吴汉洪／主编

GAOJI WEIGUAN JINGJIXUE XITIJI

高级微观经济学

习题集

3

经济科学出版社

高级微观经济学习题集

吴汉洪 主编

经 济 科 学 出 版 社

责任编辑：赵兰芳
责任校对：董蔚挺
技术编辑：邱　天

高级微观经济学习题集
吴汉洪　主编
经济科学出版社出版、发行　新华书店经销
社址：北京海淀区阜成路甲 28 号　邮编：100036
总编室电话：88191217　发行部电话：88191540
网址：www.esp.com.cn
电子邮件：esp@esp.com.cn
北京毕诚彩印厂印刷
河北三河新路装订厂装订
850×1168　32 开　9 印张　250000 字
2003 年 12 月第一版　2003 年 12 月第一次印刷
印数：0001—4000 册
ISBN 7-5058-3834-2/F·3137　定价：18.00 元

图书在版编目（CIP）数据

高级微观经济学习题集／吴汉洪主编．—北京：经济科学出版社，2003.12
ISBN 7-5058-3834-2

Ⅰ.高…　Ⅱ.吴…　Ⅲ.微观经济学－习题
Ⅳ.F016-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2003）第 098461 号

前　　言

学习微观经济学，无论是本科生水平的，还是研究生水平的，都需要做一些练习题。做习题不仅有助于消化和掌握所学的内容，而且可以加深对微观经济学基本概念、基本原理以及基本方法的理解。

尽管目前国内已出版了一些本科生水平的微观经济学习题资料，但研究生水平的微观经济学，即高级微观经济学的习题资料还不多见。本书就是适应广大读者学习高级微观经济学的需要，尤其是国内一些高等学校开设研究生水平的微观经济学的教学需要而编写的。

考虑到目前我国一些高等学校研究生水平的微观经济学教材已具有多样化的趋势，为了使本书具有较为广泛的适用性，本书并不是按照某一本研究生水平的微观经济学教材来编排练习题，而是在广泛参考国内外已出版的研究生水平的微观经济学教材和有关习题资料的基础上，按照九个专题（单元）来编写的，每一单元均按例题、习题和习题参考答案三部分来安排。习题具有一定的代表性，即可单独阅读学习，又是学习高级微观经济学的参考和辅导资料。本书即可供高等学校经济和管理类高年级本科生和研究生学习高级微观经济学使用，也可作为有关课程教师的教学参考资料。

全书结构由我设计，参加本书编写的是吕灿林和张华祝同志，

其中吕灿林参与了第一单元至第三单元以及第七单元和第八单元的编写工作，张华祝参与了第四单元至第六单元以及第九单元的编写工作，最后全书由我修改和统稿。由于我们水平有限，加之时间仓促，书中的差错在所难免，敬请广大读者，尤其是国内同行批评指正。

吴汉洪

2003年10月于中国人民大学经济学院

目　　录

第一单元

消费者行为理论

一、例　　题

[**例题 1.1**]

设效用函数$u(x_1, x_2)=(x_1^\rho+x_2^\rho)^{1/\rho}$，其中$0\neq\rho<1$；这就是常（或不变）替代弹性（CES）效用函数。求相应的瓦尔拉斯需求函数（也称马歇尔需求函数、普通需求函数）、间接效用函数。并验证间接效用函数关于价格与收入是零次齐性的；关于收入 y 是递增的；关于价格 p 是递减的；验证罗伊恒等式。

解：消费者求解规划：

$$\max_{x_1, x_2} \quad (x_1^\rho+x_2^\rho)^{1/\rho}$$
$$\text{s.t.} \quad y-p_1x_1-p_2x_2\geqslant 0$$

列出拉格朗日函数：

$$L(x_1,x_2,\lambda)\equiv(x_1^\rho+x_2^\rho)^{1/\rho}+\lambda(y-p_1x_1-p_2x_2)$$

由于偏好是单调的，在最优解处，预算约束将以等式成立。假设有一个内点解，库恩－塔克条件正好同普通的拉格朗日一阶条件

一致，

$$\frac{\partial L}{\partial x_1}=(x_1^{\rho}+x_2^{\rho})^{(1/\rho)-1}x_1^{\rho-1}-\lambda p_1=0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2}=(x_1^{\rho}+x_2^{\rho})^{(1/\rho)-1}x_2^{\rho-1}-\lambda p_2=0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda}=y-p_1x_1-p_2x_2=0$$

