

~~246603~~
~~246604~~

中学物理中的数学

林岳武 编著

出版：福建教育出版社

发行：福建省新华书店

印刷：福建新华印刷厂

787×1092毫米 32开本 8.5印张 177千字

1982年5月第一版 1982年5月第一次印刷

印数 1—18,150

书号：7159·654 定价：0.67元

前 言

我们正处在一个科学技术飞速发展的时代！在这个时代里，各门学科已不再是各自“闭关自守”的孤岛，它们彼此交错、互相影响，特别是物理学和数学。物理学中的概括、分析、推理、运算等都与数学的方法广泛地结合在一起。灵活运用数学知识解决物理问题，是每个中学生学好物理的前提，也是将来学习尖端科学的基础。

为了帮助中学生和知识青年切实了解物理与数学的关系，正确认识数学在物理中的作用，并在物理与数学之间架起一座互相通往的桥梁，从而提高运用数学知识来解决物理问题的能力；同时为了引起中学物理教师和数学教师对这方面的重视，加强学科之间联系，特编写了这本书。

本书力求叙述简明扼要，内容由浅入深，例题从易到难，着重帮助读者培养分析推理的能力。

本书的编写仅是一种尝试。由于作者水平有限，错误之处在所难免，恳请读者批评指教。

作 者

1980年10月

目 录

一	物理学与数学的关系	(1)
二	研究物理规律中的数学方法	(7)
	§ 1 借助函数及其图象研究物理规律	(7)
	§ 2 利用比值的特性和极限法建立 物理概念	(35)
	§ 3 依据定量公式论证说明物理现象	(41)
三	解答物理习题中的数理分析	(45)
	§ 1 综合法和分析法	(46)
	§ 2 等量关系分析法	(50)
	§ 3 一些方程的解法	(71)
	§ 4 正负号的物理意义和选取	(111)
	§ 5 实际物理过程与根的取舍	(118)
	§ 6 方程解的物理意义	(125)
四	中学物理中的图解法	(128)
	§ 1 函数图象法	(128)
	§ 2 矢量图解法	(138)
	§ 3 线段图解法	(143)
	§ 4 某些三角方程的图解法	(149)
五	矢量运算及其应用	(153)
	§ 1 矢量的基本知识和运算法则	(153)

§ 2	矢量的表示及其应用	(160)
§ 3	关于同频简谐量的迭加	(176)
六	圆锥曲线和参数方程在中学物理中的应用	(189)
§ 1	圆锥曲线及其应用	(189)
§ 2	参数方程及其应用	(199)
七	中学物理中的误差和近似计算	(208)
§ 1	误差	(210)
§ 2	近似计算	(219)
§ 3	对于微小数值的计算 简略法则	(228)
八	中学物理中的几个有关数学问题	(233)
§ 1	极值问题	(233)
§ 2	物理量的平均值问题	(251)
§ 3	弹性小球与墙壁的碰撞问题	(262)
§ 4	关于三棱镜最小偏向角的证明	(264)

一、物理学与数学的关系

现代科学技术体系中最基础的知识有两门：一门是物理，它研究的对象是客观世界的物质及物质的运动规律；另一门是数学，它培养人们思维、推理和运算的能力。至于其他学科：如地球学、天文学、化学、生物学等都离不开这两门最基础的知识。

物理和数学，既紧密联系，又互相促进，所以有时干脆简称为“数理”学科。

这两门学科之所以有密切联系的主要原因，有如下两点：

一 数学领域内的许多发现和突破经常是由于物理学的需要而引起的。反之，物理学所得到的结果，又往往是数学抽象概括的现实材料。

例如，在研究天体运动规律时，由于行星的运动既不是匀速的，也不是匀变速的，所以初等数学就无法来描述这种变速运动中的时间、位置和速度的复杂关系。为了解决这样的矛盾，就要求数学相应地提出新的概念和方法。正是在这样的历史条件下，开普勒、伽利略、笛卡儿等人对新的数学方法进行了研究。1637年，笛卡儿发表了《几何学》一书，他把变量引进了数学，从而奠定了解析几何的基础。该书把描述运动的函数关系和几何学中曲线问题的研究相结合起

