

213983

[德] M·内包尔著

三角点的网眼式转换

陈健译



中国工业出版社

本书阐述了投影系统的坐标转换方法，详细地介绍了做射转换、射影转换、利用对角线的綫段比例的转换和正形转换等四种网眼式坐标转换方法，其中尤以做射转换最为重要，实施步骤比较简单，时常采用。

本书译自 1943 年德国国家测量局通讯 284—317 页，由陈健教授翻译，并经叶雪安教授校订。

本书可供大地测量专业技术人员和师生参考。

M. Nibauer

Meschenweise Übertragung von Dreieckspunkten
Nachrichten an dem Reichsvermessungsdienst

1 9 4 3

* * *

三角点的网眼式转换

陈 健 译

叶 雪 安 校

*

国家测绘总局测绘书刊编辑部编辑（北京三里河国家测绘总局）

中国工业出版社出版（北京东黄城根内 10 号）

（北京市书刊出版事业许可出字第 110 号）

中国工业出版社第四印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行·各地新华书店经售

*

开本 $787 \times 1092 \frac{1}{32}$ · 印张 $1 \frac{13}{16}$ · 字数 39,000

1963 年 5 月北京第一版 · 1963 年 5 月北京第一次印刷

印数 0001—1797 · 定价（10-6）0.28 元

*

统一书号：15165 · 2231（测绘-73）

[德] M·内包尔著

三角点的网眼式转换

陈 健 译

叶 雪 安 校

中国工业出版社

目 录

I. 倣射轉換	4
(a) 要点和符号	4
(b) 計算的解法	4
(c) 点数不多时的图解法	6
(d) 点数很多时, 用等坐标变化直綫的图解法	8
(e) 常数的确定	8
(f) 坐标变化不大时的倣射轉換的变形	11
(g) 足够狭小地带的倣射表象	16
(h) 由斯特林次所給出的坐标变换的图解法	17
II. 射影轉換	17
(a) 坐标差为任意大时的計算方法	17
(b) 根据四条射綫法的图解法 (条带法)	21
(c) 点数很多时, 极微小的坐标变化的計算轉換法	23
(d) 等坐标变化曲綫的应用, 图解解析的解法及通过 內插求定曲綫	27
(e) 坐标变化不大时, 射影轉換的变形	32
III. 利用角点貫綫的綫段比例的轉換法	36
IV. 正形轉換	38
(a) 通过位移、旋轉和伸縮的第一步轉換	38
(b) 对第一步轉換进行正形投影的第二步轉換	41
(c) 由第二步轉換所引起的等坐标变化的軌跡	44
(d) 坐标变化不大时, 由第二步轉換所引起正形轉換 的变形	48
主要参考文献	56

在近几十年来，三角点的网眼式的轉換对测量的各种問題方面所取得的作用，是以前所沒有預料到的。在实际工作中，主要是把一个精度不高、过了时的主网中的許多低級固定点，变换到一个重测的、精度較高的主网中来，而无需对大多数的待变换点重新平差。

对所有的轉換方法，我們都提出如下的要求：

1. 旧网眼（三角形或四边形）中的每个点都要单值地表象在相应的新网眼中，而各角点也表象在預先給定的位置上，也就是仍然成为角点；
2. 不論三角形边的表象是来自两个相邻三角形中的那一个，与該边上某一个点相对应的，只有唯一的一个新点；
3. 三角形的边应当仍旧保持为直綫形。