整理，得：

$$x_1=x_2\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{1/(\rho-1)}$$

$$y=p_1x_1+p_2x_2$$

求解，得：

$$x_1=\frac{p_1^{1/(\rho-1)}}{p_1^{\rho/(\rho-1)}+p_2^{\rho/(\rho-1)}}$$

$$x_2=\frac{p_2^{1/(\rho-1)}y}{p_1^{\rho/(\rho-1)}+p_2^{\rho/(\rho-1)}}$$

上式就是消费者的瓦尔拉斯需求函数。如果定义 $r\equiv\rho/(\rho-1)$，便可将瓦尔拉斯需求函数化简为：

$$x_1(p,y)=\frac{p_1^{r-1}y}{p_1^r+p_2^r}$$

$$x_2(p,y)=\frac{p_2^{r-1}y}{p_1^r+p_2^r}$$

将上述两式代入直接效用函数，可得间接效用函数：

$$\begin{aligned}v(p,y)&=\left[(x_1(p,y))^{\rho}+(x_2(p,y))^{\rho}\right]^{1/\rho}\\&=\left[\left(\frac{p_1^{r-1}y}{p_1^r+p_2^r}\right)^{\rho}+\left(\frac{p_2^{r-1}y}{p_1^r+p_2^r}\right)^{\rho}\right]^{1/\rho}\\&=y(p_1^r+p_2^r)^{-1/r}\end{aligned}$$

$v(p,\ y)$ 关于价格与收入是零次齐性的，因为对于任何 $t>0$，有：

$$\begin{aligned} v(tp,ty) &= ty((tp_1)^r+(tp_2)^r)^{-1/r} \\ &= y(p_1^r+p_2^r)^{-1/r} \\ &= v(p,y) \end{aligned}$$

为理解间接效用函数关于收入 y 是递增的，关于价格 p 是递减的，对它求关于收入与任何价格的微分，得：

$$\frac{\partial v(p,y)}{\partial y}=(p_1^r+p_2^r)^{-1/r}>0$$

$$\frac{\partial v(p,y)}{\partial p_i}=-(p_1^r+p_2^r)^{(-1/r)-1}yp_i^{r-1}<0,\quad i=1,2$$

罗伊等式验证如下：

$$\begin{aligned} (-1)\left[\frac{\partial v(p,y)/\partial p_i}{\partial v(p,y)/\partial y}\right] &= (-1)\frac{-(p_1^r+p_2^r)^{(-1/r)-1}yp_i^{r-1}}{(p_1^r+p_2^r)^{-1/r}} \\ &= \frac{yp_i^{r-1}}{p_1^r+p_2^r}=x_i(p,y),\quad i=1,2 \end{aligned}$$

[例题 1.2]

设效用函数为 CES 形式的，$u(x_1,x_2)=(x_1^\rho+x_2^\rho)^{1/\rho}$，其中 $0\neq\rho<1$。求对应的希克斯需求函数、支出函数。

解：由于偏好是单调的，可将支出最小化问题表述为：

$$\begin{aligned} &\min_{x_1,\,x_2} \quad p_1x_2+p_2x_2 \\ &\text{s.t.} \quad u-(x_1^\rho+x_2^\rho)^{1/\rho}=0 \end{aligned}$$

其拉格朗日函数为：

$$L(x_1,x_2,\lambda)=p_1x_1+p_2x_2+\lambda\left[u-(x_1^\rho+x_2^\rho)^{1/\rho}\right]$$

设最优解是内点解，一阶条件为：

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = p_1 - \lambda(x_1^\rho + x_2^\rho)^{(1/\rho)-1} x_1^{\rho-1} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = p_2 - \lambda(x_1^\rho + x_2^\rho)^{(1/\rho)-1} x_1^{\rho-1} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = u - (x_1^\rho + x_2^\rho)^{1/\rho} = 0$$

通过消去 λ，这些式子被简化为：

$$x_1 = x_2\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{1/(\rho-1)}$$

$$u = (x_1^\rho + x_2^\rho)^{1/\rho}$$

令 $r \equiv \rho/(\rho-1)$，可解出希克斯需求函数：

$$x_1^h(p,u) = u(p_1^r + p_2^r)^{(1/r)-1} p_1^{r-1}$$

$$x_2^h(p,u) = u(p_1^r + p_2^r)^{(1/r)-1} p_2^{r-1}$$

将希克斯需求函数代入目标函数，可得：

$$\begin{aligned} e(p,u) &= p_1 x_1^h(p,u) + p_2 x_2^h(p,u) \\ &= u p_1(p_1^r + p_2^r)^{(1/r)-1} p_1^{r-1} + u p_2(p_1^r + p_2^r)^{(1/r)-1} p_2^{r-1} \\ &= u(p_1^r + p_2^r)^{1/r} \end{aligned}$$

[例题 1.3]

设直接效用函数为 CES 形式的，$u(x_1, x_2) = (x_1^\rho + x_2^\rho)^{1/\rho}$，其中 $0 \neq \rho < 1$。试从它对应的间接效用函数推导出支出函数，及从支出函数推导出间接效用函数。