来，这样，点的运动就表现为两个变量 x 和 y 的依存关系。由于变量的引进，数学便突破了旧有的常量数学的界限，因而也就使数学这一学科发生了根本的变革。接着，十七世纪后半叶，牛顿和莱布尼兹又各自独立地建立了作为变量数学中的主要部份的微分学和积分学。从而，使过去需要用特殊方法和技巧才能解决的一些物理问题获得一般性的解决方法。

又如，从单变数到多变数的研究，也是因为物理世界中所遇到的许多数学问题都是三维空间所引起的。

力学中的基本概念（力矩、功、应力，形变等）的概括，构成了矢量分析和张量分析的现实基础。

二 数学在探索和表达物理规律中起着重要作用，推动了物理学的发展。

数学是物理规律和理论的基本表达形式，每种成熟的物理学理论的主要概念都应当经过数学的加工，具有自己精确的数学公式，它们之间的联系用数学方程式来表示。这种方程式，在古典力学中是牛顿方程式，在电动力学中是麦克斯韦方程式，在量子力学中是薛定谔方程式和德布洛依方程式。这些方程式反映着上述理论的主要概念，并表示着它们之间的联系。

数学的研究方法在物理学中是非常重要的研究方法，许多物理问题的突破，都是利用了数学方法的。例如，伽利略把精密的物理实验和数学分析方法结合起来，从而成功地描述了物体自由下落的规律。牛顿利用欧氏几何做工具，建立了他的力学体系，开辟了用数学方法来系统地整理物理学理

论和公式的道路。爱因斯坦用张量分析和黎曼几何做工具，将狭义相对论发展到广义相对论。太阳系的第八个行星——海王星，是英国的亚当斯和法国的勒维列，在探求干扰天王星运行的新星时，依据万有引力定律，利用数学方法先从纸面上计算出来，后由法国的加勒通过望远镜观察到的。

必须特别指出数学在物理学发展中的启发作用。物理学家从表示物理学理论的数学形式中得到启发，产生新的思想，进而用数学假设的方法探索新的奥秘。大家知道，现代物理学中的两大理论——相对论和量子力学，就是先有它们的方程式，然后再进行实验证明的。当然，这绝不是说物理学家只要遵照纯数学公式，就可以闭门造车创造自己的理论。物理学家在得出现代物理学理论的基本方程式时，是遵循一定的物理观念和物理规律的。

近代物理学更是运用数学的最新成果来探讨各种问题的。如原子反应堆、回旋加速器、飞船、卫星等等，这些研究对象都是处于高温、高压、高速的状态，在实验室里难以进行模拟，有些虽能进行模拟，但也要花很大的代价。由于科学和技术的高速发展，现在已初步运用电子计算机进行模拟实验。

总之，物理学的研究向数学提出了新的课题，同时提供了现实模型，促使数学发生变革。而数学研究的成果又给物理学提供了解决问题的更有力的武器，推动了物理学的向前发展。物理学和数学在整个发展道路上，总是互相推动和相互渗透的。

物理学与数学的联系，也同样体现在中学物理与数学中。

数学常常结合具体的物理现象和物理过程，利用物理学原理来阐明抽象的数学概念，并且通过解答具有物理内容的问题，加深对数学定理、公式的理解，以帮助数学知识的巩固。

在物理中，数学的作用不仅是作为计算的工具，而在于运用数学的抽象和研究方法来形成物理概念，解决物理问题。例如：

数学中，点的几何意义是各向尺寸均不考虑的物体（即有确定的位置但没有大小的物体）。在力学里以这个概念为基础，用于质点这一新的概念。它保存了几何点的意义，并加以扩充——略去物体的各向尺寸，但保留原来的质量。当被研究物体的尺寸比所研究的其它物体的尺寸小很多很多时，也可以把这—个物体看做是一个质点。如地球的直径与其绕太阳运转的轨道半径相比，就可忽略不计。

