北京师范大学现代数学丛书

Beijing Normal University Modern Mathematics Series

NEVANLINNA-PICK

插值和矩量问题

陈公宁　胡永建　著

北京師範大學出版社

北京师范大学现代数学丛书

Beijing Normal University Modern Mathematics Series

NEVANLINNA-PICK 插值和矩量问题

陈公宁　胡永建　著

B1289842

北京师范大学出版社

·北京·

MA138/13

图书在版编目(CIP)数据

NEVANLINNA－PICK 插值和矩量问题/陈公宁，胡永建著. －北京：北京师范大学出版社，2003.2
(北京师范大学现代数学丛书)
ISBN 7-303-06409-5

Ⅰ.N…　Ⅱ.①陈…②胡…　Ⅲ.①插值②矩量问题　Ⅳ.0174.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 108571 号

北京师范大学出版社出版发行
(北京新街口外大街 19 号　邮政编码：100875)
出版人：常汝吉
北京师范大学印刷厂印刷　全国新华书店经销
开本：730mm×980mm　1/16　印张：21.5　字数：410 千字
2003 年 2 月第 1 版　2003 年 2 月第 1 次印刷
定价：28.80 元

作者简介

NEVANLINNA-PICK

插值和矩量问题

陈公宁

1939年11月25日出生于福建省福州市.1960年本科毕业于北京师范大学数学系.1962年该系研究生班毕业后留校工作至今. 现任北京师范大学数学系教授,博士生导师. 到目前为止,培养了博士研究生5名,硕士研究生11名,博士后1名. 先后访问过美国加州大学圣塔巴巴拉分校(2年,师从Ky Fan教授)、俄罗斯国立莫斯科大学数力系、美国密执安大学数学系. 主要从事矩阵与算子理论及解析矩阵函数插值理论的研究工作. 在国内外重要期刊上发表论文60余篇,其中在被SCI收录期刊上发表论文20余篇. 先后出版《计算方法导引》《矩阵理论与应用》《计算方法》三部本科生和研究生教材.

1972年5月12日出生于湖北省武汉市新洲县.1994年本科毕业于北京师范大学数学系.1999年获北京师范大学理学博士学位(5年,师从陈公宁教授). 毕业后留校工作至今. 现任北京师范大学数学系副教授. 主要从事特殊矩阵理论与解析矩阵函数插值理论的教学和研究工作. 在国内外重要期刊上发表论文20余篇,其中在被SCI收录期刊上发表论文7篇.

胡永建

《北京师范大学现代数学丛书》编委会

主　任　严士健

编　委　（按姓氏笔画排列）

王世强　王伯英　王梓坤　刘绍学　孙永生

严士健　张英伯　陈木法　陆善镇　郑学安

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

序　言

Nevanlinna-Pick 插值和矩量问题是分析中两个著名的经典问题. Nevanlinna-Pick 插值源于 20 世纪初. G. Pick 最先给出带有限多个单重插值点的 Nevanlinna-Pick 插值的可解条件. 不久, R. Nevanlinna 研究了插值点集可数的情形并给出解的表示. 当插值点集不可数时, 这类 Nevanlinna-Pick 插值由 M.G. Krein 和 P.G. Rekhtman 解决. 此期间 I. Schur, O. Toeplitz, C. Carathéodory, A. Denjoy 等人也做出许多开创性的贡献. 然而, 矩量问题最早可追溯到 T. Stieltjes, P.L. Chebyshev, A. Markov 的工作, 距今已有一百多年的历史. 20 世纪初叶, H. Hamburger, R. Nevanlinna, F. Hausdorff, F. Riesz, M. Riesz 与 T. Carleman 等数学家在这方面做了大量开创性的工作.

古典的 Nevanlinna-Pick 插值和矩量问题经过数十年的发展, 逐渐推广到矩阵值乃至算子值情形. 迄今为止, 人们对这两类问题及其推广问题的研究已经取得了丰硕的成果, 并且出现了各种各样的研究流派与研究方法.

