算學叢書

第二種

行列式詳論

何魯
段子燮 合著

商務印書館發行

行列式詳論

序

今之數學家莫不以行列式爲數學上利器之一.誠以其爲義則淺且明也.爲法則切易也爲用則妙且宏也夫行列式自解聯立一次式而生.其後寖演爲則.本則成用.而解之公式於以推廣.顧所獲未囿於是.則以其能運配計算也.預燭結果也貫徹討論也.而此咸非尋常代數所易能者.

消去法者.代數中之最繁難者也.自行列式之用明.則直按律而索.秩然以易.雖結式猶待展算.而此問題理論上可謂完全解決.則顯然無疑意矣.解析幾何求軌跡.恆由數曲線或曲面公式消去數助量之結式而得.御以尋常之法.則往往納非解而合冶之.遂有其結罔允之虞.此爲用行列式者所罕遘也

數學之用.方將日益昌明.而行列式之要復如彼.其可以無專書乎.是則著者操觚之私意云爾.

中華民國十三年一月

著者 何魯 段子燮 識

讀例

一是書爲著者普通數學類成書之一.推原窮用.專論行列式.故名.

一是書分上中下三篇.上篇略具行列式芻形.純爲初治是學者而設.中篇先論逆式.以爲界行列式之基.其證明諸特性亦莫不本此.第七章行列式引數.及輔式第二特性.則爲曾習及將習微分學者設.下篇應用.祇限於代數一部分.

一著者於解聯立式時.每由一式得一新式.必反覆證明二式有同解.然後任解其一式.如是則確知不至誤求非解.此爲精進要點.讀者不可忽也.

一著者每以一數除一方程兩端時.必先定此數異於零.不然必成大錯.譬如 $f(x)=0$ 爲一方程.如兩端以 $f(x)$ 除之.則得 $1=0$.此無有也.其主謬在不當以 $f(x)$ 除兩端.以 $f(x)$ 爲零故也.此例最能警覺讀者.

一著者凡加依定義三字處如讀者不明時.祇有細讀定義.勿庸深求其所以然.蓋深求亦祇此依定義三字耳.譬之化學家知水爲輕養二氣化合而成.其能事已畢.如問何以輕養二氣能化合成水.則答亦如問已.

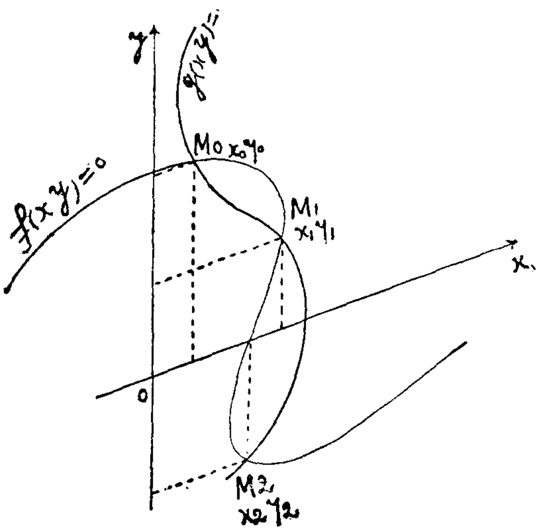
一著者所採習題.以艱趣爲主.鮮有三題證法相同者.題之過艱者.則恆附註着手方法.

一爲零行列式有二.其一爲行列式之有兩行或兩列成比例者.其一爲同行或同列各元有一相同一次齊次關係者.前者之要是書已能揭露之.後者之要亦數學中所常遇也.

一第九章論聯立一次式.可以魯歇氏定理全概.其前二節.所以導也.故并存之.

一消去法常繁.以著者前章曾詳求 n 式 m 元之同解情形.故消去法章不啻迎刃而解.次序之末可以苟也如是.獨感乎今之操觚者之多不解此也.

一兩同元多項全式消去法.當主柯西氏.若求兩多項式公根及一式雙根之類.其餘事耳.



一在解析幾何.$f(xy)=0$ 表一曲線.$g(xy)=0$ 又一曲線.是兩曲線相交點之縱橫量 x,y.為 $f=0$ 及 $g=0$ 之公解.蓋如 $M_0(x_0,y_0)$ 為一公點.必有 $\begin{cases} f(x_0y_0)=0 \\ g(x_0y_0)=0 \end{cases}$ 也明矣.