数学上，圆周是圆内接多边形的极限。物理中根据这一概念导出质点做匀速圆周运动时，它所具有的即时速度方向是质点所在圆周上的某点的切线方向，事实上是把圆内接多边形的边做为质点运动时速度的方向，当内接多边形的边数无限增多时，每一边便是圆周上的微小部份，这个微小部份的方向也就是质点的运动方向，同时它又是质点即时速度的方向，因此速度方向就是圆周上该点切线的方向。

数学上，函数关系是表示变量之间的依存制约关系，物理学中广泛地应用它来表达各种物理现象的规律。

数学上的分析法、综合法，等量关系法等，都广泛地应用到中学物理中的推理、分析、综合等方面。

数学中的定理、公式和法则，为中学物理计算提供了各

种途径和方法。

总之，中学物理与数学是息息相关的两门学科。一个中学生物理学习的好坏，很大程度上是决定于他的数学的素养水平。因此，中学物理教学大纲中，规定学生要有运用数学知识来解决物理问题的能力。

上面我们强调了数学在中学物理中的作用，但绝不能理解成可以把物理当作数学来学习，更不能认为数学可以取代物理学。应该肯定，在物理学中对现象及其规律的认识，主要是来自观察和实验，物理概念和物理规律无论在量的方面还是在质的方面都有它自己的特征。下面试举几例说明：

1 许多物理概念除了用文字表达之外，大量的要用数学的公式来表示。这些公式从数学形式上看，都表示数量之间的函数关系，但物理量的定义式（也叫量度式），并不表示数量间的函数关系。如电场强度 $E = \frac{F}{q}$ ，电容器的电容 $C = \frac{Q}{U}$ ，我们能说 E 与 F 成正比，与 q 成反比吗？不能。因为电场强度是表示电场中某一点电场力的性质的物理量，其大小无与电场本身的性质和该点所处的位置有关，与检验电荷无关。同样，我们也不能说电容 C 与 Q 成正比，与 U 成反比。因为电容器电容的大小是由电容器的结构和尺寸决定的，不是由电容器的带电量 and 极板间的电势差决定的。

2 数学中有些定理、定律、法则，在纯数领域内是正确的，但当用到物理现象时，就往往会产生出不完全正确的结果。如： $1+2=3$ ，在纯数领域中，它是永远正确的，但如果是2升酒精和1升水相混合，其体积就不等于3升了。又如： $t^2=25$ ，按数学法则， $t=\pm 5$ ，但时间 t 是物质的属性，它是

永远向前延伸的，不能取负值。因此，纯数的定理、定律和法则受着自然现象的制约，而不是任意的，必须结合具体现象，讨论并修正所得的结果。

3 物理学中对某些概念的理解，也与这些概念的数学含义有所不同。如“无限可分”与“ ∞ ”，在数学意义上，它们是分别描述变量无限缩小和无限增大的变动情况，即“要多小，有多小”、“要多大，有多大”，并不是一个具体的数。但在处理物理问题时，从事物变化的实际过程来分析，“无限可分”就不一定要永远分下去，“ ∞ ”其绝对值也不一定就很大。如匀速运动指的是“任意相等的时间间隔内，物体的位移都相等”的运动，因为时间无限可分，所以这个间隔可以是每十分之一秒、每百分之一秒、每千分之一秒……，但在实际测量中，任何物理仪器的精确度都是有限的，当我们所取的时间间隔已经小于仪器的精确度时，这个时间间隔实际上已无法辨认，因而也就失去了实际意义。据此，对“任意相等的时间间隔”，便可理解为“在实验误差范围内，相等的时间间隔”。又如，弹性小球和墙壁碰撞，墙壁的质量虽然不是“ ∞ ”，但如果与小球的质量比较，两者相差很大，相对而言，就可以把墙壁的质量当作“ ∞ ”处理。“无限带电平面”，“无限长导线”等各种“理想模型”，也都不是绝对的，而是相对的。

