

初等代數複習誦義

朱鳳豪 編著
余源慶

龍門聯合書局出版

初等
代數
複習講義

朱鳳豪
余源慶
編著

龍門聯合書局出版

1. 這是一本初中代數的補充讀物，爲已讀過初中代數的讀者參考進修之用。

2. 代數中的符號運算，因式分解，根式和指數運算以及應用問題的立出方程等問題，初學者一般都感覺困難，並且容易搞錯，本書針對這幾點，特爲廣泛舉例，詳加分析。更逐步深入以引起讀者鑽研興趣。

3. 這是複習性質的書，所以對於一般教本所有的定義，定理和方法等，大部分略去。祇簡單地，綜合地舉出它的結論和重要的法則。

4. 爲了使讀者查考便利起見，本書經排系統與普通教本不同，各種運算，各種方程以及應用問題等（不分方程種類）都分別歸類排列在一起。

5. 本書在1941年初版，對於現在新的數學計劃有許多地方超過範圍，如第8節，第24、25節，第九及第十章等，在初中學生複習參考時均可以略去，又應用問題中如遇到立式爲二次方程時，就暫時不必去解它。

6. 本書不妥之處，希望者隨時提出，以便在以後修訂時參考改進。

初等代數複習講義

朱鳳豪 余源慶 編著

★版權所有★

龍門聯合書局出版

上海市書刊出版營業許可證出 029 號

上海茂名北路 300 弄 3 號

新華書店總經售

新中央印刷所印刷

上海康定路 158 號

開本：787×1092 1/32 印數：56,001—62,000 冊

印張：7 22/32 1941 年 11 月 第 一 版

字數：130,000 1955 年 8 月 第十八次印刷

定價：(8)七角五分

代數基本運算律 (附等式律)

I. 加法

- $$\begin{cases} a+b=b+a \\ a+b+c=(a+b)+c=(b+c)+a=(c+a)+b \end{cases}$$
- $$\begin{cases} (+a)+(+b)=a+b, & (-a)+(-b)=-a-b \\ (+a)+(-b)=a-b, & (-a)+(+b)=b-a \end{cases}$$
- $$\begin{cases} 0+a=a+0=a \\ a+(-a)=0 \end{cases}$$

II. 減法

- $$\begin{cases} (+a)-(+b)=a-b, & (-a)-(+b)=-a-b \\ (+a)-(-b)=a+b \end{cases}$$
- $$\begin{cases} a-0=a, & 0-a=-a \\ a-(-a)=0 \end{cases}$$

III. 乘法

- $ab=ba$
- $abc=(ab)c=(bc)a=(ca)b$
- $a(b \pm c)=ab \pm ac$
- $$\begin{cases} (+a)(+b)=ab, & (-a)(-b)=ab \text{ (同號得正)} \\ (+a)(-b)=-ab, & (-a)(+b)=-ab \text{ (異號得負)} \end{cases}$$
- $0 \cdot a=a \cdot 0=0 \quad (a \text{ 爲有限數})$
- $a^m \cdot a^n=a^{m+n}$

IV. 除法

$$1. \begin{cases} (+a) \div (+b) = a/b, & (-a) \div (-b) = a/b \text{ (同號得正)} \\ (+a) \div (-b) = -a/b, & (-a) \div (+b) = -a/b \text{ (異號得負)} \end{cases}$$

$$2. A/D \pm B/D = (A \pm B)/D$$

3* 設 $A \neq 0$ 則

$$0/A = 0, \quad 0/0 = \text{不定}$$

$$A/0 = \infty \text{ (或謂不可能)}$$

$$4. a^m \div a^n = \begin{cases} a^{m-n} & (\text{設 } m > n) \\ 1/a^{n-m} & (\text{設 } m < n) \end{cases}$$