人们研究 Nevanlinna-Pick 插值和矩量问题的兴趣在很大程度上是缘自这两类问题本身理论上的深刻内涵以及在电路、网络、系统理论、控制理论和量子理论等领域中的大量应用. 比如说, 受矩量理论的启发, M.G. Krein 等发展出对称算子的自共轭算子扩张与广义谱函数理论. 又如, 在宽波段匹配、级联合成、半导体模型的建立、线性预测等方面它们具有重要的应用. 一个典型例子是: 地质学家在石油勘探中所采用的多层媒介模型, 若假定入射波是单位脉冲, 并且以地面上测得的反射波的振幅为初始插值数据, 则这个模型恰好对应着 Caratheodory 函数类中的 Nevanlinna-Pick 插值, 插值问题的 Schur 参数对应着地下不同地质层的反射系数, 而插值的解恰为第 0 层表面 (地表面) 的耗散函数.

历史上对 Nevanlinna-Pick 插值和矩量问题的研究基本上是独立进行的, 并没有充分认识到这两类问题之间的内在联系, 而且大量的结果多限于非退化情形. 在 1979 年, 比利时数学家 Ph. Delsarte, Y. Genin 和 Y. Kamp 指出, Caratheodory 类中带单重点的 Nevanlinna-Pick 插值与三角矩量问题之间存在着联系, 但他们没有给出明确的对应关系式. 而且, 他们所采用的直接计算的方法很难推广到带多重插值数据的 Nevanlinna-Pick 插值的情形. 此前, 前苏联数学家 N.I. Akhiezer 与

M.G. Krein 也分别考虑了插值与幂矩量问题之间的对应.

近十余年来，作者及其合作者对 Nevanlinna-Pick 插值和矩量问题做了大量的研究工作. 本书是这些科研成果的一个总结，所选材料基本上是这些年来作者发表在 Linear Algebra and its Applications (LAA) 和 Journal of Mathematical Analysis and Application (JMAA) 等杂志上论文的内容及其某些新的改进结果. 并且，多数基本结论都辅以演示性的实例，以便读者更好地理解它们.

本书的两个重点是：其一，作者应用一种代数工具 —— 块 Hankel/Toeplitz 向量建立了 Nevanlinna-Pick 插值和矩量问题之间的一种简明的内在联系. 具体地说，通过所谓 Hankel/Toeplitz 向量方法将形式多样又较为复杂的带多重插值数据的 Nevanlinna-Pick 插值等价地转化为某种带约束条件或不带约束条件的矩量问题. 后者不仅形式简单而且较易于解决. 其二，通过求解这些矩量问题，进而直接得到了 Nevanlinna-Pick 插值问题解的存在与解的惟一性准则以及在退化与非退化情形通解的参数化表示. 这两个问题的交汇促成它们相互之间的充实，并开辟进一步发展与应用的新的可能空间.

作者顺便指出，目前国内有关这方面的工作甚少，与国际上大量的研究成果形成鲜明的对比. 作者希望本书的出版可以在一定程度上弥补这个不足，并能引起更多同行的注意和关心.

在本课题的研究过程中，作者有幸得到美国加州大学 Santa Barbara 分校数学系 Ky Fan 教授的多年的帮助、指导与鼓励. 正是他把我们的研究小组引进这个十分有意义的研究领域.

作者也感谢研究小组内许多成员多年来的或先或后的合作与贡献，他们是：张惠品博士、赵斌博士、杨正宏博士、李小青博士、吴化璋博士、张晓南博士、贾利新硕士、赵生富硕士、郝辉硕士等. 感谢我们的亲人特别是夫人郑欣女士与王丽萍女士的无私关心与支持.

本书中成果基本上是在国家自然科学基金 (No.19971009 和 No.10271018) 与数学天元青年基金 (TY10126009) 资助下完成的. 北京师范大学出版社的潘淑琴与王永会同志做了精心的编辑工作. 对于这些帮助，作者在此一并表示感谢！

本书完稿之际恰逢北京师范大学百年华诞. 作者仅以此书表达对母校的恩泽与众多师长的教导提携的感念之情.

陈公宁　胡永建

2002 年 6 月于北京师范大学

本书主要阐述求解诸种类型矩阵值的Nevanlinna-Pick插值的一种块Hankel/Toeplitz方法以及这些Nevanlinna-Pick插值与相关的矩阵矩量问题之间的联系.