以上实例说明，在运用数学方法解决物理问题时，一定要在明确物理内容的基础上，依据物理现象的变化规律来运用数学工具，绝不能把物理概念和规律同数学含义不加讨论地等量齐观。

二 研究物理规律中的数学方法

对任何物理现象的研究，可归结为对该现象的定性研究和定量研究。定性研究是通过观察与实验，以达到认识现象的本质或内在属性；而定量研究则是从实验和观察各个相关对象的量值关系中，总结定律、定理、公式或概念。

要精确和普遍地描述物理概念和规律，经常需要借助于数学。

§ 1 借助函数及其图象研究物理规律

函数是数学中的一种对应规律，而物理世界中各种现象的演变过程也经常存在一一对应的关系，所以，在物理学上经常广泛地应用函数来研究物理规律。

1 总结物理规律

(1) 通过坐标系上的图象，研究总结物理量间的变化规律

物理规律的总结必须以实验和观察为基础。但是，实验和观察是受条件限制的，如实验仪器、测量方法、实验者的技术水平、感官的灵敏度等，都将会导致误差产生，从而使每次测得的数据会不尽相同。因此，要建立所研究的物理量之间的精确关系，确立它们的联系公式，还必须用系统的数学方法对具体的实验和观察的数据，进行整理加工，把经

验的积累提高到理性的概括，从零星的知识中总结出系统性的理论。

在中学物理中，常常通过坐标系上的图象，研究总结物理量间的变化规律。

这种方法是：假定某一个物理量 y 随另一个物理量 x 而变，从实验和观察中测出一系列与 x 相对应的 y 值后，在直角坐标系上把各组测量结果记作一系列的点，再用光滑的曲线把各点连接起来（曲线不一定要通过每一个点，但是，要使曲线尽可能靠近各个点）构成图象，把所得的图象跟已知数学解析式的对应函数图象进行比较，看实验图象与被取作比较的图象中哪一条相近，那么，在一般情况下，这两个相近的图象便属于同一函数图象，并具有同一的数学解析式。

例如，在应用图2—1所示的实验装置，研究一定质量的气体压强与体积的关系时，得到如下数据（表2—1所示）。

表2—1

	V (厘米空气柱长)	P (厘米高水银柱)
1	20	75
2	15	100
3	10	142
4	25	58
5	30	51
6	40	40
7	50	30

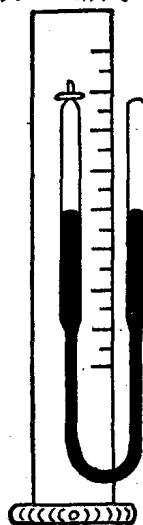


图2—1

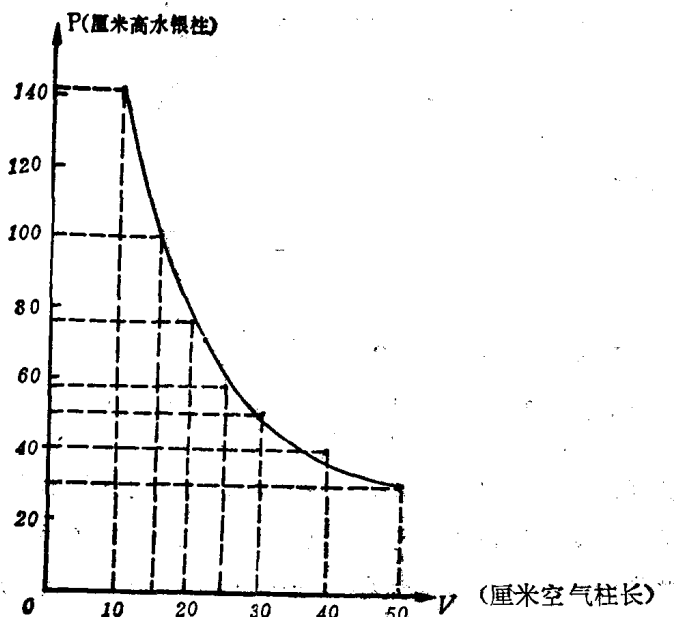


图2—2

用横坐标表示体积 V ，纵坐标表示压强 p ，依据实验数据描点，画出图象（图2—2）。从图中可以看出，它近似于等轴双曲线的一个分支，应具有 $y = \frac{c}{x}$ 的解析式。因此，压强 p 和体积 V 的关系应是：