反之如已與 f 及 g 兩曲線.欲求其相交點.可由 f 及 g 二式中.任消去 x.或 y.如消去 x 則結式為 y 之多項全式.其根 $y_0\,y_1\,y_2\,'\,'\,'$.卽公點 $M_0\,M_1\,M_2\,'\,'\,'$ 之縱量也.著者為是說畧表消去法之用而已.其詳則將有專書及之.

一是書三篇.各可以一言蔽之曰.上篇在索原.中篇在釋逆式下篇在證魯氏定理.

一關於行列式展式推廣.兩行列乘積推廣.及倚數行列式等

則宜參讀著者微分學理解上册.本書末之及也.

一是書可爲中學高級生及各高等大學學生之用.更爲專研數學者.所必讀之書.

釋　名

一聯立式者.數方程式中.數元齊見或錯見之相系屬者也.所求得各元之特值.代入各式盡合者.謂之解.聯立式僅有一解者.謂之獨解式.有二解者.謂之雙解式.餘類推.有無窮解者.謂之無定式.并一解而不得者.謂之無解式.(見著者微分學理解)

一行列式中.任剪去一行及一列所得之新行列式.謂之子行列式.用一行列式所有之子行列.排成同次之新行列.謂之此式之輔行列式.

一逆式者.他書謂之變換.逆之為言不順也.取二數字而論.以 1 2 為常序.則 2 1 為逆式.

一 Σ 者示求和之符號.如 $\Sigma a_i \quad (i=1, 2, \cdots\cdots n)$ 卽和數 $a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n$ 之省.

一倚數.他書通謂之函數.其定義曰.謂甲乙兩數互為倚數.或謂甲乙互倚.卽甲為常數時.乙隨之為常數.或乙為常數時甲亦隨之為常數.

一引數他書通謂之微係數.(宜參讀著者微分學理解)

一是書結式.與他種大代數所論結式畧異.但所差不過一常數因子而已.以著者特重行列式之用.故不及次者之義.

一謂一式對於 n 數字成勻稱式.卽在此式中任互換二字.其式不變.如 $a^2+b^2+c^2$ 及 $\alpha(a^2+b^2+c^2)+\beta(ab+bc+ac)+\gamma abc$ 皆為 $a\ b\ c$ 之勻稱式.

一壹數者為奇數中之一種.如 23 及 31 等是也.此種數祇能

以本數及一除盡.謂兩數互爲壹數.卽除一以外無第二數可同時除盡此二數也.如9與24互爲壹數者也.而此二數不必各爲壹數.

目　　錄

上篇　緒論

中篇　正義

行列式詳論

上篇　緒論

第一章

§ 1. 行列式之原　行列式自解聯立一次式而生.初不過爲代數家符號運算之一種.後因明其特性.其用遂宏.著者於此節特表明其所以發生之情形.

問題　設有聯立一次式如下

$$(1)\cdots\cdots\cdots\cdots\begin{cases}ax+by=c\\ a'x+b'y=c'\end{cases}$$

或

$$(1)\cdots\cdots\cdots\cdots\begin{cases}f=ax+by-c=0\\ g=a'x+b'y-c'=0\end{cases}$$

求解此式.(xy爲未知數)

解之爲言卽求xy之任一組特值.代入(1)之二式中.兩者同時能合也.

如a異於零.余謂(1)式與下式

$$(1)'\cdots\cdots\cdots\cdots\begin{cases}f=0\\ ag-a'f=0\end{cases}$$

有同解.蓋如有一組特值$x_1\,y_1$可合f.則(1)'式之第二式可書爲

$$ag=0\qquad(\text{因}\ f\ \text{爲零})$$

原設a異於零.欲此式亦以$x_1\,y_1$爲解.必也

$$g=0$$

簡言之. 卽 (1)′ 之解亦爲 (1) 之解也.

反之. 如 (1) 式

$$\begin{cases} f=0 \\ g=0 \end{cases}$$

已合. 則 (1)′ 式

$$\begin{cases} f=0 \\ ag-a'f=0 \end{cases}$$

亦無不合. 因 f 及 g 俱爲零故.

簡言之. 卽 (1) 之解亦爲 (1)′ 之解也.

(1) 及 (1)′ 謂之同解式. 如是則欲求 (1) 之解. 求 (1)′ 之解足矣.