解：已知 CES 直接效用函数的间接效用函数为：

$$v(p,y) = y(p_1^r + p_2^r)^{-1/r}$$

对于任何价格 p 与收入水平 y，由于收入水平 y 等于 $e(p, u)$，所以：

$$v(p, e(p,u)) = e(p,u)(p_1^r + p_2^r)^{-1/r}$$

对于任何 p 与 u 必有：

$$v(p,e(p,u))=u$$

将上述两式联立，可得：

$$e(p,u)(p_1^r+p_2^r)^{-1/r}=u$$

所以支出函数可以写为：

$$e(p,u)=u(p_1^r+p_2^r)^{1/r}$$

下面由支出函数推导间接效用函数。已知与 CES 直接效用函数对应的支出函数为：

$$e(p,u)=u(p_1^r+p_2^r)^{1/r}$$

那么，对于任何价格 p 与效用水平$v(p, y)$，将有：

$$e(v(p,y))=v(p,y)(p_1^r+p_2^r)^{1/r}$$

对于任何 p 与y，有：

$$e(p,v(p,y))=y$$

将上述两式联立，可得：

$$v(p,y)(p_1^r+p_2^r)^{1/r}=y$$

从而，间接效用函数可以写为：

$$v(p,y)=y(p_1^r+p_2^r)^{-1/r}$$

[例题 1.4]

设一间接效用函数为 $v(p,y)=y(p_1^r+p_2^r)^{-1/r}$，试推导与其相对应的直接效用函数。

解： 设 $y=1$，可得到 $v(p,1)=(p_1^r+p_2^r)^{-1/r}$。因此间接效用函数将是最小值函数

$$u(x_1,x_2)=\min_{p_1,p_2}(p_1^r+p_2^r)^{-1/r}$$
$$\text{s.t.}\quad p_1x_1+p_2x_2=1$$

首先，求解最小化问题，然后在解点给目标函数取值，以便形成最小值函数。对于拉格朗日方程

$$L(p_1,p_2,\lambda)\equiv(p_1^r+p_2^r)^{1/r}+\lambda(1-p_1x_1-p_2x_2)$$

一阶条件要求最优解 p_1^*、p_2^* 与 λ^* 满足：

$$-((p_1^*)^r+(p_2^*)^r)^{(-1/r)-1}(p_1^*)^{(r-1)}-\lambda^*x_1=0$$
$$-((p_1^*)^r+(p_2^*)^r)^{(-1/r)-1}(p_2^*)^{(r-1)}-\lambda^*x_2=0$$
$$1-p_1^*x_1-p_2^*x_2=0$$

消去 λ^*，得：

$$p_1^*=p_2^*\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{1/(r-1)}$$

解得：

$$p_1^*=\frac{x_1^{1/(r-1)}}{x_1^{r/(r-1)}+x_2^{r/(r-1)}}$$
$$p_2^*=\frac{x_2^{1/(r-1)}}{x_1^{r/(r-1)}+x_2^{r/(r-1)}}$$

将两式代入目标函数，得：

$$u(x_1,x_2)=\left[\frac{x_1^{r/(r-1)}+x_2^{r/(r-1)}}{(x_1^{r/(r-1)}+x_2^{r/(r-1)})^r}\right]^{-1/r}$$
$$=\left[x_1^{r/(r-1)}+x_2^{r/(r-1)}\right]^{(r-1)/r}$$

定义 $\rho\equiv r/(r-1)$，则：

$$u(x_1,x_2)=(x_1^\rho+x_2^\rho)^{1/\rho}$$

[**例题 1.5**]

设效用函数为 CES 形式的，$u(x_1,x_2)=(x_1^\rho+x_2^\rho)^{1/\rho}$，其中 $0\neq\rho<1$。求与收入 $y=1$ 相关联的反需求函数。

解：对于效用函数 $u(x_1,x_2)=(x_1^\rho+x_2^\rho)^{1/\rho}$，

$$\frac{\partial u(x)}{\partial x_j}=(x_1^\rho+x_2^\rho)^{1/\rho-1}x_j^{\rho-1}\qquad j=1,2$$

将上式乘以 x_j，并加总 $j=1$，2 时的这两个等式；进一步应用反需求函数公式

$$p_i(x)=\frac{\partial u(x)/\partial x_i}{\sum_{j=1}^n x_j(\partial u(x)/\partial x_j)}$$

可求出 $y=1$ 时反需求函数的方程组：

$$p_1=x_1^{\rho-1}(x_1^\rho+x_2^\rho)^{-1}$$
$$p_2=x_2^{\rho-1}(x_1^\rho+x_2^\rho)^{-1}$$

[**例题 1.6**]