$$pV = C \quad (C \text{ 为常数})$$

(2) 依据已知的物理规律，运用数学方法导出另一些规律。

利用某些已知的物理量间的变化规律和它们之间的联系公式，经过数学变换，也可以从中导出另一些规律和公式。

例如，物体在恒合外力作用下作匀加速直线运动时，按匀加速直线运动的公式：

$$a = \frac{v_t - v_0}{t} \quad \text{和} \quad a = \frac{v_t^2 - v_0^2}{2s}$$

以及牛顿第二运动定律:

$$F = ma$$

可以得出:

$$F = m \cdot \frac{v_t - v_0}{t} \quad \text{和} \quad Fs = m \frac{v_t^2 - v_0^2}{2}$$

即

$$Ft = mv_t - mv_0 = \Delta P$$

$$FS = \frac{1}{2}mv_t^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \Delta E_k$$

这样, 不仅导出了动量定理和动能定理, 而且从中体现了运动学、动力学和动量定理、动能定理之间的内在联系。

此类例子甚多。但应避免只从公式的数学形式上来理解, 而必须明确公式表达的物理意义。

2 表达物理规律

对于物理规律, 一般有四种表达方式: 文字叙述、公式表达, 图象描绘和列表说明。后三种方式实际上就是函数的三种表示法在物理学上的具体应用。

运用函数的解析式(即公式)来表达物理规律, 可以使各物理量之间的依存制约关系在数量上和本质上更加鲜明、精确和简洁。因此, 物理学中常借助于公式来阐明自然界中力、热、电、声、光等物理现象的规律。

如牛顿第二定律: $\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$, 不仅在量的方面表达了加速度 a 与外力 F 、质量 m 之间的依存制约关系, 规定了这三个物理量所应选取的单位, 而且在质的方面阐明了外力的作用是

使物体运动状态发生变化的原因 (m 一定时, a 与 F 成正比)。而质量 m 则体现了使物体运动状态发生变化的难易程度 (F 一定时, a 与 m 成反比), 即质量是物体惯性的量度。这里, 外力 F 是主动的, 质量 m 是被动的。它还告诉我们, 加速度与外力是瞬时对应的 ($F=0$ 时 $a=0$), 加速度的方向永远与合外力的方向相同。

又如, 动能定理的数学表达式是: $Fs\cos\theta = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$ 。它概括了功与物体运动状态变化之间的联系, 表明合外力做功能使物体的运动状态发生变化, 这个变化可以用 $\frac{1}{2}mv^2$ 这个量的变化来表示, 这个量就定义为物体的动能。这里, 不仅揭示了动能这个物理量的本质, 而且指出了功和动能之间的区别与联系: 动能是反映物体本身运动状态的物理量, 其大小等于 $\frac{1}{2}mv^2$, 物体动能的改变以合外力对它做的功来量度。但动能的大小是由物体的运动状态确定, 而功则是和物体受力并经历位移这个过程相联系。也就是说, 功是“过程量”, 能是“状态量”。

应当指出, 有些物理规律是用一个函数解析式表达不了的, 这时就必须把自变量分成若干区间来表示。例如, 质量为 m , 温度是 T_1K 的冰变化到温度是 T_2K 的水的过程中, 冰所吸收的热量 Q 与温度 T 的函数关系式就应是:

$$Q(T) = \begin{cases} C_{\text{冰}} \cdot m(T - T_1) & (T_1 \leq T < 273) \\ \lambda_{\text{冰}} \Delta m_{\text{冰} \rightarrow \text{水}} + C_{\text{冰}} m(273 - T_1) & (T = 273, \\ \text{这时 } Q \text{ 是 } T \text{ 的多值函数}) \\ C_{\text{水}} m(T - 273) + \lambda_{\text{冰}} m + C_{\text{冰}} m(273 - T_1) & (273 < T \leq T_2) \end{cases}$$