目 录

第 1 章

$\mathcal{N}_p$ 类中的多重 Nevanlinna-Pick 插值与 Hamburger 矩量问题

除了在 §1 中介绍 $\mathcal{N}_p$ 类函数外, 在本章 §2~§4 中, 应用块 Hankel 向量方法建立 $\mathcal{N}_p$ 类中带多重插值点的 Nevanlinna-Pick 插值 ($\mathrm{NP}(\mathcal{N}_p)$) 问题和矩阵值 Hamburger 矩量 ($\mathrm{HM}(\mathbf{R})$) 问题之间的一种明确的内在联系. 基于 $\mathrm{HM}(\mathbf{R})$ 问题的研究成果, 这种联系不仅可以得到 $\mathrm{NP}(\mathcal{N}_p)$ 问题解的存在、惟一性准则, 而且还可以给出可解 $\mathrm{NP}(\mathcal{N}_p)$ 问题的通解的参数化表示. 在本章 §5 中, 我们引入 $\mathrm{NP}(\mathcal{N}_p)$ 问题与它的相关矩阵值矩量问题的基本矩阵不等式概念. 通过基本矩阵不等式之间的变换, 重新证明了这两类插值问题解集之间的对应关系. 作为 $\mathrm{NP}(\mathcal{N}_p)$ 问题与矩量问题的共同推广, 本章最后一节 §6 讨论一类 Akhiezer 插值问题.

本章的主要内容取材于作者及其合作者关于 $\mathrm{NP}(\mathcal{N}_p)$ 问题和 $\mathrm{HM}(\mathbf{R})$ 问题的近期研究成果 [4~6, 8~9].

§1 $\mathcal{N}_p$ 类函数及其积分表示

给定整数 $p,q \geqslant 1$. 用 $\mathbf{C}^{p\times q}$ 表示所有 $p\times q$ 复矩阵组成的线性空间. 若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in \mathbf{C}^{p\times p}$, 则 $\boldsymbol{A}\geqslant 0$ ($\boldsymbol{A}>0$) 表示 $\boldsymbol{A}$ 是 p 阶 Hermite 非负定 (正定) 矩阵; $\boldsymbol{A}\geqslant \boldsymbol{B}$ ($\boldsymbol{A}>\boldsymbol{B}$) 表示 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 为 Hermite 矩阵, 并且, $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\geqslant 0$ ($\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}>0$). 用 $\boldsymbol{I}_p$ 表示 p 阶单位矩阵. 此外, 为方便计, 在本书中我们用记号 $F(z)$ 表示函数 $z\longmapsto F(z)$.

我们称一个 $\mathbf{C}^{p\times p}$- 值函数 $F(z)$ 为 **Nevanlinna 函数**, 假如它在开的上半复平面 $\pi^+=\{z\in\mathbf{C}\,|\,\mathrm{Im}\,z>0\}$ 内解析, 且在 π^+ 内 $\mathrm{Im}\,F(z)=(2\,\mathrm{i})^{-1}(F(z)-F^*(z))\geqslant 0$. 这样的 Nevanlinna 函数 $F(z)$ 的全体组成 $\mathbf{C}^{p\times p}$- 值 Nevanlinna 函数类, 记为 $\mathcal{N}_p$.

在本节中, 我们将罗列有关 $\mathcal{N}_p$ 类函数的一些结果. 其中一部分是著名的结论, 其证明可见指明的文献; 余下部分是新的或鲜见于一般文献的结果, 我们给予

此为试读, 需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

证明.

定理 1.1.1 [3]　一个 $\mathbf{C}^{p\times p}$- 值函数 $F(z)$ 属于 $\mathcal{N}_p$ 类，当且仅当它采纳下面的积分表示：

$$F(z) = \alpha z + \beta + \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{u-z} - \frac{u}{1+u^2}\right) \mathrm{d}\sigma(u), \tag{1.1.1}$$

式中，$\alpha, \beta \in \mathbf{C}^{p\times p}$ 且 $\alpha \geqslant 0$, $\beta = \beta^*$, 而 $\sigma(u)$ 是 $\mathbf{R}$ 上某个 $\mathbf{C}^{p\times p}$- 值分布函数，满足条件

$$\operatorname{trace} \int_{-\infty}^{+\infty} (1+u^2)^{-1} \mathrm{d}\sigma(u) < +\infty. \tag{1.1.2}$$

