

蘇聯科學專著譯叢

概率論基本概念

{ 柯爾莫哥洛夫著
丁壽田譯 }

商務印書館

蘇聯科學專著譯叢



概 率 論 基 本 概 念

柯爾莫哥洛夫 著
丁壽田 譯

商 務 印 書 館



A. H. КОЛМОГОРОВ
ОСНОВНЫЕ ЛОЖАТНИИ ТЕОРИИ
ВЕРОЯТНОСТЕЙ

蘇聯科學專著譯叢
概 率 論 基 本 概 念
丁 壽 田 譯

★版權所有★
商 務 印 書 館 出 版
上海河南中路二一號
中 國 圖 書 發 行 公 司 發 行
商 務 印 書 館 北 京 廠 印 刷
(54006)

1952年5月初版 1953年3月再版
印數2,501—4,500 定價¥11,000

譯者緒言

在現實世界裏，我們還有一些尙未能掌握條件使其發生惟一結果的現象，所謂‘或然現象。’按唯物辯證法的觀點，或然現象與必然現象是並存的，是可以相互滲透並且相互轉變的。正是因為這樣，我們的世界並不是機械唯物論者所認為一切均歸‘宿命’的世界；也不是機會主義者所認為一切均屬‘偶然’的世界；而是一個有規律的，可以循着自然規律來加以控制、加以推動、加以改造的世界。或然現象個別看來，好像是雜亂無章；但從集體看來，則也自有其一定的規律。概率論就是一種處理這類‘集體性規律’的工具。它可以使或然現象也漸漸進入我們掌握之中。李森科說：‘科學是機會的仇敵。’概率論到了蘇聯進步科學家手裏，也正成為一種針對着‘機會主義’來進攻的科學武器。這一點意思在一般新哲學書裏都講得很明白（例如羅遜塔爾氏‘唯物辯證法’及米丁氏‘新哲學大綱’等）。在格涅堅科氏一九五〇年那篇重要報告‘概率論及對現實世界的認識’中講得尤為透徹（這篇報告已譯成中文，載‘科學通報’一卷八期），當然無待我在此再多說了。

蘇聯近三十多年來數學的發展有幾個重點。概率論就是其主要重點之一。這方面的發展在蘇聯經濟建設上有種種重要的應用，尤

其是對於高度發展的工業技術、國防科學、以及物理學、統計學等等，有很多的貢獻。關於這些情況，新近去世的蘇聯科學院院長瓦維洛夫先生在其‘蘇聯科學三十年’小冊子裏有扼要的申述（見俄文本 46 頁或英文本 39 頁）。在‘蘇聯數學三十年’一書裏則有一篇關於近三十年來蘇聯概率論及數理統計學方面新發展的綜合報告，是柯爾莫哥洛夫與格涅堅科這兩位權威合寫的，講得尤為詳細。後面還附有在此期間這方面的文獻目錄，計列舉了專家一百二十餘人，論著五百餘種（見該書 701 至 756 頁）。

概率論雖然在蘇聯生產工作、國防建設及自然科學等方面有了這麼多的實際貢獻，並且這麼被國家所重視，但在另一些方面，例如在政治經濟及其他社會科學方面，則概率論並沒有那麼大的用處。所以我們要認清它的固有地位及應用範圍，不可以過於誇張；尤其不可以把它泛泛地看作是全部統計學的基礎，以免發生觀點上的錯誤。蘇聯中央統計局撒包利氏曾指明：並不是一切統計裏都包含概率。他說：‘有許多統計對象與概率論沒有任何的聯系。’同時他又說：‘概率論也很重要，特別是在進行一切抽樣研究時很為重要。’這幾句話是很正確的（見‘新統計論叢’ 73 頁）。

概率論過去曾被一些資產階級生物學家及統計學家所過火強調並盲目亂用，以致發生了許多錯誤。即便在蘇聯，這方面的錯誤以往也是不能完全避免的。在上面所說那篇格涅堅科氏的報告裏舉出過一些例子（見‘科學通報’一卷八，541 頁）。這也是因為生物科學中的問題不像工業技術及物理科學中的那樣單純而明確，所以處理起來特別需要謹慎。但是我們也不必就因噎而廢食。

概率論也曾由於一些資產階級學者的歪曲而遭受‘機會主義’的

誤解。這正是因為對概率論沒有正確認識的緣故。現在這本柯爾莫哥洛夫氏的小冊子，其目的就是要在集合論及容度論的明確基礎上把概率論基本概念嚴格地建立起來。他這種新觀點發表了已十幾年，早為全世界科學家所推重，格涅堅科氏最近還說過：‘這種方法……現時為大多數概率論方面數學家所採取’（見‘科學通報’一卷八，548頁）。波葉夫氏也說過：‘柯爾莫哥洛夫氏的概率論公理系統論獲致了廣大的聲望與普遍的贊許。’（見蘇聯‘數學教育雜誌’1951年六月號第3頁）。