又如，在均匀带电球壳所形成的电场中，其场强大小分布应采用如下公式表示。

$$E(r) = \begin{cases} k \frac{Q}{r^2} & (r > R) \\ 0 & (r < R) \end{cases}$$

$r = R$ 时，场强在球壳上的数值有个跃变。

依据上面二个例子中的函数解析式，我们还可以分别作出如图2—3和图2—4所示的函数图象。

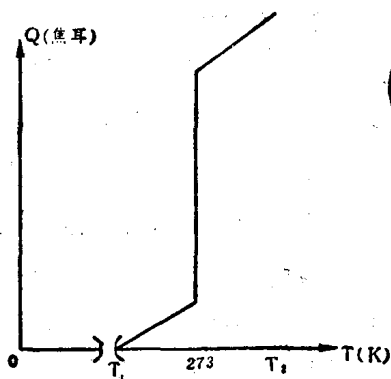


图2—3

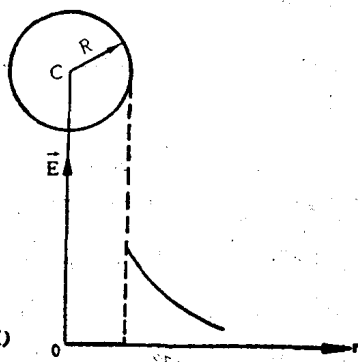


图2—4

从图象中我们更能直观、形象地看出自变量变动时因变量的变动情况，但精确度较差。因此，在表达物理规律时，常常是公式和图象同时并用的。

然而，并不是所有的物理规律都可能或者必须写出它的函数解析式的，有些规律只能采用图象描绘的方法来表示。

例如，分子间的相互作用力 f 与分子间距离 d 的关系，是难以用一个精确的公式来加以表达的。因此，我们便采用图2—5所示的图象来表示它。从图中可以看出：当分子间的距离在几个埃的范围时，它们之间的相互作用表现为互相排

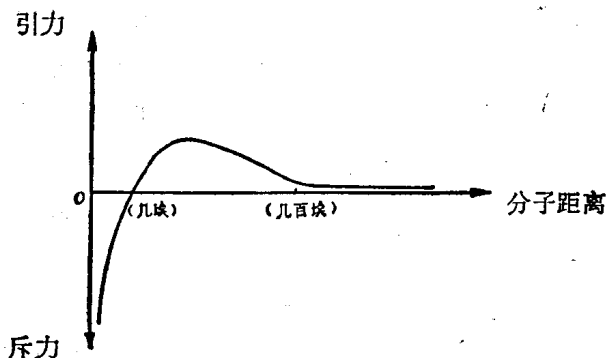


图2—5

斥；当分子间的距离在大于几个埃小于几百个埃的范围时，分子之间的作用表现为互相吸引；距离增大时，吸引力先是逐渐增大，然后逐渐减小，直到分子间的距离大于几百埃时，相互作用力便减小到可以忽略的程度了。

又如，某种负温度系数的半导体热敏电阻，其阻值随温度的变化规律，虽然可以表示成指数关系：

$$R = R_0 e^{\beta \left(\frac{t_0}{t_0 - t} \right)}$$

但是，依据这个公式进行计算是很麻烦的，如果画出电阻的阻值随温度变化的曲线，从图线中找出对应于某一温度 t 的阻值 R ，就方便得多。图2—6表示61—A型热敏电阻的 $t-R$ 曲线。

在设计晶体三极管的有关电路时，要参考该三极管的特性曲线。尽管可以知道反映三极管特性的曲线是一个幂函数，但是写出这个幂函数的解析式，实际上是不必要的，这是因为理论曲线和产品曲线有所不同。如果画出该型号产品的平均曲线，不仅能满足解决实际问题的需要，而且简易方