当三角网的范围比較大时，就先取一个平面投影，当在这个投影中的轉換工作完成后，就可以从这个投影再化到原来的参考面（球面或橢圓面）上。

主要的轉換方法有：

1. 做射轉換；
2. 射影轉換；
3. 利用对角綫的綫段比例的轉換。

这些方法也适用于不論含有多少个三角形的三角鎖或三角网。当只有一个单独的三角形时，則

4. 正形轉換也可能是有利的。

注：在以下所有的研究中，总是采用一般的坐标系統。

I. 倣射轉換

(a) 要点和符号

倣射轉換可以看作是射影轉換的一个特殊情况，就几何意义來說，它可以作为一种平行投影，只是在必要时要先对一个图形加以适当的扩大。因此，对于每一个固定方向來說，两个平面上相应各綫段的比例都是不变的。此外，处于一般位置的两个倣射的平面图形，可以这样地相对旋轉和移动（仍然是經過对其中一个图形加以适当的扩大之后），以使对应点的连接綫彼此平行，而对应边都相交在同一条直綫（倣射軸綫）上。这时它們就处于倣射的位置。处于一般位置的两个平面系統之間的倣射关系，是由三对彼此相对应的点，也就是由两个彼此相对应的三角形而单值地确定的。

我們应用以下的符号：

已知三角点	任意网眼点
旧系統中	
$P'_1(x'_1, y'_1), P'_2(x'_2, y'_2), P'_3(x'_3, y'_3)$	$Q'(x', y')$
新系統中	(1)
$P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2), P_3(x_3, y_3)$	$Q(x, y)$

(b) 計算的解法

通过下列的关系式，可以得出一个倣射表象：

$$\begin{aligned} x &= a_1 x' + b_1 y' + c_1 = x' + dx, \\ y &= a_2 x' + b_2 y' + c_2 = y' + dy, \end{aligned} \quad (2)$$

其中 a 、 b 、 c 的数值是已知的。由此得出坐标的变化（旧系統坐标的改正）为

$$\begin{aligned} dx &= x - x' = (a_1 - 1)x' + b_1 y' + c_1, \\ dy &= y - y' = a_2 x' + (b_2 - 1)y' + c_2. \end{aligned} \quad (3)$$

对于点 P'_1 , 由上式得

$$\begin{aligned} dx_1 &= x_1 - x'_1 = (a_1 - 1)x'_1 + b_1 y'_1 + c_1, \\ dy_1 &= y_1 - y'_1 = a_2 x'_1 + (b_2 - 1)y'_1 + c_2, \end{aligned} \quad (4)$$

由 (3) 减 (4), 得下列的部份变化

$$\begin{aligned} dx' &= dx - dx_1 = (a_1 - 1)(x' - x'_1) + b_1(y' - y'_1), \\ dy' &= dy - dy_1 = a_2(x' - x'_1) + (b_2 - 1)(y' - y'_1). \end{aligned} \quad (5)$$

$$x' - x'_1 = x'' \quad , \quad y' - y'_1 = y'' \quad (6)$$

这些差数就是游动点 Q' 在这样一个坐标系中的坐标, 这个坐标系与原始坐标系相平行, 其原点 U'' 移到了 P'_1 。再用下列的简化符号

$$a_1 - 1 = A_1, \quad b_1 = B_1, \quad a_2 = A_2, \quad b_2 - 1 = B_2. \quad (7)$$

则由式 (5) 得到下列的部份变化

$$\begin{aligned} dx' &= A_1 x'' + B_1 y'', \\ dy' &= A_2 x'' + B_2 y''. \end{aligned} \quad (8)$$

这些比较简单的形式只包含着四个系数, 它们可以借助 P'_2 , P'_3 两点相应的部份位移来求定, 这些部份位移就是

$$\begin{aligned} dx'_2 &= dx_2 - dx_1, \quad dy'_2 = dy_2 - dy_1, \\ dx'_3 &= dx_3 - dx_1, \quad dy'_3 = dy_3 - dy_1, \end{aligned} \quad (9)$$

其数值是已知的。如果求出了这些常数, 并由式 (8) 得出一点 Q' 的部份变化 dx' 、 dy' , 则

$$dx = dx_1 + dx', \quad dy = dy_1 + dy' \quad (10)$$

这些和数就给出 Q' 点的全部坐标改正。

坐标变化的其他表示式可以由这样一个情况来导出, 就是在做射表象中, 相对应的图形中各面积的比例是一个常数。设令由 Q' 点所确定的部份三角形的面积为 Δ'_1 、 Δ'_2 、 Δ'_3 , 各

