初等代數複習講義

朱鳳豪
余源慶 編著

龍門聯合書局出版

初等代數複習講義

朱鳳豪
余源慶 編著

龍門聯合書局出版

1. 這是一本初中代數的補充讀物，為已讀過初中代數的讀者參考進修之用。

2. 代數中的符號運算，因式分解，根式和指數運算以及應用問題的立出方程等問題，初學者一般都感覺困難，並且容易搞錯，本書針對這幾點，特為廣泛舉例，詳加分析。更逐步深入以引起讀者鑽研興趣。

3. 這是複習性質的書，所以對於一般教本所有的定義，定理和方法等，大部分略去。祇簡單地，綜合地舉出它的結論和重要的法則。

4. 為了使讀者查考便利起見，本書編排系統與普通教本不同，各種運算，各種方程以及應用問題等（不分方程種類）都分別歸類排列在一起。

5. 本書在1941年初版，對於現在新的教學計劃有許多地方超過範圍，如第8節，第24、25節，第九及第十章等，在初中學生複習參考時均可略去，又應用問題中如遇到立式為二次方程時，就暫時不必去解它。

6. 本書不妥之處，希讀者隨時提出，以便在以後修訂時參考改進。

初等代數複習講義

朱鳳豪　余源慶　編著

龍門聯合書局出版

上海市書刊出版業營業許可證出029號

上海茂名北路300弄3號

新華書店總經售

新中央印刷所印刷

上海康定路158號

開本：787×1092 1/32	印數：56,001－62,000冊
印張：7 22/32	1941年11月第一版
字數：130,000	1955年8月第十八次印刷
定價：(8)七角五分	

代數基本運算律（附等式律）

I. 加法

1. $\begin{cases} a+b=b+a \\ a+b+c=(a+b)+c=(b+c)+a=(c+a)+b \end{cases}$

2. $\begin{cases} (+a)+(+b)=a+b, \quad (-a)+(-b)=-a-b \\ (+a)+(-b)=a-b, \quad (-a)+(+b)=b-a \end{cases}$

3. $\begin{cases} 0+a=a+0=a \\ a+(-a)=0 \end{cases}$

II. 減法

1. $\begin{cases} (+a)-(+b)=a-b, \quad (-a)-(+b)=-a-b \\ (+a)-(-b)=a+b \end{cases}$

2. $\begin{cases} a-0=a, \qquad 0-a=-a \\ a-a=0 \end{cases}$

III. 乘法

1. $ab=ba$

2. $abc=(ab)c=(bc)a=(ca)b$

3. $a(b\pm c)=ab\pm ac$

4. $\begin{cases} (+a)(+b)=ab, \ (-a)(-b)=ab \text{（同號得正）} \\ (+a)(-b)=-ab, \ (-a)(+b)=-ab \text{（異號得負）} \end{cases}$

5. $0\cdot a=a\cdot 0=0$ （a 爲有限數）

6. $a^m\cdot a^n=a^{m+n}$

IV. 除法

1. $\begin{cases}(+a)\div(+b)=a/b,\ (-a)\div(-b)=a/b & \text{(同號得正)}\\(+a)\div(-b)=-a/b,(-a)\div(+b)=-a/b & \text{(異號得負)}\end{cases}$

2. $A/D\pm B/D=(A\pm B)/D$

3.* 設 $A\neq 0$ 則

$0/A=0,\qquad 0/0=$不定

$A/0=\infty$ (或謂不可能)

4. $a^m\div a^n=\begin{cases}a^{m-n} & (\text{設 } m>n)\\1/a^{n-m} & (\text{設 } m<n)\end{cases}$

V. 乘方

1. $(a\cdot b\cdots\cdots)^n=a^nb^n\cdots\cdots$

2. $(a/b)^n=a^n/b^n$

3. $(a^m)^n=a^{mn}$

VI 等式律

1. $\begin{cases}\text{設}\quad a=b \quad \text{則}\ a+c=b+c\\ \text{設}\ a+c=b+c\ \text{則}\quad a=b & \text{(但c須為有限數)}\end{cases}$

