$(2.1) \quad t_{ij}(t) = c_{ijkl}(0)e_{kl}(t) + \int_0^{\infty} \dot{c}_{ijkl}(s)e_{kl}^t(s)ds$$

式中

$$(2.2) \quad e_{kl}^t(s) = e_{kl}(t-s), \quad 0 \leq s < \infty$$

具有分量 $c_{ijkl}(t)$ 的四阶张量是物质的松弛模量。对于各向同性物质,