根据在各該三角形中所未包含的三角点的序号来表示，并用

$$\Delta' = \Delta'_1 + \Delta'_2 + \Delta'_3 \quad (11)$$

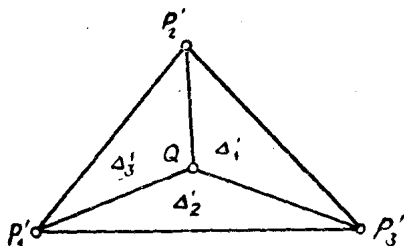


图 1

表示三角形 $P'_1 P'_2 P'_3$ 的面积，则在 Q 点与各三角点的坐标之間，存在着下列的简单关系：

$$x' = \frac{\Delta'_1 x'_1 + \Delta'_2 x'_2 + \Delta'_3 x'_3}{\Delta'}, \quad (12)$$

$$y' = \frac{\Delta'_1 y'_1 + \Delta'_2 y'_2 + \Delta'_3 y'_3}{\Delta'}.$$

对新网眼也有相应的关系存在。并由于

$$\Delta'_1 : \Delta'_2 : \Delta'_3 : \Delta' = \Delta_1 : \Delta_2 : \Delta_3 : \Delta$$

的关系，就得出全部坐标变化

$$dx = \frac{\Delta'_1 dx_1 + \Delta'_2 dx_2 + \Delta'_3 dx_3}{\Delta'}, \quad (13)$$

$$dy = \frac{\Delta'_1 dy_1 + \Delta'_2 dy_2 + \Delta'_3 dy_3}{\Delta'},$$

它們是三个角点的全部坐标变化的函数。

(c) 点数不多时的图解法

把旧三角形 $P'_1 P'_2 P'_3$ 连同其整个内部平行移置到这样一个中介位置 $P''_1 P''_2 P''_3$ ，使得 P'_1 移至 $P_1 = P''_1$ 。当把游动

点 Q' 轉換到新网眼中时, 就利用这样一种情况: 就是旧网眼中各綫段之比, 也就是形状与旧网眼相同的中介三角形中的各綫段之比, 与倣射轉換中的相应綫段之比具有相同的数值。

詳細情况: $P_2'Q''$ 在 $P_1'P_3'$ 上截得輔助点 H , 通过 H 而与 $P_2'P_3'$ 平行的直綫与 $P_1'P_3'$ 交于 H' 。通过 Q'' 用一条与 $P_2'P_3'$ 平行的直綫在直綫 HP_2' 上得出 H'' ; 通过 H'' 与 HH' 平行的直綫在 $H'P_1'$ 上截出游动的新点 Q 。根据图 2 可見, 在旧图形和新图形中的相应直綫 HP_2' 和 $H'P_2'$ 被游动点 Q'' 和 Q 以相同的比例 $V = HH'':H''P_2'$ 分截。

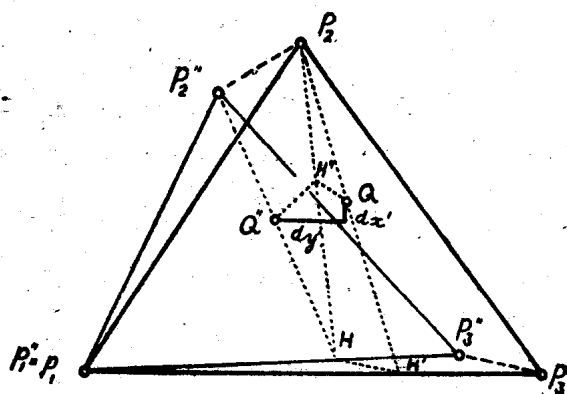


图 2

由图 2 中所取得的 Q 相对于 Q'' 的坐标增量就是部份位移 dx' 、 dy' , 根据式 (10) 由它們就得出全部位移:

$$dx = dx_1 + dx', \quad dy = dy_1 + dy'.$$

为了获得足够的精度, 必須用較之三角形大得多的比例尺, 約 1:20 至 1:50 来表示所出現的坐标变化。由 P_2' 和 P_3' 以相同的比例尺画出部份变化 dx_2' 、 dy_2' 和 dx_3' 、 dy_3' , 就