(1)′ 可書爲

$$(1)' \cdots\cdots\cdots\cdots \begin{cases} ax+by-c=0 \\ a(a'x+b'y-c')-a'(ax+by-c)=0 \end{cases}$$

由此第二式可得.

$$ab'y-a'by-ac'+a'c=0$$

卽

$$(ab'-a'b)y=ac'-a'c$$

如 $ab'-a'b$ 異於零. 兩端以此數除之. 則得

$$y=\frac{ac'-a'c}{ab'-a'b}$$

以 y 之值代入 (1)′ 之第一式. 則有

$$ax+b\frac{ac'-a'c}{ab'-a'b}-c=0$$

$$ax=c-b\frac{ac'-a'c}{ab'-a'b}$$

$$=\frac{ab'c-a'bc-abc'+a'bc}{ab'-a'b}=\frac{ab'c-abc'}{ab'-a'b}$$

即
$$ax=\frac{a(b'c-bc')}{ab'-a'b}$$

因原設 a 異於零.兩端以 a 除之.則有

$$x=\frac{b'c-bc'}{ab'-a'b}$$

約而言之.吾人求得 (1)′ 之解爲

$$(2)\ \cdots\cdots\cdots\cdots \begin{cases} x_1=\dfrac{cb'-c'b}{ab'-a'b} \\[2ex] y_1=\dfrac{ac'-a'c}{ab'-a'b} \end{cases}$$

據前所論.此亦 (1) 式之解也.而吾人之問題決矣.乃試進觀胡爲而有行列式.今試以下符號

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$$

代 $(ab'-a'b)$.爲約如下

$aba'b'$, 四字成一正方. ab' 線謂之主對角線. $a'b$ 謂之副對角線.展 δ 法.取對角線上兩字相乘.字在主線者其積冠以(+)號.在副線上者.冠以(−)號.是二乘積之和依定義爲 δ 展式.即

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}=ab'+(-a'b)$$
$$=ab'-a'b$$

同理可令

$$cb'-c'b=\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}=\delta_1$$

$$ac'-a'c=\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}=\delta_2$$

如是則(1)式

$$(1)\cdots\cdots\cdots\cdots\begin{cases}ax+by=c\\ a'x+b'y=c'\end{cases}$$

之解可以下符號誌之矣.(δ異於零)

$$(2)'\cdots\cdots\cdots\cdots\left\{x_1=\frac{\delta_1}{\delta}\quad y_2=\frac{\delta_2}{\delta}\right.$$

δ謂之聯立式(1)之行列式爲兩式兩未知數係數所成.卽

$$\delta=\begin{vmatrix}a & b\\ a' & b'\end{vmatrix}$$

δ_1爲一新行列式.可視爲由δ中以常數易x係數而得者.卽

$$\delta_1=\begin{vmatrix}c & b\\ c' & b'\end{vmatrix}$$

δ_2爲由δ中以常數易y係數而成者.

$$\delta_2=\begin{vmatrix}a & c\\ c' & c'\end{vmatrix}$$

例 求解下式

$$(3)\cdots\cdots\cdots\cdots\begin{cases}ax+by=1\\ bx+ay=-1\end{cases}$$

a異於$\pm b$

依上所論.

$$\delta=\begin{vmatrix}a & b\\ b & a\end{vmatrix}=a^2-b^2\neq 0$$

$$\delta_1=\begin{vmatrix}1 & b\\ -1 & a\end{vmatrix}=a+(+b)=a+b$$

$$\delta_2=\begin{vmatrix} a & 1 \\ b & -1 \end{vmatrix}=-a+(-b)$$

$$=-a-b=-(a+b)$$

準公式(2)′則立得(3)式之解爲

$$x_1=\frac{\delta_1}{\delta}=\frac{a+b}{a^2-b^2}=\frac{a+b}{(a+b)(a-b)}=\frac{1}{a-b}$$

$$y_1=\frac{\delta_2}{\delta}=\frac{-(a+b)}{a^2-b^2}=-\frac{1}{a-b}=\frac{1}{b-a}$$

§ **2.** 既略明行列式 δ 定義矣.復取而細究之.