这里, 我们说 $\sigma(u)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的一个 $\mathbf{C}^{p\times p}$**- 值分布函数**, 假如 $\sigma(u) := (\sigma_{ik}(u))_{i,k=1}^{p}$, 它在 $\mathbf{R}$ 上是不减 (按 Hermite 矩阵的 Loewner 序关系) 与右连续的 p 阶 Hermite 矩阵值函数: 如 $-\infty < \lambda < \mu < +\infty$, 则 $\sigma(\lambda) \leqslant \sigma(\mu)$, $\sigma(u+0) = \sigma(u)$, $\forall\, u \in \mathbf{R}$, 并且, $\sigma(-\infty) := \lim\limits_{u\to-\infty} \sigma(u) = 0$. 在 (1.1.1) 式中, 应用矩阵值情形的 **Stieltjes-Perron 逆公式**:

$$\frac{\sigma(u) + \sigma(u-0)}{2} = \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_{-\infty}^{u} \operatorname{Im} F(x + \mathrm{i}\varepsilon) \mathrm{d}x,$$

$\sigma(u)$ 由 $F(z)$ 惟一确定. 今后，如无混淆可能，我们有时也将 $\mathbf{R}$ 上的 $\mathbf{C}^{p\times p}$- 值分布函数简称为 **R 上分布函数**.

如果令

$$\tau(u) := \int_{-\infty}^{u} (1+t^2)^{-1} \mathrm{d}\sigma(t), \quad -\infty < u < +\infty,$$

则 $\tau(u)$ 也是 $\mathbf{R}$ 上的一个 $\mathbf{C}^{p\times p}$- 值分布函数，且

$$\operatorname{trace} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\tau(u) < +\infty.$$

此时，$F(z)$ 的积分表示 (1.1.1) 可以改写成

$$F(z) = \alpha z + \beta + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+uz}{u-z} \mathrm{d}\tau(u), \tag{1.1.3}$$

其中 $\tau(u)$ 是 $\mathbf{R}$ 上某个具有有界的全变差的分布函数. 注意到,

$$F(\mathrm{i}) = \mathrm{i}\alpha + \beta + \mathrm{i} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\tau(u),$$

由此得分布函数 $\tau(u)$ 在 $\mathbf{R}$ 上的全变差

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\tau(u) = \operatorname{Im} F(\mathrm{i}) - \alpha.$$

对任意 $F(z) \in \mathcal{N}_p$, 它可以通过反射: $F(z) = F^*(\overline{z})$, $\operatorname{Im} z < 0$ 开拓到开的下半复平面 π^- 内, 并且, 当 $\operatorname{Im} z \neq 0$ 时, 积分表示 (1.1.1) 或 (1.1.3) 仍然有效. 此外, 当 $F(z) \in \mathcal{N}_p$ 有积分表示 (1.1.1) 或 (1.1.3) 时, 极限关系

$$\lim_{z\to\infty} \frac{F(z)}{z} = \alpha \tag{1.1.4}$$

在每个扇形区域 $\pi_\varepsilon(0)$:

$$\pi_\varepsilon(0) := \{z \in \pi^+ : \varepsilon \leqslant \arg z \leqslant \pi - \varepsilon\}, \quad \varepsilon \in \big(0, \pi/2\big) \tag{1.1.5}$$

内一致地成立.

我们说, 一个 $\mathbf{C}^{p\times p}$- 值函数 $F(z)$ 属于 $\mathcal{N}_p$ 类的子类 $\mathcal{N}_p^\circ$, 假如它有积分表示:

$$F(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} (u - z)^{-1} \mathrm{d}\sigma(u), \tag{1.1.6}$$

式中, $\sigma(u)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的某个分布函数, 满足有界全变差的条件:

$$\operatorname{trace} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\sigma(u) = \sum_{j=1}^{p} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\sigma_{jj}(u) < +\infty. \tag{1.1.7}$$

定理 1.1.2 [1] 设 $F(z) \in \mathcal{N}_p$, 则 $F(z) \in \mathcal{N}_p^\circ$ 的一个充分必要条件是

$$C := \sup_{y\geqslant 1} \|yF(\mathrm{i}y)\| < +\infty, \tag{1.1.8}$$

式中, $\|\cdot\|$ 是 $\mathbf{C}^{p\times p}$ 上某个矩阵范数.