得出新点 P_2, P_3 。虽然三角形 $P_1P_2P_3$ 有变形，但在加大的比例尺中，所得的部份坐标变化 dx', dy' 还是正确的。

(d) 点数很多时，用等坐标变化直綫的图解法

当点数很多时，最简单的是在有关的三角形中，画出坐标变化相等的直綫，利用它們就可以立即讀出所有各点的位移的全部数值 dx, dy 。如果在 (3) 中給予坐标变化以某些固定的数值，則与它們相应的軌跡就由下列的直綫方程式来确定：

$$\begin{aligned} G^x &\equiv (a_1 - 1)x' + b_1y' + \underbrace{(c_1 - dx)}_{c_x} = 0, \\ G^y &\equiv a_2x' + (b_2 - 1)y' + \underbrace{(c_2 - dy)}_{c_y} = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

它們包含着与 dx 和 dy 有关的新的常数項 c_x, c_y 。一束平行綫的画出（一束中的各直綫方程式只在常数項上彼此有所不同），是通过把三角形的各边等分来进行的。当由一个三角形过渡到次一三角形时，这些直綫就在它們与三角形各边的交点上經受一次旋轉，所以在一个三角网中的等坐标变化的軌跡就表示成为一系列的折綫。各个三角形的轉換常数 a, b, c 彼此符合得越好，这些折綫也就越为直伸。

(•) 常数的确定

計算的解法是和式 (8) 相联系的。把它們应用于 P_2, P_3 的情况，就得出以下两个成对的方程式：

$$\left. \begin{aligned} A_1x'_2 + B_1y'_2 &= dx'_2 \\ A_1x'_3 + B_1y'_3 &= dx'_3 \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

$$\left. \begin{aligned} A_2x'_2 + B_2y'_2 &= dy'_2 \\ A_2x'_3 + B_2y'_3 &= dy'_3 \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

由此得出各待定的系数:

$$A_1 = \frac{y_3'' dx_2' - y_2'' dx_3'}{x_2'' y_3' - x_3'' y_2'} = \frac{2\Delta_{ydx}}{2\Delta'} = -\frac{\Delta_{yax}}{\Delta'} \quad (17)$$

$$B_1 = \frac{x_2'' dx_3' - x_3'' dx_2'}{2\Delta'} = \frac{2\Delta_{xax}}{2\Delta'} = -\frac{\Delta_{xay}}{\Delta'} \quad (18)$$

$$A_2 = \frac{y_3'' dy_2' - y_2'' dy_3'}{2\Delta'} = \frac{2\Delta_{ydy}}{2\Delta'} = -\frac{\Delta_{yay}}{\Delta'} \quad (19)$$

$$B_2 = \frac{x_2'' dy_3' - x_3'' dy_2'}{2\Delta'} = \frac{2\Delta_{xay}}{2\Delta'} = \frac{\Delta_{xay}}{\Delta'} \quad (20)$$

