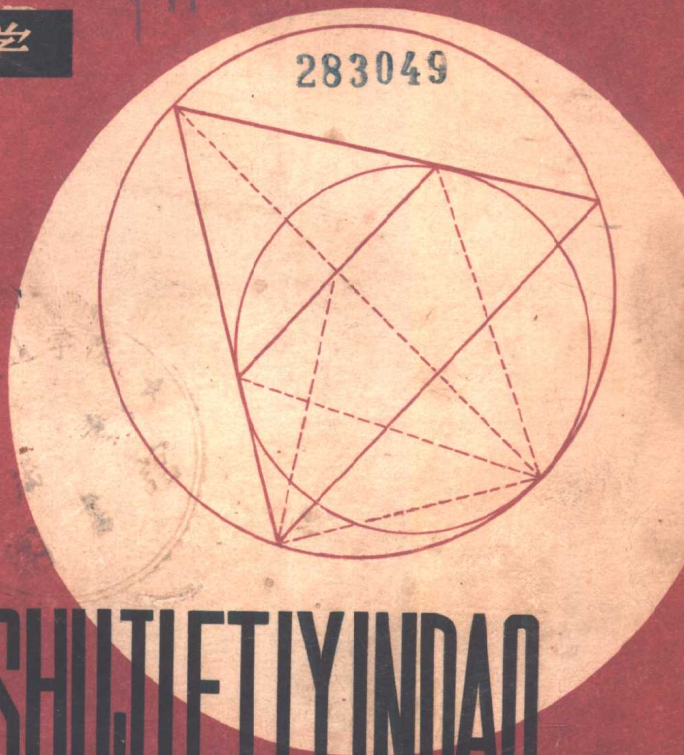


51.22055
YH

中学数学

283049



DAISHUJIETIYINDAO

代数解题引导

湖北人民出版社

代数解题引导

杨 挥 陈传理 等编
陈森林 江仁俊 等审

.....

湖北人民出版社

代数解题引导

杨 挥 陈传理等编

陈森林 江仁俊等审

湖北人民出版社出版 湖北省新华书店发行

黄冈报印刷厂印刷

787×1092毫米32开本 16.625印张 356,000字

1980年11月第1版 1980年11月第1次印刷

印数：1—12,500

统一书号：7106·1556 定价：1.33元

出版说明

为了满足广大中学生学习数学和中学数学教师教学参考的需要，我们邀请湖北省暨武汉市数学学会组织编写了这套中学数学：《代数解题引导》、《几何解题引导》、《解析几何解题引导》、《三角解题引导》和《国际数学竞赛试题讲解》。

希望这套书和广大读者见面以后，能听到来自读者的热情的批评和建议，以便我们进一步修订，使其日臻完善。

一九八〇年四月

目 录

第一章 实数与复数	1
§ 1. 实数	1
§ 2. 复数	10
习题一	21
第二章 代数式的恒等变换	27
§ 1. 整式运算与多项式恒等变换	27
§ 2. 多项式的因式分解	39
§ 3. 分式和根式	56
§ 4. 代数恒等式的证明	72
习题二	86
第三章 方程与方程组	96
§ 1. 方程与方程组	96
§ 2. 高次方程	109
§ 3. 方程式的讨论	117
§ 4. 应用问题	127
习题三	132
第四章 不等式	148
§ 1. 不等式	148
习题四	161
第五章 函数与极值	165
§ 1. 函数的概念	165
§ 2. 函数的性质	179
§ 3. 函数的极值	188
习题五	202

第六章 指数与对数	211
§ 1. 指数函数与对数函数	211
§ 2. 指数方程与对数方程	233
习题六	240
第七章 数列与极限	244
§ 1. 数列	244
§ 2. 极限	263
习题七	279
第八章 排列组合与二项式定理	289
§ 1. 排列组合与二项式定理	289
§ 2. 有重复的排列与组合	300
习题八	304
第九章 数学归纳法	309
§ 1. 数学归纳法概述	309
§ 2. 数学归纳法续	316
习题九	332
附录 整除性与中国剩余定理——数论初步	339
§ 1. 整除性概念及其基本性质	339
§ 2. 一些十进制的整除性	342
§ 3. 同余式	346
§ 4. 解同余式、中国剩余定理	355
习题答案	368

第一章 实数与复数

§ 1. 实数

1, 2, 3, ..., n , ...