V. 乘方

$$1. (a \cdot b \cdots \cdots)^n = a^n b^n \cdots \cdots$$

$$2. (a/b)^n = a^n/b^n$$

$$3. (a^m)^n = a^{mn}$$

VI 等式律

$$1. \begin{cases} \text{設 } a=b & \text{則 } a+c=b+c \\ \text{設 } a+c=b+c & \text{則 } a=b \text{ (但 } c \text{ 須爲有限數)} \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} \text{設 } a=b & \text{則 } ma=mb \\ \text{設 } ma=mb & \text{則 } a=b \text{ (} m \text{ 爲有限之常數且不爲 } 0 \text{)}$$

$$3. \begin{cases} \text{設 } a=b & \text{則 } a^n=b^n \\ \text{設 } a^n=b^n & \text{則 } a=b \text{ (兩邊取主根)} \end{cases}$$

$$4. \text{設 } A \cdot B \cdot C \cdots K = 0 \text{ 則 } A=0, \text{ 或 } B=0 \cdots \cdots \text{ 或 } K=0$$

* 參考范氏代數 514, 515 節

目 錄

	頁 數
第一章 符號定律	<u>1—4</u>
1. 負數乘方·····	1
2. 去括號及加括號·····	1
3. 分式之符號·····	2
習題一·····	3
第二章 乘法, 除法, 二項式定理	<u>5—17</u>
4. 乘法公式·····	5
習題二·····	7
5. 分離係數乘法·····	8
6. 分離係數除法·····	10
7. ★綜合除法·····	11
8. 二項式定理·····	14
習題三·····	16
第三章 因式分解	<u>18—37</u>
9. 因式分解之意義·····	18
10. 因式分解上應注意之點·····	19
11. 因式分解中之分羣問題·····	21
12. 因式分解實施方法·····	22
習題四·····	34

第四章★ 最高公因式及最低公倍式 38—46

13. $H.C.F.$ 及 $L.C.M.$ 之意義 38
14. $H.C.F.$ 之求法 38
15. $L.C.M.$ 之求法 42

習題五 45

第五章 分式 47—59

16. 最簡分式 47
17. 分式基本運算 48
18. 繁分式化簡 52
19. 分式之數值 54

習題六 56

第六章 無理式(根式)及虛數 60—74

20. 根式概念 60
21. 根式化法公式 60
22. 根式化簡 61
23. 根式基本運算 63

習題七 67

24. 虛數概念 70
25. 虛數及雜數之運算 71

習題八 73

第七章 指數推廣 75—89

26. 指數運算律 75

27. 零指數,負指數,分指數·····	75
28. 指數演算雜例·····	78
習題九·····	82
29. ★多項式之平方根及立方根·····	84
習題十·····	89
第八章 一次方程式 ·····	90--106
30. 方程式之分類·····	90
31. 一元一次方程式之解法·····	91
習題十一·····	92
32. 二元一次聯立方程式之解法·····	93
習題十二·····	98
33. 多元一次聯立方程式之解法·····	99
習題十三·····	105
第九章 一元二次方程式(附分式,根式方程式) ·····	107--133
34. 一元二次方程式之解法·····	107
35. 根之性質·····	110
36. 根與係數之關係·····	111
習題十四·····	112
37. 分式方程式·····	115
習題十五·····	118
38. 根式方程式·····	120
習題十六·····	124
39. 可以用二次方程式解決之方程式·····	125

習題十七	131
第十章 二元二次及高次聯立方程式	134—151
40. 二元高次聯立方程式解法概論	134
41. 一次與二次聯立方程式	135
42. 二元聯立方程式為特殊形式者	135
43. 二元聯立方程式中係數偶合可解者	142
44. ★多元高次聯立方程式	144
習題十八	147
第十一章 應用問題	152—203
45. 應用問題解法概論	152
46. 應用問題例解	155
習題十九	189
第十二章★ 比,比例,等差級數,等比級數	204—216
47. 比	204
48. 比例	204
49. 等差級數	208
50. 等比級數	210
習題二十	214
答案 (附一部分解法提示)	

第一章 符號定律

1. 負數乘方

$$\left. \begin{aligned} (-1)^{2n} &= 1 \\ (-1)^{2n+1} &= -1 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots \text{(公式一)}$$