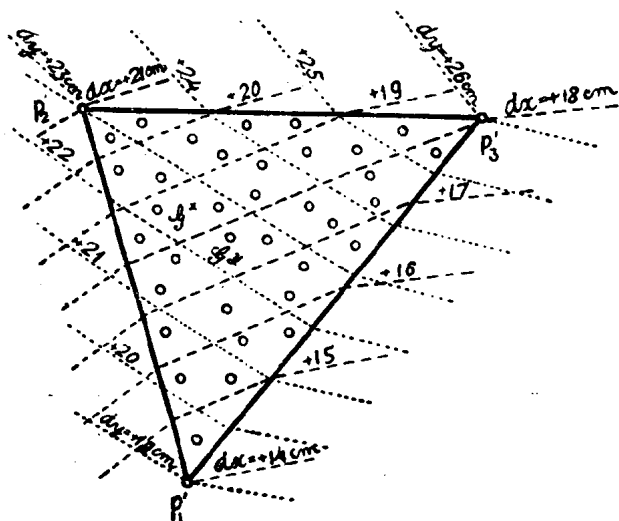


图 3

它們可以用在图 4 中所画出的綫段来表示，也可以作为面积的比例来表示。如果 A_1 、 B_1 、 A_2 、 B_2 各系数在数值上已知，

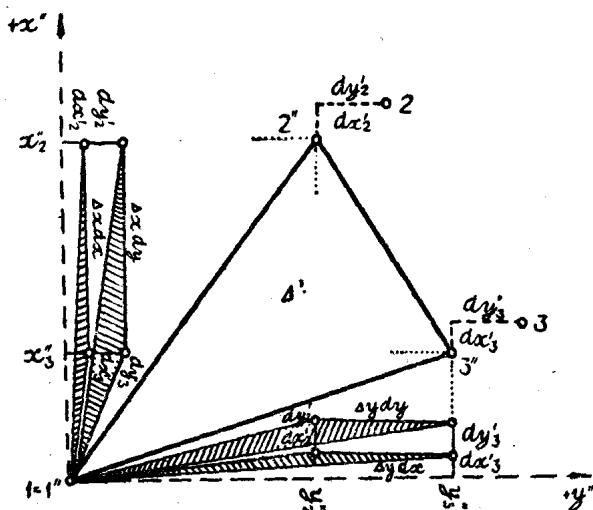


图 4

于是也就得出原始轉換方程式 (2) 中的常数。由式 (7) 首先得:

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 + A_1, & b_1 &= B_1, \\ a_2 &= A_2, & b_2 &= 1 + B_2. \end{aligned} \quad (21)$$

現在由式 (3) 得出尚缺的常数項为

$$\begin{aligned} c_1 &= -(a_1 - 1)x'_i - b_1 y'_i + dx_i \\ &= dx_i - A_1 x'_i - B_1 y'_i, \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} c_2 &= -a_2 x'_i - (b_2 - 1)y'_i + dy_i \\ &= dy_i - A_2 x'_i - B_2 y'_i. \end{aligned} \quad (23)$$

其中 i 可任取为 2 或 3。

如果在輔助坐标系 x'' , y'' 中, 等縱坐标变化 dx'' 的直綫 G^* 在坐标軸上截出綫段 m , n , 則存在着下列簡單关系:

$$A_1 = \frac{dx''}{m}, \quad B_1 = \frac{dy''}{n}. \quad (24)$$

相应地得
$$A_2 = \frac{dy'}{p}, \quad B_2 = \frac{dy'}{q}, \quad (25)$$

如果 p, q 是 G' 在坐标系 x'', y'' 的軸上所截的綫段的話。

把由图 5 中所得的直綫方程式

$$\frac{x''}{m} + \frac{y''}{n} = 1 \quad (24')$$

$$\frac{x''}{p} + \frac{y''}{q} = 1 \quad (25')$$

和式 (8) 比較一下，就直接得出式 (24) 和 (25)。

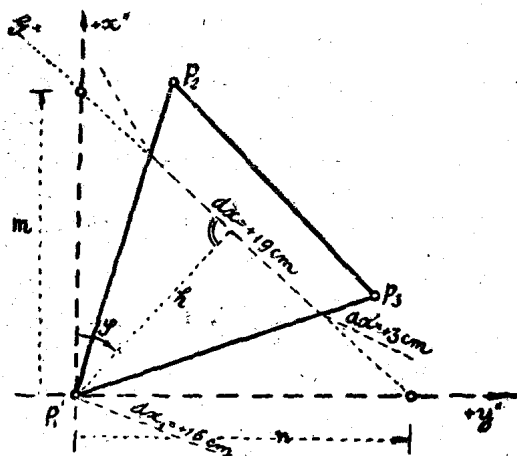


图 5

(f) 坐标变化不大时的微射轉換的變形

迄今所做的推导对于坐标变化無論多大都是有效的（无損于曾应用的微分符号）。为了与現有实际問題的性質相适应，今后令 dx, dy 表示这样的量，它們与出現的距离（三角形边长 s ）比較起来应認為是很小的。

以 $\frac{dx}{s}, \frac{dy}{s} = G^1$ (26)