跨期消费选择问题。考虑一个两期消费者。假定他的效用函数是 $U=c_1c_2$，其中 c_t（$t=1$，2）表示消费者在第 t 期的消费支出。他的实际收入和预期收入分别为 $y_1=10000$，$y_2=5250$，假设利息率为 5%。试求消费者的跨期最优消费选择。

解：消费者的问题是：

$$\max_{c_1,c_2}\quad c_1c_2$$
$$\text{s.t.}\quad (10000-c_1)+(5250-c_2)(1+i)^{-1}=0$$

列出拉格朗日函数：

$$V^*=c_1c_2+\mu[(10000-c_1)+(5250-c_2)(1+i)^{-1}]$$

令有关的偏导数等于零：

$$\frac{\partial V^*}{\partial c_1}=c_2-\mu=0$$

$$\frac{\partial V^*}{\partial c_2}=c_1-\mu(1+i)^{-1}=0$$

$$\frac{\partial V^*}{\partial \mu}=(10000-c_1)+(5250-c_2)(1+i)^{-1}=0$$

又利息率 i 是 5%，所以可得最优消费支出安排为 $c_1=7500$，$c_2=7875$。对于这些支出，消费者的时间偏好率等于利息率（市场收益率）：

$$\eta_{12}=-\frac{dc_2}{dc_1}-1=\frac{c_2}{c_1}-1=\frac{7875}{7500}-1=0.05$$

效用函数的严格正则拟凹性保证二阶条件得到满足。

二、习　　题

[习题 1.1] 证明如果偏好关系$\succsim$具有完备性（即对于任意 x，$y\in X$，则有 $x\succsim y$，或 $y\succsim x$，或两式都成立）和传递性（即对于任意 x，y，$z\in X$，如果 $x\succsim y$，且 $y\succsim z$，则 $x\succsim z$），即该偏好关系$\succsim$是理性的；那么：

(1) 若 $x\succ y\succsim z$，则 $x\succ z$。

(2) $\succ$既是非自反的，即 $x\succ x$ 永远不成立；又是可传递的，即如果 $x\succ y$，$y\succ z$，则 $x\succ z$。

(3) $\sim$具有自反性（即对于所有的 $x\in X$，$x\sim x$），可传递性（即如果 $x\sim y$，$y\sim z$，那么 $x\sim z$）和对称性（即如果 $x\sim y$，那么 $y\sim x$）。

[习题 1.2] 定义在 $X=R_+^L$ 上的偏好关系$\succsim$。证明：

(1) 如果$\succsim$是强单调的，那么它就是单调的。

（2）如果$\succsim$是单调的，那么它就是局部非饱和的。

（3）如果$\succsim$是弱单调的，并同时具有传递性、局部非饱和性，那么它是单调的。

[习题 1.3] 设$\succsim$为理性偏好关系。证明如果 $u(x)=u(y)$ 意味着 $x\sim y$，$u(x)>u(y)$ 意味着 $x\succsim y$；那么 $u(\cdot)$ 是一个代表$\succsim$的效用函数。

[习题 1.4] 证明若 $u(\cdot)$ 是代表偏好关系$\succsim$的连续效用函数，则$\succsim$是连续的。

[习题 1.5] 证明：设 $u:X\rightarrow R$ 是一个代表偏好关系$\succsim$的效用函数，如果 $f:R\rightarrow R$ 是一个严格递增函数，则函数 $v(\cdot)=f(u(\cdot))$ 也是一个代表偏好关系$\succsim$的效用函数。

[习题 1.6] 证明：设 $x(p,w)$ 为瓦尔拉斯需求函数，如果 $x(p,w)$ 满足弱公理，则 $x(p,w)$ 一定是零次齐次的。

[习题 1.7] 假设某消费者的瓦尔拉斯需求函数为 $x_k(p,w)=\dfrac{w}{\sum_{l=1}^{L}p_l},k=1,2,\cdots,L$，则：

（1）这一需求函数在 (p,w) 上是零次齐的吗？

（2）它满足瓦尔拉斯定律吗？

（3）是否满足弱公理？

（4）求它的斯卢茨基替代矩阵，并判断其是（半）负定的吗？是对称的吗？

[习题 1.8] 消费者在价格为 p'，p'' 时的购买选择分别为 x'，x''。试判断下面的消费组合是否满足弱公理：

（1）$p'=(1,3)$，　$x'=(4,2)$；　$p''=(3,5)$，　$x''=(3,1)$。

（2）$p'=(1,6)$，　$x'=(10,5)$；　$p''=(3,5)$，　$x''=(8,4)$。

（3）$p'=(1,2)$，　$x'=(3,1)$；　$p''=(2,2)$，　$x''=(1,2)$。

（4）$p'=(2,4)$，　$x'=(1,2)$；　$p''=(6,3)$，　$x''=(2,1)$。

[习题 1.9] 考虑只有两种商品的情形。设消费者的效用函数