证明 条件的必要性是显然的. 下面证明充分性. 由于 $\mathbf{C}^{p\times p}$ 上诸矩阵范数的等价性, 我们不妨选取 $\|\cdot\|$ 为矩阵的 Frobenius 范数 $\|\cdot\|_F$. 设 $F(z)$ 满足条件 (1.1.8) 且有积分表示 (1.1.3), 则

$$yF(\mathrm{i}y) = \mathrm{i}\alpha y^2 + \beta y + y\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 + \mathrm{i}uy}{u - \mathrm{i}y} \mathrm{d}\tau(u),$$

因此, 对 $y \geqslant 1$,

$$\|\operatorname{Im}(yF(\mathrm{i}y))\|_F \leqslant \|yF(\mathrm{i}y)\|_F \leqslant C,$$

$$\|\operatorname{Re}(yF(\mathrm{i}y))\|_F \leqslant \|yF(\mathrm{i}y)\|_F \leqslant C.$$

上述第一个不等式蕴涵了 $\alpha = 0$, 且对任意 $y \geqslant 1$, 有

$$\operatorname{trace}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{y^2(1+u^2)}{u^2+y^2}\mathrm{d}\tau(u) < +\infty.$$

由 Lebesgue 控制收敛定理，得

$$\operatorname{trace}\int_{-\infty}^{+\infty}(1+u^2)\mathrm{d}\tau(u) < +\infty. \tag{1.1.9}$$

而由第二个不等式可得

$$\beta + \lim_{y\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{u(1-y^2)}{u^2+y^2}\mathrm{d}\tau(u) = \lim_{y\to+\infty}\frac{\operatorname{Re}(yF(\mathrm{i}y))}{y} = 0.$$

因此,

$$\beta = \int_{-\infty}^{+\infty} u\mathrm{d}\tau(u).$$

令

$$\sigma(u) := \int_{-\infty}^{u}(1+t^2)\mathrm{d}\tau(t), \quad -\infty < u < +\infty.$$

由 (1.1.9) 式知，$\sigma(u)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的分布函数且有有界的全变差. 综上所述，这时 $F(z)$ 的积分表示 (1.1.3) 可以改写成下面的形式:

$$\begin{aligned} F(z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} u\mathrm{d}\tau(u) + \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1+uz}{u-z}\mathrm{d}\tau(u) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}(1+u^2)(u-z)^{-1}\mathrm{d}\tau(u) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}(u-z)^{-1}\mathrm{d}\sigma(u). \end{aligned}$$

这表明 $F(z) \in \mathcal{N}_p^{\circ}$. 定理证毕.　■

定理 1.1.3　设 $F(z) \in \mathcal{N}_p$, 则

(1°) 当且仅当对某 $z_0 \in \pi^+$, $\operatorname{rank}\operatorname{Im}F(z_0) = r$ 时，对所有 $z \in \pi^+$ 有

$$\operatorname{rank}\operatorname{Im}F(z) = r.$$

(2°) 当且仅当对某 $z_0 \in \pi^+$, $\operatorname{Im}F(z_0) > 0$ 时，对所有 $z \in \pi^+$ 有 $\operatorname{Im}F(z) > 0$. 此时，$F(z)$ 在 π^+ 内处处可逆，且 $-F^{-1}(z) \in \mathcal{N}_p$.

证明 设 $F(z)\in\mathcal{N}_p$ 的积分表示为 (1.1.1), 则对 $z_0:=x_0+\mathrm{i}y_0\in\pi^+$ $(x_0\in\mathbf{R},y_0>0)$ 与任意 $z:=x+\mathrm{i}y$ $(x\in\mathbf{R},y>0)$ 有

$$\operatorname{Im}F(z_0)=\alpha y_0+\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{y_0}{(u-x_0)^2+y_0^2}\mathrm{d}\sigma(u)\geqslant 0,$$

$$\operatorname{Im}F(z)=\alpha y+\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{y}{(u-x)^2+y^2}\mathrm{d}\sigma(u)\geqslant 0.$$

考虑关于实变量 u 的函数

$$g(u)=\frac{(u-x_0)^2+y_0^2}{(u-x)^2+y^2}\cdot\frac{y}{y_0},\quad u\in\mathbf{R}.$$