柯爾莫哥洛夫氏不但是概率論方面的領導者，他在蘇聯數理哲學方面也佔着重要的地位。他嚴格批判過專門玩弄空虛概念的‘形式主義’。他反對抱形而上學觀點的人硬把近世數學中的‘抽象形式’曲解為‘空虛無內容’的東西。我們應該明白：數學中的所謂‘抽象形式’，實際上是‘具體的共相’，是事物的‘類型’，是由個別的特殊的事物中聯系貫通而得的‘通性’或‘普遍性’。例如，‘兩頭牛加三頭牛等於五頭牛’，‘兩把斧子加三把斧子等於五把斧子’，……無數這類的具體事實聯系貫通起來，纔得到一個總結性的抽象式子‘ $2+3=5$ ’。這個式子就好比是說：‘兩隻空筐子加三隻空筐子等於五隻空筐子。’空筐子裏是可以裝進種種東西去的。筐子的‘空’正是為得要能裝東西，並且為得要能裝更多樣的東西，為得要能有更廣大更普及的應用。如果筐子是實心的，就裝不進東西去了；如果永遠只裝着一樣東西不許倒出來，用處就太少了；如果拖泥帶水不肯洗刷乾淨，用起來也就不方便了。科學的任務正是要製造這類筐子，正是要建立這些類型性的規律。倘若我們沒有對個別事物加以聯系貫通的能力，則我們的知識只不過是繁瑣片斷的經驗堆積，不能把握一般的原則，這

就成了所謂‘經驗主義’。有些人忘記了抽象知識的具體來歷，忘記了當初製造空筐子的目的，竟以為筐子根本只該是掛在空中玩賞玩賞的，這就成了所謂‘形式主義’。所以形式主義是一種‘只看看樣子與外表’的主義，是一種‘脫離實際’的主義。這決不可以與‘由具體中來又能回到具體中去’的科學抽象形式混為一談。總之，‘抽象形式’是要的，而‘形式主義’是要不得的；這就如同‘經驗’是要的，而‘經驗主義’是要不得的一樣。恩格斯說過：‘純正數學以客觀世界的空間形式及數量關係為對象，所以其材料是很真實的。’（見‘反杜林論’法文本卷 1，37 頁）。列寧也說過：‘知識是人類對自然的反映。但這不是單純的直接的完全的反映，而是一串概念及規律的抽象化定形及形成過程等等。’（見‘哲學筆記’1938 俄文版 176 頁）。從這些話裏也可以了解科學上抽象形式的本質。

柯爾莫哥洛夫氏的概率論公理系統論也就是以上面所說的觀點來建立的。這樣使得概率論的結構更為精嚴緊湊，而內容更為豐富，應用的範圍亦更為廣大。

由於蘇聯概率論發展在國際上的重要地位，這本小冊子最初是被邀請用德文寫成的；後來亦譯成了俄文。兩種版本字面上不免互有出入，但內容是完全一致的。我這中文譯本辭句斟酌取捨於兩種版本之間，而大致以直譯為原則。譯名大體順從已經通行的習慣，德文本中曾有一些小疏漏，俄文本中已校正了一部分；剩下來的我也就所見為之訂正一二。我自覺譯筆很為生硬，尤其是包含術語及數學式子的複雜句子更為繞口。這種地方我連採用意譯法也仍不能有何改進。這當然是我文字根基太壞的緣故。深望讀者看到不順眼的地方，隨手惠予修改幾句樣子，以資觀摩，不勝感盼之至！

本書是一種專門性質的提要報告，原不是爲一般讀者寫的，所以默認讀者已具有相當的數學準備，爲便於一般讀者起見，譯者謹將本書作爲出發點的集合論基本概念加以摘要的介紹，附於書末。有了這一點準備知識，或許足夠使一般讀者也能了解柯氏此書中概率論公理系統如何建立起來，以及通常統計教本中常牽涉到的‘車貝謝夫定理’‘大數定律’等概念的正確講法（這只要大略看看開頭兩章及後面的少數節目就夠了）。至於要了解全書，則至少還需要勒貝格積分等較深的數學常識。這當然也就不是一個簡短的附錄所能有實際幫助的了。