今 n 爲正整數，故 $2n$ 爲 2 之倍數，即偶數。* 又 $2n+1$ 爲奇數。

故知 負數之偶次方爲正。奇次方爲負。

例一 化簡 $(-a^3)\left(-\frac{b}{a}\right)^7\left(-\frac{1}{b}\right)^6$

[解] 原式 $= -a^3\left(-\frac{b^7}{a^7}\right)\left(\frac{1}{b^6}\right) = ab$

注 意

$$(-a^5) = -a^5$$

$$(-a)^8 = a^8$$

例二 求證 $(b-a)^2(c-b)^3(a-c)^4 =$

$$-(a-b)^2(b-c)^3(c-a)^4$$

[證] 左邊 $= [- (a-b)]^2 [- (b-c)]^3 [- (c-a)]^4$

$$= (a-b)^2 [- (b-c)^3] [(c-a)^4]$$

$$= -(a-b)^2(b-c)^3(c-a)^4$$

$$[- (a-b)]^2$$

$$= (a-b)^2$$

$$\neq - (a-b)^2$$

2. 去括號及加括號

$$\left. \begin{aligned} a+(b-c) &= a+b-c & a+b-c &= a+(b-c) \\ a-(b-c) &= a-b+c & a-b+c &= a-(b-c) \end{aligned} \right\} \text{(公式二)}$$

* 凡 2 之倍數爲偶數（通常稱爲雙數），非 2 之倍數爲奇數（通常稱爲單數）。奇數有時亦以 $2n-1$ 式表之。

可知去括號時：

括號前爲正號者；去後，括號內各項之符號仍舊不變。

括號前爲負號者；去後，括號內各項之符號均須改變。

反之則在加括號時：

括號前加正號者；加後，括號內各項之符號仍舊不變。

括號前加負號者；加後，括號內各項之符號均須改變。

例 化簡 $a - \{b + [c - (a - b - c)]\}$

[解] 原式 $= a - \{b + [c - (a - b + c)]\}$

$$= a - \{b + [c - a + b - c]\}$$

$$= a - \{b - a + b\}$$

$$= a - 2b + a$$

$$= 2(a - b)$$

* 自內及外逐層撤去。

同類項應隨時合併化簡

3. 分式之符號

$$\left. \begin{aligned} \frac{-a}{b} &= \frac{a}{-b} = \frac{-a}{-b} = \frac{a}{b} \\ \frac{-a}{-b} &= -\frac{a}{-b} = -\frac{-a}{b} = \frac{a}{b} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (\text{公式三})$$

分數式中之分子，分母前可帶符號，又分數式前亦帶符號。

今可知

† 符號變更：即正變爲負，負變爲正。

* 撤去括號亦可自外及內，逐層化簡。方法比由內至外爲簡。惟以學者習于由內化起，今驟易新法反致混淆，容易引起錯誤。本編因此未嘗將此法列入。

同時變分子分母前之符號時，分數式前之符號不變；又祇變分子或祇變分母中之符號時，則分數式前之符號隨之改變

【註】上面說明是指簡單分數而言，即分子分母均為一個整式。

又所謂分子或分母之符號係指分子或分母之全式而言。

如在例一分子中 $-a-b+c$ 變號後為 $a+b-c$

又在例二分母中 $(b-a)(b+c-a) = -(a-b)(b+c-a)$ 。

例一 化簡 $\frac{-a-b+c}{a+b-c}$

【解】 原式 $= \frac{a+b-c}{a+b-c} = -1$

例二 化簡 $\frac{(a-b+c)(a-b)}{(b-a)(b+c-a)}$

【解】 原式 $= \frac{(a-b+c)(a-b)}{-(a-b)(b+c-a)} = \frac{a-b+c}{a-b-c}$

例三 化簡 $\frac{(a-b)^3(b-c)^2(c-a)^4}{(b-a)^2(c-b)^3(c-a)^4}$

【解】 原式 $= \frac{(a-b)^3(b-c)^2(c-a)^4}{-(a-b)^2(b-c)^3(c-a)^4} = \frac{a-b}{-(b-c)}$
 $= \frac{a-b}{c-b}$