由式(17)至(20)得: $A_1, B_1, A_2, B_2 = G^1$ (27)

其次由式(21)得:

$a_1 = 1 + G^1, b_1 = G^1, a_2 = G^1, b_2 = 1 + G^1$ (28)

相应地由式(22), (23)得: $c_1, c_2 = s \cdot G^1$ (29)

相对于旧系统 $(x', y', s', \alpha', \beta', F')$ 而言, 新系统 $(x, y, s, \alpha, \beta, F)$ 的主要变形为:

变 形 类 型	极 值	零值	
	的 方 向 角		
1, 扩大比 $m = \frac{ds}{ds'} = \frac{s}{s'} = 1 + v$	$\alpha_m^{\min}, \alpha_m^{\max}$	—	(30)
2, 变形比 $v = \frac{s' - s}{s'} = m - 1$	$\alpha_v^{\min}, \alpha_v^{\max}$	α_v^0	(31)
3, 方向变形 $\rho = \alpha - \alpha'$	$\alpha_\rho^{\min}, \alpha_\rho^{\max}$	α_ρ^0	} (32)
4, 角度变形 $w = \beta - \beta'$			
$\omega =$ 角度平分线的方向角	$\omega^{\min}, \omega^{\max}$	ω^0	
5, 面积变形 $f = F - F'$			(34)

在同一网眼内, 存在着下列关系:

1. 扩大比

$$m = \frac{1}{2} \{ (a_1 - b_2) \cos 2\alpha + (a_2 + b_1) \sin 2\alpha + (a_1 + b_2) \} \quad (35)$$

● (26) — (29) 各式中的 G^1 表示一級微量——譯者注。

对于两个彼此正交的方向 α 及 $\alpha + 90^\circ$, 則

$$m_\alpha + m_{\alpha+90^\circ} = a_1 + b_2 = \text{常数!} \quad (36)$$

扩大比的两个极值的方向角 $\alpha_m^{\min}$, $\alpha_m^{\max}$ 由下式

$$\operatorname{tg} 2\alpha_m^m = \frac{a_2 + b_1}{a_1 - b_2}, \quad (37)$$

和 m 向 α 所取的二阶导数

$$\frac{d^2 m}{d\alpha^2} = -2\{(a_2 + b_1)\sin 2\alpha + (a_1 - b_2)\cos 2\alpha\} \quad (38)$$

(取其中的 α 为 α_m^m 的正负号来求定。

极值本身为

$$m^m = \frac{1}{2} \left\{ (a_1 + b_2) \pm \sqrt{(a_1 - b_2)^2 + (a_2 + b_1)^2} \right\}, \quad (39)$$

而 $m_0 = 1$ 时的 α_m^0 的两个数值由式 (35) 来求出, 在该式中設 $m = 1$ 即可。只有当滿足了

$$m^{\min} < 1 < m^{\max} \quad (39')$$

的条件时, 才会出現 α_m^0 的实数。

2. 变形比

$$v = \frac{1}{2} \{ (a_1 - b_2) \cos 2\alpha + (a_2 + b_1) \sin 2\alpha + (a_1 + b_2 - 2) \}, \quad (40)$$

$$v_\alpha + v_{\alpha+90^\circ} = a_1 + b_2 - 2 = A_1 + B_2 = \text{常数!} \quad (41)$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha_v^m = \frac{a_2 + b_1}{a_1 - b_2} = \frac{A_2 + B_1}{A_1 - B_2}, \quad (42)$$

$$\frac{d^2 v}{d\alpha^2} = -2\{(a_2 + b_1)\sin 2\alpha + (a_1 - b_2)\cos 2\alpha\}, \quad (43)$$

$$v^m = \frac{1}{2} \left\{ (a_1 + b_2 - 2) \pm \sqrt{(a_1 - b_2)^2 + (a_2 + b_1)^2} \right\}. \quad (44)$$