本譯稿完成後有人希望在緒言中把近年蘇聯概率論的新發展及變化加以較具體的介紹。現在我即由最近蘇聯文獻中摘錄幾段話來作補充。

關於蘇聯概率論新發展情況，格涅堅科氏在前面所引那篇一九五〇年的報告裏曾這樣扼要地說：

‘蘇聯的概率論學派在發展及創造一般理論，以及在解決曾發生並仍在發生於自然科學、技術、軍事等中的具體問題方面，都有很重要的成就。

首先於此應提起 A. H. 柯爾莫哥洛夫與 A. H. 欣金所創立的關於斯篤哈斯基過程的一般理論，這理論對於物理學的發展表現了並繼續表現着重要的作用。此外，我們不能漏過證驗統計假設的觀點，這觀點是在蘇聯數學家們的著作中所發展的，主要是在柯爾莫哥洛夫及 H. B. 斯米爾諾夫的著作中。

其次，要指出有關電話、流體激流論、礫論、金屬結晶、紡織工業、機械的準度等大量問題之解。這些問題不僅是由蘇聯概率論學派的

代表者所解決，而且其解是很廣泛地應用到我們的生產、我們的科學之上。’（‘科學通報’一卷八，541 頁）

關於概率論最近在工業大量生產中的應用情況，他曾這樣說：

‘在大量生產的品質管制方面，統計方法起着很大的作用。在近世製造的技術中，檢查產品品質的過程往往比製造它還費更多的時間。做無管制的生產是不可能的。如此，在工廠中有了很龐大的管制人員編制，他們爲了達成一個目的：就是決定損壞部分而把這些損壞分離開來。顯然在有損壞的企業中生產組織不應當只依着簡單的察出損壞百分比的路線，而是依着與損壞的生產鬥爭的路線。

這種途徑的一個就是在企業工作中提高精確等級。對於大量生產這途徑往往是不允許的，因爲它可以引到生產價格的顯著提高及產品出產數量的驟然降低。應當尋別的途徑，這種途徑是有的。這途徑並不是在生產中廢棄做壞了的產品，而是對生產品質的日常管制的統計方法。引入這種組織方法到生產過程中可以得出最有益的結果：顯著地降低損壞並同時顯著地減少管制者的數目。這裏整個的事情乃是引入管制的統計方法使得可能預防發生生產損壞，如此就沒有在隨後全面考察一切這些生產成品的品質的必要了。因此，在多數高等工業學校中都教概率論及數理統計學。’（同上 545 頁）

蘇聯中央統計局皮撒列夫氏也曾說：

‘在許多企業中正廣泛地應用統計方法去監督產品的質量、研究生產中的廢品、研究收穫量等。統計學是繁雜的工業生產計劃工作和蘇維埃農業技術計劃工作的一個武器。’（‘新統計論叢’，68 頁）

沙文斯基氏也曾說：

‘在社會主義經濟條件下，除增加產品的數量外，改善產品的質

量也是很重要的事情。’(‘工業統計學教程’，第一分冊，207 頁)

他又說：

‘在大規模生產中，(產品質量的)全面研究往往不可能周密地進行。有時候甚至完全不可能應用這種方法。因為在某種情形下，質量的檢查亦即意味着檢查對象的全部破壞(電燈耐久性的檢查，紗線韌度的檢查等)。在這種情況下，就表現抽樣觀察法的意義。……最近幾年中，各種各樣的抽樣觀察法，日益廣泛地被採用於各企業之中。’(同上，217 頁)

最近波葉夫氏也說過：‘眼下蘇聯數學家們做成了對國民經濟很重要的生產檢查計劃，這就是以數理統計學與概率論做根據的。’(見蘇聯‘數學教育雜誌’1951 年六月號，第 4 頁)

上面這幾段話裏特別值得我們注意的是：最近幾年來蘇聯在概率論的應用上有一種主要的新發展，就是‘以統計抽樣方法來解決工業生產的品質管制問題’，並且‘因此高等工業學校都添授概率論及數理統計學課程’，如此使得概率論及數理統計學能更密切地‘聯系經濟建設的實際’，而形成一條更正確的發展路線。