依定義

$$\delta=\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}=ab'-a'b$$

中任一字 a 謂之元.任一乘積 ab' 謂之項. δ 僅有四元.故有時 δ 名爲四元行列

四元行列之每次皆爲二次式.故四元行列亦謂之二次行列式.(以後均從此名)

二次行列式.佔兩行兩列. ab 二元同在一橫線爲同列. $a'b'$ 亦爲同列. aa' 二元同在一縱線爲同行. bb' 亦爲同行. a 在第一行第一列. b 在第一列第二行餘類推.

今有最足注意者.則 δ 中之任一項之二元.未有同行者.亦未有同列者.如 ab' 項. a 在一行一列. b' 在二行二列. a 與 b' 既不同行.亦不同列也.又如 $a'b$ 項. a' 在一行二列. b 在二行一列. a' 與 b 既不同列亦不同行也.

如以 $a^1{}_2$ 代元之在第一行第二列者.

則二次式可書爲

$$\begin{vmatrix} a^1{}_1 & a^2{}_1 \\ a^1{}_2 & a^2{}_2 \end{vmatrix} = a^1{}_1\ a^2{}_2 - a^1{}_2\ a^2{}_1$$

中每項諸元之上下指數.未有同者.此爲行列式最要特性.蓋卽本是以爲推廣地也.

特性一

$$\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

卽在二次行列.吾人可以列爲行.以行爲列也.

特性二 又易知

$$\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = -(cb - ad) = -\begin{vmatrix} c & a \\ d & b \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = -(cb - ad) = -\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix}$$

卽二次行列中.互易其行.或互易其列.則其絕對値不變.而號變矣.

特性三 如展

$$\begin{vmatrix} a & a \\ b & b \end{vmatrix} = ab - ab = 0$$

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a & b \end{vmatrix} = ab - ab = 0$$

卽二次行列之有兩行或兩列.相同者爲零.

§ 3. 九元行列式 依定義九元行列式之形爲

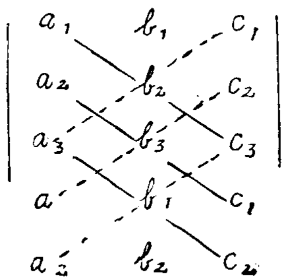
$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ a & b & c \\ A & B & C \end{vmatrix}$$

或

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

展之法如次

於 D 之下.另書 D 之第一第二兩列.則成



乃取在主線上之三元.及在平行主線線上之三元.各爲積.冠以(+)號.則有三項如次

$$\begin{array}{lcl} +a_1\times b_2\times c_3 & & +a_1\ b_2\ c_3 \\ +a_2\times b_3\times c_1 & \text{或} & +a_2\ b_3\ c_1 \\ +a_3\times b_1\times c_2 & & +a_3\ b_1\ c_2 \end{array}$$

又取在副線上及在平行副線線上之三元.亦各爲積.而冠以(−)號.則另得三項.

$$\begin{array}{l} -a_3\ b_2\ c_1 \\ -a_1\ b_3\ c_2 \\ -a_2\ b_1\ c_3 \end{array}$$

依定義 D 之展式爲

$$(4)\cdots\cdots\cdots\cdots D=a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2-a_3b_2c_1-a_1b_3c_2-a_2b_1c_3$$

$a_1b_2c_3$ 謂之 D 之主項.簡之可以此主項代 D.如

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & b_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

或

$$D=(a_1\ b_2\ c_3)$$

或

$$D=\Sigma a_1\ b_2\ c_3$$

意謂D等於$a_1 b_2 c_3$諸項之和也.

細觀展式(4).其一每項皆爲三次積.故九元行列亦謂三次行列式.(後從此名)

其一.每項無同列或同行之元.蓋任取一項而審察之.如$a_2 b_3 c_1$咸指數異數.字母異文.異數者不同列.異文者不同行.推之他項均如此.

其一每元凡兩見於展式.如有$a_1\ b_2\ c_3$則有$a_1 b_3 c_2$ 有$a_2 b_3 c_1$則有$a_1\ b_3\ c_2$.

其一每含同元兩項必異號.如有$\underline{a_1}\ b_2\ c_3$之爲正.則有$\underline{a_1} b_3 c_2$之爲負之類餘同.

§4. 三次行列式特性

特性一 一行列式中可盡易其行爲列.或盡易其列爲行.*

譬有行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

盡易其行爲列.則得一新行列.

$$D_1=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

* 小註一盡易其行爲列.則其列亦盡易爲行矣.盡易其列爲行.則其行亦盡易作列矣.有此必有彼.似二而實一者也.