2. $\begin{cases}\text{設}\quad a=b \quad \text{則}\quad ma=mb\\ \text{設}\quad ma=mb \quad \text{則}\quad a=b & \text{(m為有限之常數且不為0)}\end{cases}$

3. $\begin{cases}\text{設}\quad a=b \quad \text{則}\quad a^n=b^n\\ \text{設}\quad a^n=b^n \quad \text{則}\quad a=b & \text{(兩邊取主根)}\end{cases}$

4. 設 $A\cdot B\cdot C\cdots\cdots K=0$ 則 $A=0$, 或 $B=0\cdots\cdots$或 $K=0$

* 參考范氏代數 514,515 節

目　錄

第一章 符號定律

1. 負數乘方

$$\left.\begin{array}{l}(-1)^{2n}=1\\(-1)^{2n+1}=-1\end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(\text{公式一})$$

今 n 爲正整數，故$2n$爲2之倍數，即偶數。* 又$2n+1$爲奇數。

故知 **負數之偶次方爲正。奇次方爲負。**

例一 化簡 $(-a^8)\left(-\dfrac{b}{a}\right)^7\left(-\dfrac{1}{b}\right)^6$

[解] 原式$=-a^8\left(-\dfrac{b^7}{a^7}\right)\left(\dfrac{1}{b^6}\right)=ab$

注　意
$(-a^8)=-a^8$
$(-a)^8=a^8$

例二 求證 $(b-a)^2(c-b)^3(a-c)^4=$

$-(a-b)^2(b-c)^3(c-a)^4$

[證] 左邊$=[-(a-b)]^2[-(b-c)]^3[-(c-a)]^4$

$=(a-b)^2[-(b-c)^3][(c-a)^4]$

$=-(a-b)^2(b-c)^3(c-a)^4$

$[-(a-b)]^2$
$=(a-b)^2$
$\neq-(a-b)^2$

2. 去括號及加括號

$$\left.\begin{array}{ll}a+(b-c)=a+b-c & a+b-c=a+(b-c)\\a-(b-c)=a-b+c & a-b+c=a-(b-c)\end{array}\right\}(\text{公式二})$$

---

* 凡2之倍數爲偶數（通常稱爲雙數），非2之倍數爲奇數（通常稱爲單數）。奇數有時亦以 $2n-1$ 式表之。

可知去括號時：

‡括號前爲正號者；去後，括號內各項之符號仍舊不變。

括號前爲負號者；去後，括號內各項之符號均須改變。

反之則在加括號時：

括號前加正號者；加後，括號內各項之符號仍舊不變。

括號前加負號者；加後，括號內各項之符號均須改變。

例 化簡 $a-\{b+[c-(a-\overline{b-c})]\}$

[解] 原式 $=a-\{b+[c-(a-b+c)]\}$

$=a-\{b+[c-a+b-c]\}$

$=a-\{b-a+b\}$

$=a-2b+a$

$=2(a-b)$

*自內及外逐層撤去。 同類項應隨時合併化簡

3. 分式之符號

$$\left.\begin{aligned}&\frac{-a}{b}=\frac{a}{-b}=-\frac{-a}{-b}=-\frac{a}{b}\\&\frac{-a}{-b}=-\frac{a}{-b}=-\frac{-a}{b}=\frac{a}{b}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(公式三)}$$