現在我們的工業化亦已漸漸進入要注意‘質量問題’的階段了(尤其是東北)。因此概率論這種武器也是值得我們開始來加以注意的。

原 序

這小冊子的目的是要給概率論奠定公理的基礎。作者的主要宗旨是要把一向顯得特異的概率論基本概念也很自然地歸入近世數學一般概念的行列裏去。在勒貝格(H. Lebesgue)氏容度論及積分論未產生以前，這問題是幾乎沒有解決希望的。有了勒貝格氏的研究以後，集合容度與事件概率間的相似性以及函數的積分與隨機變數的數學期望間的相似性乃明如指掌了。這相似性還可以更推進一步：例如獨立隨機變數的許多性質與正交函數的相應性質是完全相似的。爲要由這種相似性出發來奠定概率論的基礎，我們還須使容度論及積分論能解脫幾何元素。這種解脫勒貝格氏尚未做到，但現在已爲弗萊歇氏(M. Fréchet)所完成。

這種廣義觀點的概率論的建立，若干年來已在數學界流行；但對整個系統的完備而不繁瑣的敘述則至今還沒有。(但有一本弗雷歇氏的書正在排印中，書名見參考文獻目錄 Fréchet [2].)

我在此不妨再指出有幾點以後所要講的東西，是超出上面所說一般專家所熟悉的概念範圍以外的。這些是：無限多度空間中的概率分佈(第三章，§4)，數學期望按一個變數的微分與積分(第四章，§5)，尤其是條件概率及條件期望的理論(第五章)。在此要特別

指明的是：這些新概念與新問題是必然地由若干極具體的物理問題中發生出來的†

第六章包含一些欣金 (А. Я. Хинчин) 先生與作者關於尋常及加強大數定律的應用的新結果 (證明從略)。* 在文獻目錄中舉了一些新著作, 這些在概率論基礎問題的觀點上看來是會感覺興趣的。

欣金先生很仔細地校讀了此書全稿, 並且建議了許多改善的意見。謹在此表示衷心的感謝。

莫斯科, 一九三三。

A. H. 柯爾莫哥洛夫。

† 例如參閱第四章末尾註脚中所引 Leontowitsch 及著者的論文及 M. Leontowitsch: Zur Statistik der kontinuierlichen Systeme und des zeitlichen Verlaufes der physikalischen Vorgänge, Physik, Zeitschr. d. Sowjetunion 卷 3 (1933) 35—63 頁。

* (譯者註) 被有些統計學家含糊敘述着並過火強調着的‘大數定律’, 在本書中將闡明其明確嚴格的意義及具體的應用。

目 次

第一章 初等概率論

§ 1 公理.....	2
§ 2 與經驗世界的聯系.....	3
§ 3 術語的詮解.....	6
§ 4 公理的直接推論,條件概率,巴葉斯定理.....	7
§ 5 獨立性.....	9
§ 6 作為隨機變數的條件概率,馬可夫氏鏈.....	14

第二章 無限概率場

§ 1 連續公理.....	17
§ 2 波黑爾氏概率場.....	20
§ 3 無限概率場實例.....	22

第三章 隨機變數

§ 1 概率函數.....	26
§ 2 隨機變數的定義,分佈函數.....	28
§ 3 多度空間分佈函數.....	30
§ 4 無限多度空間裏的概率.....	33

§ 5 等價隨機變數,各種收斂性	41
------------------------	----

第四章 數學期望

§ 1 抽象勒貝格氏積分	45
§ 2 絕對數學期望與條件數學期望	48
§ 3 車貝謝夫氏不等式	51
§ 4 幾個收斂性判別準則	53
§ 5 數學期望按一個變數的微分與積分	54

第五章 條件概率與條件數學期望

§ 1 條件概率	58
§ 2 一個波黑爾氏奇論的解釋	63
§ 3 對一個隨機變數的條件概率	63
§ 4 條件數學期望	65

第六章 獨立性, 大數定律

§ 1 獨立性	71
§ 2 獨立隨機變數	73
§ 3 大數定律	76
§ 4 對數學期望概念的幾點注意	80
§ 5 加強大數定律,級數的收斂性	83
補 充: 概率論中的零一律	86
文獻目錄	88
附 錄: 集合論準備知識	91
幾個常用符號及名詞的解釋	107

概率論基本概念

第一章 初等概率論

概率論中只論及有很多隨機事件的概率的那部分我們稱之爲初等概率論。這裏所得到的定理自然也可以應用到有關無限多隨機事件的問題上去，只是我們在處理這類問題時還需要全新的原理。因此有一個直接關涉無限多事件的數理概率論的公理直到第二章起首纔引出來(公理 VI)。

概率論作爲一種數學的學理是必須加以公理化的，而且也能夠恰如幾何學或代數學一樣來加以公理化的。這就是說，給出了所研究對象的名稱及基本關係以及此等基本關係所服從的公理以後，全部其他的敘述就可以僅根據這些公理來推演，而不必顧慮這些對象及關係的特殊的具體意義了。