通称为自然数或正整数。正整数、零、负整数统称为整数。

凡大于 0 的数(实数)叫正数;小于 0 的数(实数)叫负数。

设 P , q 各为整数, 当 $q \neq 0$ 时, 凡能以 $\frac{P}{q}$ 表示的数称为分数或有理数。当 $q = 1$ 时, 显然分母为 1 的分数是整数。因此整数是分数的特例。可见整数集是有理数集的子集。就是说有理数集包含整数集。

通常, 称无限不循环小数为无理数, 如:

$$\pi = 3.14159265\dots;$$

$$\sqrt{2} = 1.41421356\dots;$$

$$\sqrt{3} = 1.73205080\dots;$$

$$\sqrt{5} = 2.23606797\dots;$$

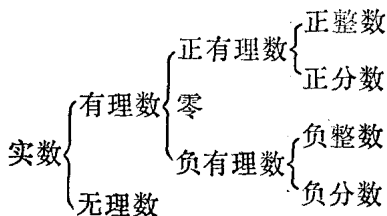
$$e = 2.718281828459\dots$$

等等, 都是无理数。但, 这里有一个问题, 怎么知道这些数是无限不循环的小数呢? 这却是难以直接回答的。因此后来又以: 凡数轴上由非有理点所对应的数定义为无理数。如 $\sqrt{2}$ 、 $\sqrt{3}$ 、 $\sqrt{5}$ 等等, 就是根据这一定义来论断的。

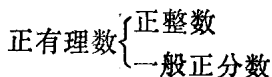
由此可见, 在数集中不存在既是有理数又是无理数的数。

用集论的话说：有理数集与无理数集的交是空集，而有理数集与无理数集的并称为实数集。用通俗的话说：有理数、无理数统称为实数。

值得注意的是，至今还有按下表列写数系的：



严格地说，在有理数部分，这样列写是不恰当的。因为正有理数就是正分数，正整数集是正分数集的子集。为此，建议改正成：



即把正整数作为特殊的正分数。同理，负有理数部分也是如此。

实数集具有：

性质 1 实数和数轴上的点一一对应。

由于直线上的点是连续排列的，既然实数集的数和数轴上的点一一对应，故实数构成连续统。

性质 2 实数满足加法、乘法基本运算律。且对实数施行除法(除数不为零外)的四则运算结果仍是实数。

因此，又称实数集为实数域。

性质 3 实数集中任两元素间存在着顺序关系，且满足基本顺序律。

性质 4 实数集满足比较性质。

因此，实数是可以比较大小的。

当 x 是实数时， x 的绝对值记作 $|x|$ ，且

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{当 } x \geq 0; \\ -x, & \text{当 } x < 0. \end{cases}$$

如 a 为正实数时， $|x| \leq a$ 是指：

当 $x \geq 0$ 时， $x \leq a$ ；

当 $x < 0$ 时， $-x \leq a$ ，即 $x \geq -a$ 。

概括这两式，常记作

$$-a \leq x \leq a.$$

这即表示满足下列不等式组

$$\begin{cases} x \leq a \\ x \geq -a \end{cases}$$

的实数的全体。

此外，由于实数的平方不小于零，因此，若 x, y 都是实数时，常以

$$x^2 + y^2 = 0$$

表示 $x = 0, y = 0$ 。又以

$$x^2 + y^2 \neq 0$$

表示 x, y 不全为 0。

如果一个数的 n 次幂等于 a ，则这个数叫做 a 的 n 次方根。如

$$x^4 = 16$$

即 $x^4 - 2^4 = (x-2)(x+2)(x-2i)(x+2i) = 0$

在复数范围内， $2, -2, 2i, -2i$ 都称为 16 的 4 次方根；在实数范围内，只有 2 和 -2 才是 16 的 4 次方根；而在零和正实数的范围内，则只有 2 才是 16 的 4 次方根。并称 2

是16的四次算术根.

一般说来, 在零和正实数的范围内, 无论 n 是奇次还是偶次, 对于这范围内的 a 都只有一个 n 次方根. 常称此为算术根, 并记作 $\sqrt[n]{a}$. 如 $\sqrt[4]{16} \neq -2$, $\sqrt[4]{16} \neq 2i$, $\sqrt[4]{16} \neq -2i$, $\sqrt[4]{16} = 2$. 因为只有2才是16的算术根.