容易证明它是有界的，且存在实数 $c,d>0$, 使得 $0<c\leqslant g(u)\leqslant d,\quad\forall\,u\in\mathbf{R}$. 那么，我们有

$$\begin{aligned}\operatorname{Im}F(z)&\geqslant\alpha y+c\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{y_0}{(u-x_0)^2+y_0^2}\mathrm{d}\sigma(u)\\&=\frac{y}{y_0}\cdot\alpha y_0+c\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{y_0}{(u-x_0)^2+y_0^2}\mathrm{d}\sigma(u)\\&\geqslant\min\{\frac{y}{y_0},c\}\Big(\alpha y_0+\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{y_0}{(u-x_0)^2+y_0^2}\mathrm{d}\sigma(u)\Big)\\&=\min\{\frac{y}{y_0},c\}\operatorname{Im}F(z_0)\geqslant 0.\end{aligned}$$

类似地可证:

$$\operatorname{Im}F(z)\leqslant\max\{\frac{y}{y_0},d\}\operatorname{Im}F(z_0).$$

因此,

$$0\leqslant\min\{\frac{y}{y_0},c\}\operatorname{Im}F(z_0)\leqslant\operatorname{Im}F(z)\leqslant\max\{\frac{y}{y_0},d\}\operatorname{Im}F(z_0).$$

由此容易得出，$\operatorname{rank}\operatorname{Im}F(z)=\operatorname{rank}\operatorname{Im}F(z_0)$, $\forall\,z\in\pi^+$, 于是，(1°) 与 (2°) 的第一部分结果成立．余下证明 (2°) 的第二部分结论．事实上，这时我们有 $|\det F(z)|=|\det(\mathrm{i}F(z))|\geqslant\det\operatorname{Im}F(z)>0$, $\forall\,z\in\pi^+$, 因而 $-F^{-1}(z)$ 在 π^+ 内存在且解析．再利用关系式

$$\operatorname{Im}(-F^{-1}(z))=F^{-1}(z)\operatorname{Im}F(z)F^{-1}(z)^*\geqslant 0,\quad\forall\,z\in\pi^+,$$

按定义，我们立即推出 $-F^{-1}(z)$ 属于 $\mathcal{N}_p$ 类．定理证毕．　■

上述定理表明，如果 $F(z)\in\mathcal{N}_p$, 则 $\operatorname{Im}F(z)$ 在 π^+ 内各点处的秩是不变的．特别地，当 $p=1$ 时，若对某 $z_0\in\pi^+$, $\operatorname{Im}F(z_0)=0$, 则在表示式 (1.1.1) 中，$\alpha=0$ 与 $\sigma(u)=0$, $\forall\, u\in\mathbf{R}$, 因而 $F(z)\equiv\beta\in\mathbf{R}$, 即若 $F(z)$ 在 π^+ 内某一点处值为实数，则 $F(z)$ 在 π^+ 内恒等于这个实数．

作为定理 1.1.3 的推论，我们有

推论 1.1.4 [12]　设 $F(z)\in\mathcal{N}_p$ 有积分表示 (1.1.1). 如果 $\alpha>0$ 或者

$$\int_{-\infty}^{+\infty}(1+u^2)^{-1}\mathrm{d}\sigma(u)>0, \tag{1.1.10}$$

则 $F(z)$ 在 π^+ 内可逆，且 $-F^{-1}(z)\in\mathcal{N}_p$.

证明　取 $\mathrm{i}\in\pi^+$, 我们有

$$\operatorname{Im}F(\mathrm{i})=\alpha+\int_{-\infty}^{+\infty}(1+u^2)^{-1}\mathrm{d}\sigma(u).$$

因此，若 $\alpha>0$ 或 (1.1.10) 式成立，则 $\operatorname{Im}F(\mathrm{i})>0$. 这时，本命题的结果便是定理 1.1.3 的简单推论．　■

我们指出，当 $F(z)\in\mathcal{N}_p$ 有积分表示 (1.1.3) 时，推论 1.1.4 中条件 (1.1.10) 应换为

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}\tau(u)>0, \tag*{(1.1.10)$'$}$$

其余的不变，这时，结果仍然成立．

推论 1.1.5　设 $F(z)$ 不是数值零函数，则 $F(z)\in\mathcal{N}_1$ 当且仅当 $-F^{-1}(z)\in\mathcal{N}_1$.