在式 (40) 中設 $v=0$, 即得 $v_0=0$ 时的两个方向角 α_0^0 。这里也是只有当与式 (39') 意义相同的条件

$$v^{\min} < 0 < v^{\max} \quad (44')$$

得到滿足时, 才有实数的解。

3. 方向变形

$$\rho = \frac{1}{2} \{ -(a_1 - b_2) \sin 2\alpha + (a_2 + b_1) \cos 2\alpha + (a_2 - b_1) \}, \quad (45)$$

$$\rho_\alpha + \rho_{\alpha+90^\circ} = a_2 - b_1 = \text{常数!} \quad (46)$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha_p^m = -\frac{a_1 - b_2}{a_2 + b_1}, \quad (47)$$

$$\frac{d^2\rho}{d\alpha^2} = 2\{(a_1 - b_2) \sin 2\alpha - (a_2 + b_1) \cos 2\alpha\}, \quad (48)$$

$$\rho^m = \frac{1}{2} \{ (a_2 - b_1) \pm \sqrt{(a_1 - b_2)^2 + (a_2 + b_1)^2} \}. \quad (49)$$

在式 (45) 中設 $\rho=0$, 所得的方向 α_p^0 是和特殊值 $\rho_0=0$ 相应的。实数解的前提是要滿足下列条件

$$\rho^{\min} < 0 < \rho^{\max}. \quad (49')$$

4. 角度变形

β 的变形为

$$w = -\sin\beta \{ (a_1 - b_2) \cos 2\omega + (a_2 + b_1) \sin 2\omega \} \quad (50)$$

$$w_\omega + w_{\omega+90^\circ} = 0 \quad (51)$$

$$\operatorname{tg} 2\omega^m = \frac{a_2 + b_1}{a_1 - b_2} \quad (52)$$

$$\frac{d^2w}{d\omega^2} = 4\sin\beta \{ (a_2 + b_1) \sin 2\omega + (a_1 - b_2) \cos 2\omega \}. \quad (53)$$

$$w^m = \pm \sqrt{(a_1 - b_2)^2 + (a_2 + b_1)^2} \quad (54)$$

β 角平分线的方向角 ω_1^0, ω_2^0 在零值 $w_0^0=0$ 时的数值由下式来计算

$$\operatorname{tg} 2\omega^0 = - \frac{a_1 - b_2}{a_2 + b_1} \quad (55)$$

5. 面积变形

$$f = F - F' = (a_1 + b_2 - 2) \cdot F = (v_\alpha + v_{\alpha+90^\circ}) \cdot F \quad (56)$$

注： m, v, ρ 和 w 都与地点无关，它们只取决于有关的方向 α ，而当 β 为固定时，只取决于角度平分线的方向角 ω 。面积变形无论和地点还是和方向都无关系。两个同类的互相正交的变形之和总是个常数，而同类变形的两个极值则彼此正交。此外还存在着下列的关系：

$$\begin{aligned} \alpha_m^{\max} = \alpha_v^{\max} = \alpha_m^{\min} + 90^\circ = \alpha_v^{\min} + 90^\circ = \omega^{\min} = \omega^{\max} + 90^\circ \\ = \alpha_p^{\max} + 45^\circ = \alpha_p^{\min} + 135^\circ = \omega_1^0 + 45^\circ = \omega_2^0 + 135^\circ \end{aligned} \quad (57)$$

图 6 中所画的变形的方向花瓣是用来更好地表示出几个特出变形方向的相互位置，只要知道了单独一个极值的方向，就可以把整个方向花瓣画出来。

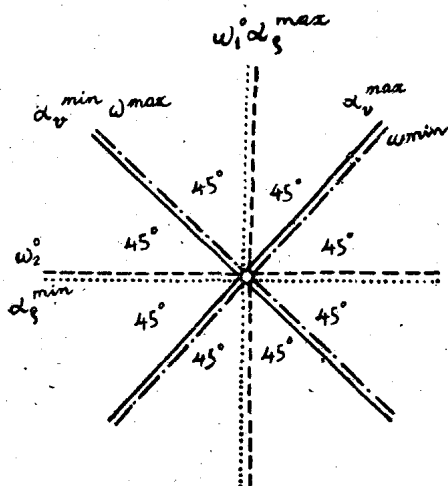


图 6