在实数范围内, 正实数 a 的偶次方根有两个, 它们是互为相反的数, 分别记作 $\sqrt[n]{a}$ 、 $-\sqrt[n]{a}$. 如实数范围内, 16的4次方根为 $\sqrt[4]{16} = 2$ 和 $-\sqrt[4]{16} = -2$. 这里应注意 $\sqrt[4]{16}$ 始终表示算术根. 而负实数在实数范围内不存在算术根. 零的奇次或偶次方根都是零. 正实数 a 的奇次方根只有一个 $\sqrt[n]{a}$. 负实数 $-a$ 的奇次方根也只有一个, 即 $\sqrt[n]{-a} = -\sqrt[n]{a}$.

本节的例题, 将牵涉绝对值, 算术根, 与常见的实数问题. 关于绝对值、算术根是初学者所应特别注意的.

例1 设实数 $m \neq n$, 试指出下式错在哪里.

$$m^2 - 2mn + n^2 = n^2 - 2nm + m^2$$

$$(m-n)^2 = (n-m)^2$$

$$\sqrt{(m-n)^2} = \sqrt{(n-m)^2}$$

$$m-n = n-m$$

$$2m = 2n$$

$$\therefore m = n.$$

分析 主要错误, 在于第三个等式到第四个等式这一步. 因为就 $m > n$ 时, 由

$$\sqrt{(m-n)^2} = \sqrt{(n-m)^2},$$

依算术根为

$$m-n = m-n.$$

另外, 由第二个等式到第三个等式这一步, 是不完全的.

应该是:

$$\sqrt{(m-n)^2} = \sqrt{(n-m)^2},$$

及 $\sqrt{(m-n)^2} = -\sqrt{(n-m)^2}.$

(其中包括 $-\sqrt{(m-n)^2} = -\sqrt{(n-m)^2}$; $-\sqrt{(m-n)^2} = \sqrt{(n-m)^2}.$

例 2 若 x, y 都是实数, 试述下列各式的变化范围,
(其中 a 是正常数)

① $|x| \leq a, |y| \leq a.$

② $\begin{cases} |x| \leq a \\ |y| \leq a. \end{cases}$

③ $|x+y| \leq a.$

④ $|x| + |y| \leq a.$

分析 绝对值不等式 $|x| \leq a$ 与

$$-a \leq x \leq a \text{ 或 } \begin{cases} x \leq a \\ x \geq -a \end{cases}$$

等价. 在数轴上表示为包括点 a 与点 $-a$ 及其间实数点的全体. 在数平面上则表示为包括边界 $x=a$ 及 $x=-a$ 的带形区域. (想一想, 为什么)

解答 ① 的变化范围, 如图 1-1, 1-2 阴影部分.

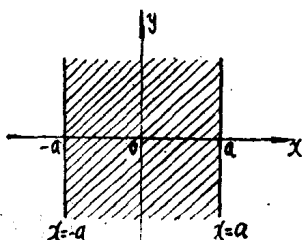


图 1-1

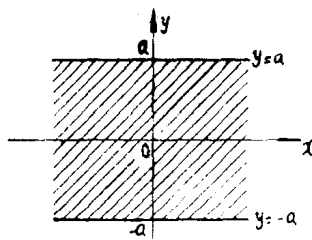


图 1-2

② 的变化范围, 为 $|x| \leq a$, $|y| \leq a$ 的公共部分(交).

如图 1-3.

③ 的变化范围, 为

$$\begin{cases} x+y \leq a \\ x+y \geq -a \end{cases}$$

其中, $y \leq -x+a$ 表示包括边界 $y = -x+a$ 的下半平面;
 $y \geq -x-a$ 表示包括边界 $y = -x-a$ 的上半平面. 而

$$\begin{cases} x+y \leq a \\ x+y \geq -a \end{cases}$$

则表示上述两个半平面的交 (一斜带形区域). 如图 1-4.

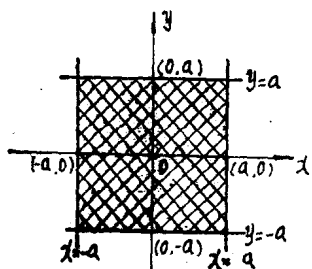


图 1-3

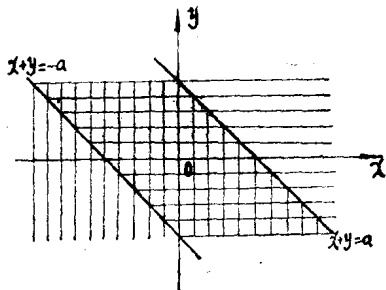


图 1-4

④ 的变化范围为满足不等式方程组

$$\begin{cases} x+y \leq a \\ x+y \geq -a \\ x-y \leq a \\ x-y \geq -a \end{cases}$$

(x, y) 的全体. 即如图 1-5, 四个半平面的交 (且包括边界).