推论 1.1.6　设 $F(z)\in\mathcal{N}_p$, 且对某 $z_0\in\pi^+$, $\operatorname{rank}\operatorname{Im}F(z_0)=r$. 如果 p 阶酉矩阵 $\boldsymbol{U}$ 使得

$$\operatorname{Im}F(z_0):=\boldsymbol{U}\mathrm{diag}[f_1,\cdots,f_r,0,\cdots,0]\boldsymbol{U}^*,$$

这里，$f_1,\cdots,f_r$ 均为正数，则

$$\operatorname{Im}F(z):=\boldsymbol{U}\mathrm{diag}[f(z),0_{p-r}]\boldsymbol{U}^*,\quad \forall\, z\in\pi^+,$$

这里，$f(z)>0$ (r 阶), $\forall\, z\in\pi^+$.

除了 $\mathcal{N}_p$ 类函数以外，在本书中我们还要涉及到所谓的 $\mathbf{C}^{p\times p}$- 值 Nevanlinna 函数对的概念．我们说，一对 $\mathbf{C}^{p\times p}$- 值函数 $P(z),Q(z)$ 组成 $\mathbf{C}^{p\times p}$- **值 Nevanlinna 函数对** $[P(z),Q(z)]$, 假如

(1°) $P(z)$ 与 $Q(z)$ 在 π^+ 内解析;

(2°) $\operatorname{rank}\begin{pmatrix} P(z) \\ Q(z) \end{pmatrix} = p,\ \forall\, z \in \pi^+$;

(3°) $-\mathrm{i}[Q^*(z)P(z) - P^*(z)Q(z)] \geqslant 0,\ \forall\, z \in \pi^+$.

当 $Q(z)$ 在 π^+ 内可逆时, $\mathbf{C}^{p\times p}$- 值 Nevanlinna 函数对 $[P(z), Q(z)]$ 可以与 $\mathcal{N}_p$ 类函数 $P(z)Q^{-1}(z)$ 等同起来, 因为这时有

$$\frac{Q^*(z)(P(z)Q^{-1}(z) - Q^{-*}(z)P^*(z))Q(z)}{2\mathrm{i}} \geqslant 0, \quad \forall\, z \in \pi^+;$$

当 $Q(z) \equiv 0$ 时, 可以将 $[P(z), 0]$ 视为 ∞. 因此, 所有 $\mathbf{C}^{p\times p}$- 值 Nevanlinna 函数对的集合可视为 $\mathcal{N}_p$ 类函数的扩充, 其中的扩充部分均为无穷值的 $\mathbf{C}^{p\times p}$- 值函数, 它们有形式:

$$\boldsymbol{F}(z) := \boldsymbol{S}^* \begin{pmatrix} G_m(z) & 0 \\ 0 & \infty \boldsymbol{I}_q \end{pmatrix} \boldsymbol{S} \quad (m + q = p),$$

式中, $G_m(z) \in \mathcal{N}_m$, $\boldsymbol{S}$ 是某 p 阶非奇异 (常数) 矩阵, 这些扩充部分恰对应着 $Q(z)$ 为奇异的诸种情形.

现令

$$\boldsymbol{J} := \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{i}\boldsymbol{I}_p \\ -\mathrm{i}\boldsymbol{I}_p & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.1.11}$$

这是一种 **度量化矩阵** (metrizing matrix), 即具有特征: $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{J}^*$ 与 $\boldsymbol{J}^2 = \boldsymbol{I}_{2p}$ 的矩阵. 应用它, 前述关于 Nevanlinna 函数对的条件 (3°) 可改写为

$$[P^*(z), Q^*(z)]\boldsymbol{J}\begin{pmatrix} P(z) \\ Q(z) \end{pmatrix} \geqslant 0, \quad \forall z \in \pi^+. \tag{1.1.12}$$

此外, 我们说一个 $\mathbf{C}^{2p\times 2p}$- 值函数 $U(z)$ 在 π^+ 内是 ***J*- 扩张的**, 假如

$$U^*(z)\boldsymbol{J}U(z) \geqslant \boldsymbol{J}, \quad \forall\, z \in \pi^+;$$

它是 ***J*- 压缩的**, 如果

$$U^*(z)\boldsymbol{J}U(z) \leqslant \boldsymbol{J},\ \forall\, z \in \pi^+;$$

它在 $\mathbf{R}$ 上是 ***J*- 酉的**, 如果

$$U(z)^*\boldsymbol{J}U(z) = \boldsymbol{J},\ \forall\, z \in \mathbf{R}.$$

此为试读, 需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com