分數式中之分子，分母前可帶符號，又分數式前亦帶符號。今可知

‡ 符號變更：卽正變爲負，負變爲正。

* 撤去括號亦可自外及內，逐層化簡。方法比由內至外爲簡。惟以學者習于由內化起，今驟易新法反致混淆，容易引起錯誤。本編因此未曾將此法列入。

同時變分子分母前之符號時，分數式前之符號不變；又祗變分子或祗變分母中之符號時，則分數式前之符號隨之改變

［註］上面說明是指簡單分數而言，卽分子分母均爲一個整式。

又所謂分子或分母之符號係指分子或分母之全式而言。

如在例一分子中 $-a-b+c$ 變號後爲 $a+b-c$

又在例二分母中$(b-a)(b+c-a)=-(a-b)(b+c-a)$。

例一 化簡 $\dfrac{-a-b+c}{a+b-c}$

［解］原式$=-\dfrac{a+b-c}{a+b-c}=-1$

例二 化簡 $\dfrac{(a-b+c)(a-b)}{(b-a)(b+c-a)}$

［解］原式$=\dfrac{(a-b+c)(a-b)}{-(a-b)(b+c-a)}=\dfrac{a-b+c}{a-b-c}$

例三 化簡 $\dfrac{(a-b)^3(b-c)^2(a-c)^4}{(b-a)^2(c-b)^3(c-a)^4}$

［解］原式$=\dfrac{(a-b)^3(b-c)^2(c-a)^4}{-(a-b)^2(b-c)^3(c-a)^4}=\dfrac{a-b}{-(b-c)}$

$=\dfrac{a-b}{c-b}$

習 題 一

1. 求證下式：—

a. $(a-b+c)^4=(b-c-a)^4$

b. $(a-b-c)^3=-(b+c-a)^3$

c. $(-1)^{n-1}\cdot(-1)^{n+2}\cdot(-1)^3=1$ （n 爲整數）

2. 化簡下列各式:—

a. $(-a)^3(-a^3)(-a)^2(-a^2)$

b. $\dfrac{-m-n+1}{m+n-1}$

c. $\dfrac{(a-b-c)^2}{(b+c-a)^2}-\dfrac{(a+b-c)^3}{(c-a-b)^3}-\dfrac{a-b+c}{b-a-c}$

d. $\dfrac{(a-b+c)^2(b-a+c)^3}{(b-a-c)^3(a-b-c)^2}$

e. $-1-\{-[-(-\overline{-1})]\}$

f. $a+\{b-[c+(a+b)-(a-\overline{b-c})]-a\}$

g. $\frac{4}{5}x-\frac{1}{2}(\frac{2}{3}y-\frac{1}{2}z)-\{x-[\frac{1}{2}x-(\frac{1}{3}y-\frac{1}{4}z)]-(\frac{2}{3}y-\frac{1}{2}z)\}$

第二章　乘法,除法,二項式定理

4. 乘法公式:

下面幾個公式,爲因式分解之基本 均應熟記。

1. $m(a-b+c)=ma-mb+mc$

2. $(A\pm B)^2=A^2\pm 2AB+B^2$

3. $(A-B)(A+B)=A^2-B^2$

4. $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$

5. $(lx+m)(px+q)=lpx^2+(mp+lq)x+mq$

6. $(A\pm B)(A^2\mp AB+B^2)=A^3\pm B^3$

7. $(A\pm B)^3=A^3\pm 3A^2B+3AB^2\pm B^3$

8. $(A-B)(A^{n-1}+A^{n-2}B+\cdots\cdots+B^{n-1})=A^n-B^n$

9. 如 n 爲偶數,則

   $(A+B)(A^{n-1}-A^{n-2}B+\cdots\cdots-B^{n-1})=A^n-B^n$

10. 如 n 爲奇數,則

    $(A+B)(A^{n-1}-A^{n-2}B+\cdots\cdots+B^{n-1})=A^n+B^n$

11. $(A+B+C)(A^2+B^2+C^2-AB-BC-CA)$

    $=A^3+B^3+C^3-3ABC$

例一 展開 $(a+b+c)^2$

[解] 原式$=[(a+b)+c]^2=(a+b)^2+2(a+b)c+c^2$

$=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca.$

例二 試證 $(x^2-xy+y^2)(x^2+xy+y^2)=x^4+x^2y^2+y^4$

[證] 左邊$=[(x^2+y^2)-xy][(x^2+y^2)+xy]$

$=(x^2+y^2)^2-x^2y^2$

$=x^4+x^2y^2+y^4=$右邊

本題常作公式用

例三 求 $(x+y+z)(x-y-z)(x-y+z)(x+y-z)$ 之積

[解] 原式$=[x+(y+z)][x-(y+z)][x-(y-z)][x+(y-z)]$

$=\{x^2-(y+z)^2\}\{x^2-(y-z)^2\}$

$=\{(x^2-y^2-z^2)-2yz\}\{(x^2-y^2-z^2)+2yz\}$

$=(x^2-y^2-z^2)^2-4y^2z^2$

$=x^4+y^4+z^4-2x^2y^2+2y^2z^2-2z^2x^2-4y^2z^2$

$=x^4+y^4+z^4-2x^2y^2-2y^2z^2-2z^2x^2$

例四 求 $(x+y-1)(x^2+y^2-xy+x+y+1)$ 之積

[解] 原式$=[x+y+(-1)][x^2+y^2+(-1)^2-xy-x(-1)$

$-y(-1)]$

$=x^3+y^3+(-1)^3-3xy(-1)$

$=x^3+y^3+3xy-1$

例五 求 $(x^m-y^m)(x^m+y^m)(x^{2m}+y^{2m})(x^{4m}+y^{4m})$ 之積

[解] 原式$=(x^{2m}-y^{2m})(x^{2m}+y^{2m})(x^{4m}+y^{4m})$

$=(x^{4m}-y^{4m})(x^{4m}+y^{4m})=x^{8m}-y^{8m}$

例六 設 a^2x^2-6abx 爲一完全平方則其缺少之項若何?

[解]　考察　$(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$ 中，有兩項爲完全平方卽 A^2, B^2。

其他之一項 $2AB$ 爲 $\sqrt{A^2}\cdot\sqrt{B^2}$ 之兩倍。故知今所缺少者爲一完全平方之項(假定爲 B^2)。因 $B^2=[2AB\div(2\sqrt{A^2})]^2$，卽 $B=\dfrac{\text{第二項}}{(\text{第一項平方根之兩倍})}$。故設 ax 爲 A，則所求者爲 $\left(\dfrac{-6abx}{2ax}\right)^2=9b^2$

習　題　二

I.　應用公式直接寫出下列各式之積:—

1. $(3a^2b-2c^3)^2$　　2. $(a+b-c)^2$

3. $(a-b-c)^2$　　4. $(a-b+c-d)^2$

5. $(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1)$

6. $(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)$

7. $(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)(x^4-x^2y^2+y^4)$

8. $(1-x)(1+x)(1+x+x^2)(1-x+x^2)$

9. $\left(\dfrac{1}{3}-x\right)\left(\dfrac{1}{9}+\dfrac{x}{3}+x^2\right)$

10. $(a+2)^3+(a-2)^3$

11. $(x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1)$

12. $(x+1)(x^5-x^4+x^3-x^2+x-1)$

13. $(x-1)(x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)$

14. $(x+y+z)(-x+y+z)(x-y+z)(x+y-z)$

15. $(x-y+z)(x^2+y^2+z^2+xy+yz-zx)$

16. $(x+2y)(x-6y)(x-y)(x-3y)$

17. $(x^{2m}+x^m+1)(x^{2m}-x^m+1)(x^{4m}-x^{2m}+1)\cdot$
$(x^{8m}-x^{4m}+1)$

★18. $(x+y)(x^{2m+1}-x^{2m}y+\cdots\cdots$至$2m+2$項)

II. 下各式設為完全平方,試寫出其缺少之項(有理整式):

1. $a^2x^4-abx^2y^2$　　2. $x^2+\frac{1}{4}$

★ 3. $a^{2m+2}b^{2m}x^{2m-2}-3a^{m+2}b^mx^{m+1}$

III. 求下式之商:—

1. $\frac{x^6-y^6}{x-y}$　　2. $\frac{x^6-y^6}{x+y}$

3. $\frac{a^{3m}+b^{3m}}{a^m+b^m}$　　4. $\frac{a^3+b^3-c^3+3abc}{a+b-c}$

5. 分離係數乘法

設兩式均為一個文字之多項式(見例一)或同為兩文字之齊次式(見例二)在乘法演算時,都可以只寫出其係數,不必寫出其文字。此種方法,稱為分離係數法。行分離係數乘法時,須注意下列幾點:

一、先按一個文字之降冪序(或升冪序)整理兩式。

二、同一文字之兩降冪式之積仍為此文字之降冪式‡(設一

★以後凡遇此記號之題目可以略去不做

‡ 設照升冪排列則積亦為升冪式,積之最後一項之次數最高。