例 3 试证 $\sqrt{3}$ 为无理数.

分析 要证 $\sqrt{3}$ 为无理数, 即要证明 $\sqrt{3}$ 为数轴上非有理点所对应的一个数. 这就需先证明 $\sqrt{3}$ 不是有理数.

采用反证法, 从既约分数入手, 通过一系列恒等变换, 若得一未约分数, 则矛盾可证.

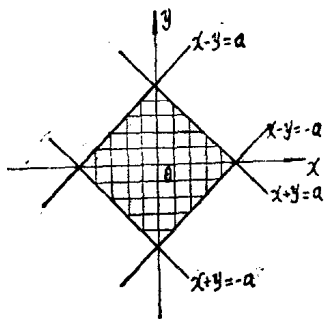


图 1—5

具体说来, 若 m, n 为整数, 设 $\sqrt{3} = \frac{n}{m}$ 为既约分数, 则 $3m^2 = n^2$, 说明 n^2 是 3 的倍数, 而 n 又能否被 3 整除呢? 这就需要考虑一个性质:

若一整数平方为 3 所整除, 则该数必为 3 所整除. 要证明这一性质, 又牵涉到一个反命题:

若一整数不能被 3 整除, 则它的平方也不被 3 整除. 事实上对 3 说来, 把整数分为三类, 即

$$3K, 3K+1, 3K+2, (K=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

其中 $3K+1, 3K+2$ 为不能被 3 的整除类, 且

$$(3K+1)^2 = 9K^2 + 6K + 1 = 3(3K^2 + 2K) + 1$$

$$(3K+2)^2 = (3K+3-1)^2 = 3[3(K+1)^2 - 2(K+1)] + 1$$

仍是不能为 3 所整除类. 于是该命题得证.

另一方面, 关于上一性质, 已知一整数平方为 3 所整除, 则由后一命题得知, 该数的平方, 也不能为 3 所整除. 于是

发生矛盾，该性质得证。

证明 设既约分数平方等于 3，即

$$\left(\frac{n}{m}\right)^2 = 3, \quad n^2 = 3m^2 \quad (*)$$

可见，依分析中的前一性质， n 必被 3 整除，即 $n = 3p$ ，以此代入 (*) 式得

$$(3p)^2 = 3m^2,$$

即 $m^2 = 3p^2.$

可见， m 又被 3 所整除。于是 n 与 m 有公约数 3，这与所设既约分数矛盾。由此 $\sqrt{3} \neq \frac{n}{m}$ ，即 $\sqrt{3}$ 是非有理数。

而 $\sqrt{3}$ 在数轴上有确定的位置，故 $\sqrt{3}$ 为非有理点所对应的数，即无理数。

注 上述论证，虽较冗长，但，是严格的。

通常论证 $\sqrt{2}$ 为无理数，皆取同一手法。读者不妨就此试证 $\sqrt{5}$ 为无理数。

例 4 在 $S = \frac{ax+b}{cx+d}$ 中， a, b, c, d 是有理数，且 $c \neq 0$ ， x 是无理数，试证：

① 若 $bc = ad$ ，则 S 为有理数；

② 若 $bc \neq ad$ ，则 S 为无理数。

证明 ① 因 $c \neq 0$ 及 $bc = ad$ ，故有

$$S = \frac{c(ax+b)}{c(cx+d)} = \frac{a(cx+d)}{c(cx+d)} = \frac{a}{c}$$

由于 a, c 是有理数，故 $S = \frac{a}{c}$ 是有理数。

② 因 $c \neq 0$ 及 $bc \neq ad$ 即 $bc - ad \neq 0$ 。

$$S = \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c(cx+d)}$$

其中 $\frac{a}{c}$ 是有理数，但 $\frac{bc-ad}{c(cx+d)}$ 是无理数，而有理数与无理数之和是无理数。

例 5 设 x, y 为有理数，且 $(x-y\sqrt{2})^2 = 9-4\sqrt{2}$ ，求 x, y 的值。

解一 由 $(x-y\sqrt{2})^2 = 9-4\sqrt{2}$ 得

$$x^2 + 2y^2 - 2xy\sqrt{2} = 9 - 4\sqrt{2},$$

而 x, y 是有理数，比较等式两边得

$$\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 9 & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2xy = 4 & (2) \end{cases}$$

解这个方程组得

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ y_1 = 2 \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} x_2 = -1 \\ y_2 = -2. \end{cases}$$

解二 由 $(x-y\sqrt{2})^2 = 9-4\sqrt{2}$ 得

$$(x-y\sqrt{2}) = \pm\sqrt{9-4\sqrt{2}}$$

即 $x-y\sqrt{2} = \pm(2\sqrt{2}-1)$

而 x, y 为有理数，比较等式两边，得

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ y_1 = 2 \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} x_2 = -1 \\ y_2 = -2. \end{cases}$$

例 6 设 a 是任意实数，化简：

$$\sqrt{a^2} + \sqrt{(1-a)^2}.$$

解 由于

$$\sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a & (\text{当 } a \geq 0 \text{ 时}) \\ -a & (\text{当 } a < 0 \text{ 时}), \end{cases}$$

$$\sqrt{(1-a)^2} = |1-a| = \begin{cases} 1-a & (\text{当 } a \leq 1 \text{ 时}) \\ a-1 & (\text{当 } a > 1 \text{ 时}). \end{cases}$$

故
$$\sqrt{a^2} + \sqrt{(1-a)^2} = |a| + |1-a|$$

$$= \begin{cases} 2a-1 & (\text{当 } a \geq 1) \\ 1 & (\text{当 } 0 \leq a < 1) \\ 1+2a & (\text{当 } a < 0). \end{cases} \checkmark$$

注 如果认为 $\sqrt{(a-b)^2} = a-b$ 则是错误的，请读者特别注意。

§ 2. 复 数

当 a, b, c 都是实数，解 $az^2 + bz + c = 0$ 形式的二次方程时，则它的根将是 $x + y\sqrt{-1}$ 形式的数，其中 x 与 y 都是实数，这样的数称为复数。当 $y = 0$ 时复数退化为实数，因此实数是复数的特例。当 $x = 0, y \neq 0$ 时它就成为纯虚数。通常称 x 为实部， y 为虚部。记 $\sqrt{-1} = i$ ，则 $x + yi$ 称为复数的代数表示。此外也有用坐标形式 (x, y) 表示复数的。后者如同实数和数轴的关系一样，这里发展成复数与数平面对应。

当且仅当 $x = y = 0$ 时，称此复数为零，并记作 0 或 $(0, 0)$ 。关于这一点，初学者应认真识别。正如数轴上的原点与数平面的原点是有所区别的。

若 $x_m + y_m i = x_n + y_n i$ 或 $(x_m, y_m) = (x_n, y_n)$ ，则它们的实部与虚部分别相等。即

$$x_m = x_n, \quad y_m = y_n.$$

复数相等与复数为零的概念，在计算与解题时是经常要遇到的。

关于复数在各种表示形式之下的加、减、乘、除、乘方、开方、棣莫佛公式及互换关系有如下表。并且不难验明复数的加法与乘法运算，有如实数一样遵循算术的五个法则。即符合加法交换律、结合律，乘法交换律、结合律，及乘法对加法的分配律。（见下表）

除除数不能为零复数外，复数之间进行有限次四则的结果仍是复数。因此复数四则的结果是自封的。

尽管实数可比较大小，但复数一般是不可比较大小的。

本节将仅就复数的基本运算举例。这里复数为零与相等的概念是经常发挥作用的。

例 1 当 x 、 y 为什么实数值时，下列等式成立？

$$\frac{x+1+(y-3)i}{5+3i} = 1+i.$$

解 消去分母，我们得到

$$x+1+(y-3)i = 2+8i.$$

依两个复数相等的定义有：

$$\begin{cases} x+1=2, \\ y-3=8. \end{cases}$$

$$\therefore x=1, y=11.$$

例 2 从下列关系求 x 、 y 的实数值。

$$(x+y)^2 i - \frac{6}{i} - x = -y + 5i(x+y) - 1.$$

解 两边乘以 $-i$ ，我们得到

$$[(x+y)^2 + 6] + xi = 5(x+y) + (y+1)i,$$

根据复数相等的定义，得

$$\begin{cases} (x+y)^2 + 6 = 5(x+y), \\ x = y + 1. \end{cases}$$