習 題 一

1. 求證下式：—

$$a. (a-b+c)^4 = (b-c-a)^4$$

$$b. (a-b-c)^3 = -(b+c-a)^3$$

$$c. (-1)^{n-1} \cdot (-1)^{n+2} \cdot (-1)^3 = 1 \quad (n \text{ 爲整數})$$

2. 化簡下列各式:—

$$a. (-a)^3(-a^3)(-a)^2(-a^2)$$

$$b. \frac{-m-n+1}{m+n-1}$$

$$c. \frac{(a-b-c)^2}{(b+c-a)^2} - \frac{(a+b-c)^3}{(c-a-b)^3} - \frac{a-b+c}{b-a-c}$$

$$d. \frac{(a-b+c)^2(b-a+c)^3}{(b-a-c)^3(a-b-c)^2}$$

$$e. -1 - \{ - [- (- \overline{1})] \}$$

$$f. a + \{ b - [c + (a+b) - (a - \overline{b-c})] - a \}$$

$$g. \frac{1}{4}x - \frac{1}{2}(\frac{2}{3}y - \frac{1}{2}z) - \{ x - [\frac{1}{2}x - (\frac{1}{3}y - \frac{1}{4}z)] - (\frac{2}{3}y - \frac{1}{2}z) \}$$

第二章 乘法,除法,二項式定理

4. 乘法公式:

下面幾個公式,爲因式分解之基本 均應熟記。

$$1. m(a-b+c)=ma-mb+mc$$

$$2. (A \pm B)^2 = A^2 \pm 2AB + B^2$$

$$3. (A-B)(A+B) = A^2 - B^2$$

$$4. (x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$$

$$5. (lx+m)(px+q) = lpx^2 + (mp+lq)x + mq$$

$$6. (A \pm B)(A^2 \mp AB + B^2) = A^3 \pm B^3$$

$$7. (A \pm B)^3 = A^3 \pm 3A^2B + 3AB^2 \pm B^3$$

$$8. (A-B)(A^{n-1} + A^{n-2}B + \dots + B^{n-1}) = A^n - B^n$$

9. 如 n 爲偶數,則

$$(A+B)(A^{n-1} - A^{n-2}B + \dots - B^{n-1}) = A^n + B^n$$

10. 如 n 爲奇數,則

$$(A+B)(A^{n-1} - A^{n-2}B + \dots + B^{n-1}) = A^n + B^n$$

$$11. (A+B+C)(A^2+B^2+C^2-AB-BC-CA)$$

$$= A^3 + B^3 + C^3 - 3ABC$$

例一 展開 $(a+b+c)^2$

$$[\text{解}] \quad \text{原式} = [(a+b)+c]^2 = (a+b)^2 + 2(a+b)c + c^2$$

$$=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca.$$

例二 試證 $(x^2-xy+y^2)(x^2+xy+y^2)=x^4+x^2y^2+y^4$

[證] 左邊 $=(x^2+y^2)-xy)(x^2+y^2)+xy]$

$$=(x^2+y^2)^2-x^2y^2$$

$$=x^4+x^2y^2+y^4 \quad \text{右邊}$$

本題常作
公式用

例三 求 $(x+y+z)(x-y-z)(x-y+z)(x+y-z)$ 之積

[解] 原式 $=[x+(y+z)][x-(y+z)][x-(y-z)][x+(y-z)]$

$$=\{x^2-(y+z)^2\}\{x^2-(y-z)^2\}$$

$$=\{(x^2-y^2-z^2)-2yz\}\{(x^2-y^2-z^2)+2yz\}$$

$$=(x^2-y^2-z^2)^2-4y^2z^2$$

$$=x^4+y^4+z^4-2x^2y^2+2y^2z^2-2z^2x^2-4y^2z^2$$

$$=x^4+y^4+z^4-2x^2y^2-2y^2z^2-2z^2x^2$$

例四 求 $(x+y-1)(x^2+y^2-xy+x+y+1)$ 之積

[解] 原式 $=[x+y+(-1)][x^2+y^2+(-1)^2-xy-x(-1)$

$$-y(-1)]$$

$$=x^3+y^3+(-1)^3-3xy(-1)$$

$$=x^3+y^3+3xy-1$$

例五 求 $(x^m-y^m)(x^m+y^m)(x^{2m}+y^{2m})(x^{4m}+y^{4m})$ 之積

[解] 原式 $=(x^{2m}-y^{2m})(x^{2m}+y^{2m})(x^{4m}+y^{4m})$

$$=(x^{4m}-y^{4m})(x^{4m}+y^{4m})=x^{8m}-y^{8m}$$

例六 設 a^2x^2-6abx 爲一完全平方則其缺少之項若何?

[解] 考察 $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$ 中, 有兩項爲完全平方即 A^2, B^2 。

其他之一項 $2AB$ 爲 $\sqrt{A^2} \cdot \sqrt{B^2}$ 之兩倍。故知今所缺少者爲一完全平方之項(假定爲 B^2)。因 $B^2=[2AB \div (2\sqrt{A^2})]^2$, 即 $B = \frac{\text{第二項}}{(\text{第一項平方根之兩倍})}$ 。故設 ax 爲 A , 則所求者爲

$$\left(\frac{-6abx}{2ax}\right)^2=9b^2$$

習 題 二

I. 應用公式直接寫出下列各式之積:—

1. $(3a^2b-2c^3)^2$

2. $(a+b-c)^2$

3. $(a-b-c)^2$

4. $(a-b+c-d)^2$

5. $(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1)$

6. $(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)$

7. $(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)(x^4-x^2y^2+y^4)$

8. $(1-x)(1+x)(1+x+x^2)(1-x+x^2)$

9. $\left(\frac{1}{9}-x\right)\left(\frac{1}{9}+\frac{x}{9}+x^2\right)$

10. $(a+2)^3+(a-2)^3$

11. $(x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1)$

12. $(x+1)(x^5-x^4+x^3-x^2+x-1)$

13. $(x-1)(x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)$

14. $(x+y+z)(-x+y+z)(x-y+z)(x+y-z)$

15. $(x-y+z)(x^2+y^2+z^2+xy+yz-zx)$

16. $(x+2y)(x-6y)(x-y)(x-3y)$

17. $(x^{2m}+x^m+1)(x^{2m}-x^m+1)(x^{4m}-x^{2m}+1) \cdot (x^{8m}-x^{4m}+1)$

★18. $(x+y)(x^{2m+1}-x^{2m}y+\dots\dots\dots\text{至}2m+2\text{項})$

II. 下各式設為完全平方，試寫出其缺少之項(有理整式)：

1. $a^2x^4-abx^2y^2$

2. $x^2+\frac{1}{4}$

★3. $a^{2m+2}b^{2m}x^{2m-2}-3a^{m+2}b^mx^{m+1}$

III. 求下式之商：—

1. $\frac{x^6-y^6}{x-y}$

2. $\frac{x^6-y^6}{x+y}$

3. $\frac{a^{3m}+b^{3m}}{a^m+b^m}$

4. $\frac{a^3+b^3-c^3+3abc}{a+b-c}$

5. 分離係數乘法

設兩式均為一個文字之多項式(見例一)或同為兩文字之齊次式(見例二)在乘法演算時，都可以只寫出其係數，不必寫出其文字。此種方法，稱為分離係數法。行分離係數乘法時，須注意下列幾點：

一、先按一個文字之降幕序(或升幕序)整理兩式。

二、同一文字之兩降幕式之積仍為此文字之降幕式†(設一

★以後凡遇此記號之題目可以略去不做

†設照升幕排列則積亦為升幕式，積之最後一項之次數最高。