因此在 §1 裏概率場的概念是作爲一個適合某些條件的集合系來下定義的。至於這些集合的分子究竟是什麼東西，這對概率論的純數學發展是完全可以不必加以分辨的。(參考希爾柏脫氏‘幾何學基礎論’中幾何基本概念的引論，或參閱抽象代數學中‘羣’‘環’‘體’等概念的定義)。

每種公理化的(抽象的)理論大家知道可以容許有無數具體的解釋。如此數理概率論也除去那些原始的解釋以外還可以有無數其他新的解釋。因此我們達到數理概率論在這樣的研究領域中的應用,這些領域完全與‘機會’及概率的尋常具體概念毫不相干。這類應用將在本書附錄中論及。

概率論的公理化可以由種種不同的方式來實現,並且各種不同的方式自有其公理的及基本概念與基本關係的選擇法。當然,為求公理系統及其推論的建立能儘量簡單起見,我們宜將隨機事件及其概率的概念拿來加以公理化。但也有別種概率論的奠基法的例子,其中概率概念不算作基本概念,却另用別的概念將它表示出來¹⁾。這樣也自有其別的用意:就是可以使數學理論儘量與概率概念的經驗淵源相結合。

§ 1 公理²⁾

設 E 是一個集合,其元為 $\varepsilon, \eta, \zeta, \dots$; 這些元我們稱之為基本事件。又設 $\mathfrak{S}$ 是由 E 的部分集合所構成的集合系; 這些部分集合我們稱之為隨機事件。更設:

I. $\mathfrak{S}$ 為一集合體³⁾。

1) 參閱 R. von Mises [1] 及 [2] 及 C. H. Бернаштейн [1]。

2) 讀者如急於要給這組公理以一種具體意義則請即參讀 § 2。

3) 參閱 F. Hausdorff: Mengenlehre, 1927 版 78 頁。一組集合叫做一個‘體’,如其中任意兩個集合的‘和’‘交叉’及‘差’仍屬於該組。每個不空的集合體都包含‘空集’ 0 。我們從 Hausdorff 氏以 AB 表示 A 與 B 的‘交叉’; 以 $A+B$ 表示 $AB=0$ 時 A 與 B 的‘聯合’(即‘和’), 而以 $A-B$ 表示 A 與 B 的一般的和; 並且以 $A-B$ 表示 A 與 B 的差。 A 的補集 $E-A$ 則以 $\bar{A}$ 表之。集合及其交叉, 和, 差的基本運算規律也假定已經知道。 $\mathfrak{S}$ 中的集合此後一律用大寫拉丁字母來代表。

II. $\mathcal{F}$ 包含集合 E 。

III. $\mathcal{F}$ 中任一集合 A 均賦與一個非負實數 $P(A)$ 。這個數 $P(A)$ 我們稱之為事件 A 的概率。

IV. $P(E) = 1$ 。

V. 若 A 與 B 是互相分離的(即 A 與 B 無共同的元), 則

$$P(A+B) = P(A) + P(B)。$$

一個這樣的集合系 $\mathcal{F}$, 賦與了實數 $P(A)$ 並且適合公理 I—V, 就叫做一個概率場。

我們的公理體系 I—V 是和諧的(即互不衝突的)。這可以用下面的例子來證驗: E 由一個元 ε 所組成, $\mathcal{F}$ 由 E 與空集 0 所組成。這裏令 $P(E) = 1$, $P(0) = 0$ 。

我們的公理系却並不完備(即無範疇性): 在不同的概率論問題裏我們研究不同的概率場。

概率場構成示例 最簡單的概率場可構成如下: 我們取一個任意的有限集合 $E = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_k\}$, 並且取任意一組非負的實數 $\{P_1, P_2, \dots, P_k\}$, 具 $P_1 + P_2 + \dots + P_k = 1$ 的條件。 $\mathcal{F}$ 則取作一切 E 的部分集合, 而令 $P\{\varepsilon_{i_1}, \varepsilon_{i_2}, \dots, \varepsilon_{i_\lambda}\} = P_{i_1} + P_{i_2} + \dots + P_{i_\lambda}$ 。在這裏我們稱 $P_1, P_2, \dots, P_k$ 為基本場合 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_k$ 的概率或稱為基本概率。如此我們得到一切可能的有限概率場, 以一切 E 的部分集合為 $\mathcal{F}$ (我們在此稱一個概率場為‘有限的’, 如果集合 E 是有限的話), 其他例子見第二章 §3。

§2 與經驗世界的聯系*

概率論在現實經驗世界裏的應用可以按下面的方式產生出來: