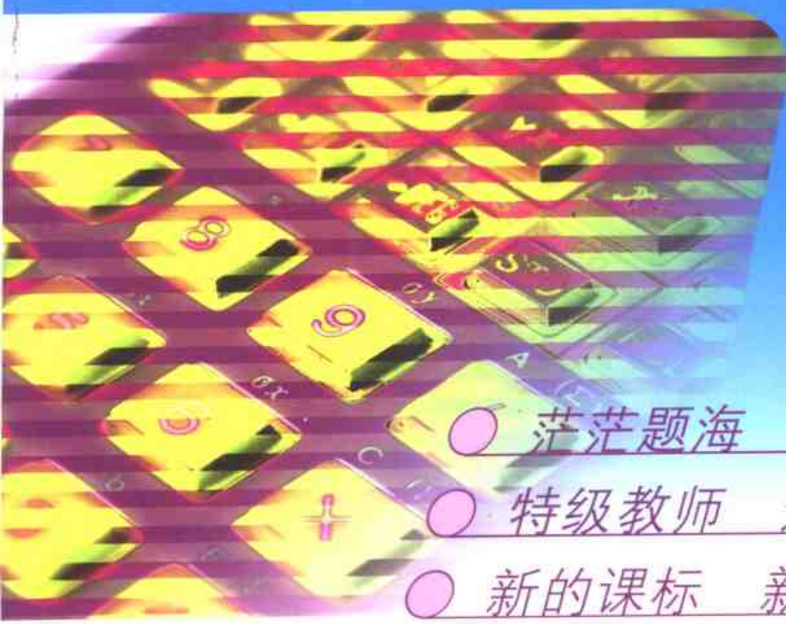
初高中思维方法丛书

总主编 孙元清 主编 康士凯

高中 数学 思维方法

SIWEI FANGFA

下册



茫茫题海 何去何从

特级教师 迷津解惑

新的课标 新的思维

有氧训练 提高素质

上海科学普及出版社

初高中思维方法丛书

思维方法

高中数学

下册

总主编　孙元清
主　编　康士凯
编　者　汪祖亨　崔永富
　　　　张立华

上海科学普及出版社

图书在版编目(CIP)数据

高中数学思维方法. 下册/康士凯主编. —上海：上海科学普及出版社，2004. 2
(初高中思维方法丛书/孙元清主编)
ISBN 7 - 5427 - 2541 - 6

Ⅰ. 高... Ⅱ. 康... Ⅲ. 数学课-高中-教学参考资料 Ⅳ. G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 004869 号

责任编辑 郭子安

初高中思维方法丛书
高中数学思维方法
下 册
总主编 孙元清 主编 康士凯
上海科学普及出版社出版发行
(上海中山北路 832 号 邮政编码 200070)
http://www.pspsp.com

各地新华书店经销
商务印书馆上海印刷股份有限公司印刷
开本 850×1168 1/32 印张 9.75 字数 286 000
2004 年 2 月第 1 版 2004 年 2 月第 1 次印刷

ISBN 7 - 5427 - 2541 - 6/O·103 定价：13.00 元

总主编

孙元清　上海市教委教研室原主任、上海市特级教师。教育部中学校长培训中心兼职教授。“全国优秀教育工作者”，“国务院特殊津贴”获得者。主要论著有《上海中小学课程教材政策的理论与实践》、《高中课程结构与教学管理的研究与试验》等。

主　编

康士凯　上海市数学特级教师，上海市数学会理事，中教委员会秘书长，中国数学奥林匹克高级教练。从教三十余年来，曾编著《中学数学教学能力》、《斐波那契数列》、《集合与映射》、《微积分题解辞典》等著作二十余种。

初高中思维方法丛书

- 初中数学思维方法
- 初中物理思维方法
- 初中化学思维方法
- 高中数学思维方法（上、下册）
- 高中物理思维方法（上、下册）
- 高中化学思维方法

初高中活用理科手册系列

- 初中活用理科手册
- 高中活用理科手册

内容提要

NEI RONG TI YAO

学习数学，最重要的是学习数学的思维方法，这是人人皆知的命题，然而又是一个世界难题. 本书尝试用中学生易懂的语言，将抽象的数学思维方法表达出来，并通过典型例题，创设数学思维方法学习的情境.

本书共分三大部分. 第一部分讲述数学思维方法. 介绍如何面对形形色色的问题，怎样摆脱一筹莫展的困境，怎样使本书所讲述的思维方法转化为适合你的思维方法. 第二部分是按现行教材的编写结构，用[知识梳理]、[典型例题]、[练习]来说明该章节所涉及的数学思维方法，其中[典型例题]是通过[思维过程]、[解答]、[思维方法评析]来帮助读者体悟相关的数学思维方法. 第三部分是在全面学习中学数学各部分内容的基础上，用专题讲座形式向读者介绍几则常见的数学方法，从方法论角度探索培养数学思维能力的渠道.

前 言

QIAN YAN

《初高中思维方法丛书》与《初高中活用理科手册》是两套姊妹书. 编写这两套书的目的都是为了解决素质教育及其课程教材改革和考试改革所涉及的一个重要问题: 怎样培养学生自主学习,这是一个能力问题,更是一个人格问题. 那么,怎样培养学生会自主学习呢? 自主学习的核心是兴趣,兴趣的核心是会学习,会学习的核心是会思维,会思维的核心是会发现问题、会活用知识去解决问题. 因此,要培养学生会自主学习,必须重视培养学生学会思维、学会活用知识. 思维要以知识为载体,知识对于任何一种思维都是必不可少的,没有知识,一个人无法思维;知识要以思维为活化剂,知识要通过思维去理解、去激化、去构建,没有思维,知识是空洞的、没有活力的、没有意义的. 所以在培养学生思维时,要求学生活用知识;在要求学生活用知识时,要培养学生学会思维.

本套书为《初高中思维方法丛书》,编写时着眼于思维品质和思维能力的提高,着重于思维方法的培养,试图改革传统的课程和教学实践所培养的传统思维方式——通过机械训练、按一种方式来理解知识和认识世界,而代之以注重培养学生会从实际出发、以多种思维方式去理解知识和认识世界,包括创造性思维、分析性思维和实践性思维. 为此,本书从三个层面来阐述: 每门学科的一般思维方法,理解知识与活用知识解题中常用的各种思维方法,复习与考试中常用的各种思维方法等三个层面;并且以一般思维方法作为基础和指导,

以阶段或单元复习中的解题方法作为具体培养思维方法、理解与活用知识点和知识块的一种手段,以在系统复习和考试中灵活应用各种思维方法去创造性思维、分析性思维和实践性思维作为目的.

本丛书每门学科的编写由三部分组成:

第一部分,先将学科的一般思维方法一一列出,并作简要介绍和示例,使学生对思维方法有一般的了解、整体的了解,以便指导以后的学习,并在以后学习和总复习的过程中逐步加深理解.

第二部分,再以知识块中所用到的思维方法、解题思维方法、考试思维方法作具体的阐述,并配有相应的例题和习题,在每一块之前对知识块的特点作简要的说明.

第三部分,这是作为系统复习与考试用的,作为思维方法的灵活应用与综合应用,并配以例题和习题.

本丛书以学科思维方法的培养为主,不受教材版本内容的限制,知识块和知识点要根据思维方法培养的需要来选择.

本丛书的例题和习题分为三个层次:基本层次——一般的练习题;中等层次——有一定难度和简单的综合题;较高层次——研究性学习的习题、较复杂的综合题、考试和竞赛中较难的题目等.一般说,前两个层次的习题主要放在第二部分中,最后层次的习题放在第三部分中.

本丛书由具有丰富教研、教学经验的特级教师和优秀教师合作编写.丛书主编孙元清,高中数学主编康士凯、初中数学主编周继光,高中物理主编张越、初中物理主编瞿东,高中化学主编吴铮、初中化学主编袁孝凤.

本丛书适合上海及全国各地初高中学生和教师选用,适合平时学习和阶段复习,以及考试时参考使用.

由于改革和编写尚在试验中,有欠妥和不足之处,敬请读者和专家提出宝贵的意见和建议,以便修改和完善.

高中数学由康士凯、江祖亨、崔永富等共同编写.

孙元清

2004 年 1 月

引言

YIN YAN

学习数学，最重要的是学习数学的思维方法，这是人人皆知的命题，然而又是一个世界难题. 为了培养学生的思维能力，各国教育专家、中学优秀教师们殚精竭虑，提供了许多方案、设计了种种策略. 然而，效果却不尽如人意，究其原因是多方面的，其中最典型的症结在于：理性思考下的方案能否真正成为适合学生实际情况的方案. 适合学生实际的方案并不是一天就能拟就的，它需要经历一个过程，是按照数学本身的思维过程结合自身的认知方法的体验过程. 笔者尝试用中学生易懂的语言，将抽象的数学思维方法表达出来，通过典型例题，创设数学思维方法学习的情境.

本书共分三大部分. 第一部分讲述数学思维方法. 我们将花相当多的篇幅介绍面对形形色色的问题，怎样摆脱一筹莫展的困境，使思路能顺利地从头脑中跳出来的方案，读者可以从例题中体悟. 请你思考，在数学学习中，你是否遇到过类似情境？试着用本书所讲述的思维方法来解决问题. 这样或许对于摆脱死记条文，改变大量重复操练的被动的学习方法是有效的. 第二部分是按现行教材的编写结构，用[知识梳理]、[典型例题]、[练习]来说明该章节所涉及的数学思维方法. 其中[典型例题]是通过对[思维过程]、[解答]、[思维方法评析]来帮助读者体悟该章节有关的数学思维方法. 我们认为，数学问题的解决，作为学生，必须理清思路，运用最有效的思维方法来解决问题. 只有你不满足于数学问题的结论，而重视思维产生的过程，重视对数

学思维方法的优劣评析，才能使自己的数学素质走向更高层次．本书这部分的编写用意亦在于此．第三部分是在全面学习中学数学各部分内容的基础上，用专题讲座形式向读者介绍几则常见的数学方法，从方法论角度探索培养数学思维能力的渠道．

在中学数学学习过程中，学生获取知识的同时，要高度关注从数学宝库中汲取思维营养，加强科学思维方法的训练．本书编写的宗旨就是将读者从机械操练的学习方法中摆脱出来，因为你最输不起的是时间．我们希望你关注的是鲜活的数学思维方法以及生动的解决问题的思考过程．

教育部在《面向21世纪教育振兴行动计划》中呼吁，“在当今及今后一个时期，缺少具有国际领先水平的创新人才，已经是制约我国竞争力的主要因素之一”．这个严峻的现实是我们付出许多沉重代价后才意识到的．要振兴中华民族，虽然我们需要进入理想的高校深造，但决不能仅仅停留在升入高校的竞争，更应该把学习目标定在塑造国际领先水平的人才的竞争，因此，从中学时代起，努力进行各学科思维能力的培养，应是相当迫切的使命了．本书也是冀以这个历史使命而作的尝试，希望有更多的作品切实为学生摆脱题海和提高素质而开展积极有益的探索．

康士凯

于上海杨浦高级中学2004年1月

目 录

MU LU

第 八 章 ◆ 直线、平面、简单几何体 …………………… 001

第一节 空间直线和平面 ………………………… 001

第二节 简单几何体 ………………………………… 027

第 九 章 ◆ 向量 ………………………………………… 049

第 十 章 ◆ 排列、组合与概率 ………………………… 078

第十一章 ◆ 坐标平面上的直线 ……………………… 106

第十二章 ◆ 圆锥曲线 ………………………………… 139

第十三章 ◆ 数学方法选讲 …………………………… 184

第一节 函数思想 …………………………………… 184

第二节 数形结合 …………………………………… 201

第三节 化归 ………………………………………… 223

第四节 分类讨论 …………………………………… 238

第五节 特殊化思维方法 …………………………… 261

附 ◆ 习题迷津解惑 …………………………………… 270

第八章 直线、平面、简单几何体

第一节 空间直线和平面

知识梳理

一、平面的性质

1. 平面的概念

“平面”是一个只描述而不定义的最基本的原始概念，数学里所研究的平面是从生活中所见到的平面（桌子面、黑板面）中抽象出来的. 对这一概念应理解以下几个方面：

（1）数学中的平面不仅有平的特点，而且有广阔、无边缘的特点. 一个平面把整个空间分成两部分，如果想从其中的一部分到达另一部分，则必须穿过这个平面.

（2）数学中的平面是点的集合，其中每个点都是它的元素，所以平面既没有长度和宽度，也没有厚度.

2. 平面的基本性质

平面的基本性质以公理与推论的形式给出，它们是我们观察、判断、分析、论证空间图形中各种线面位置关系的理论依据，见下表.

平面的基本性质	作　用
公理1　如果一条直线上的两点在一个平面内，那么这条直线上的所有的点都在这个平面内.	判定直线是否在某个平面内的依据
公理2　如果两个平面有一个公共点，那么它们还有其他公共点，且所有这些公共点的集合是一条过这个公共点的直线.	判定两个平面相交于一条直线以及确定两个平面交线位置的依据
公理3　经过不在同一条直线上的三点，有且只有一个平面. 推论1、2、3（略）	确定平面的位置以及判定两个平面重合的依据

“有且只有一个”有两层含义：“有”是说明“存在”，“只有一个”说明“惟一”，所以“有且只有一个”，也可以说成“存在并且惟一”.

从数学思维要求审视，平面性质的三个公理是立体几何学科的基础，是后续的定理、性质的出发点. 因此，在整个立体几何学习中应逐步加深对三个公理及推论的理解.

正确地使用集合符号描述点、直线和平面之间的关系，是本单元的任务. 因为立体几何中的推理与论证，正因为使用了集合符号，才显得简捷、正确. 这也是思维能力的组成部分.

平面、直线与平面关系的直观图画法是立体几何学习的技能要求. 借助图像语言可以使抽象的空间图形变得形象直观，这也是立体几何对思维能力培养的特殊要求.

典型例题

例1　已知直线 $a \parallel b$，直线 c 与 a、b 分别交于 P、Q. 求证：直线 a、b、c 在同一平面内.

【思维过程】　要证明三条直线在同一平面内，可以先由两条平行直线 a、b 确定一个平面 α，再证明直线 c 也在平面 α 内即可.

［证明］　$\because a \parallel b$，$\therefore a$、b 可以确定一个平面 α.

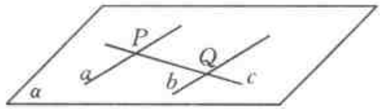


图 8-1

∵ 点 $P\in a$，∴ $P\in\alpha$. 同理 $Q\in\alpha$.

又 $P\in c$，$Q\in c$，∴ $c\subset\alpha$.

所以直线 a、b、c 在同一平面内.

【思维方法评析】 本题要证"共面"，故需联想平面的性质. 证明时，可先由部分元素，确定一个平面，再证其他元素在这个平面内，以使问题得证. 本例更一般的结论是：如果 $a_1 /\!/ a_2 /\!/ a_3 /\!/ \cdots /\!/ a_n$，直线 l 与 a_1、a_2、a_3、…、a_n 分别相交于点 P_1、P_2、…、P_n，那么直线 a_1、a_2、…、a_n 与直线 l 在同一平面内.

例 2 空间四条不共点的直线两两相交，证明这四条直线在同一个平面内.

【思维过程】 四条直线两两相交且不共点，可能有两种情况：一是有三条直线共点；二是没有三条直线共点. 证明时一定要分清这两种情况. 由任何三条直线都不共点或其中三条交于一点，可根据公理 3 及三个推论先由两条相交直线或由一条直线及直线外一点确定一个平面，再分别证明其他直线在这个平面内.

[证明] (1) 无任何三条直线共点. 由于四条直线两两相交，不妨设直线 a，b 确定一个平面 α.

由题意知直线 c 必与 a、b 分别相交，又无三线共点，故可设直线 c 与直线 a 相交于点 A，直线 c 与直线 b 相交于点 B，得点 A、$B\in$ 平面 α. 又点 A、$B\in c$，于是 $c\subset$ 平面 α，同理可得直线 $d\subset$ 平面 α，所以直线 a、b、c、d 在同一个平面 α 内.

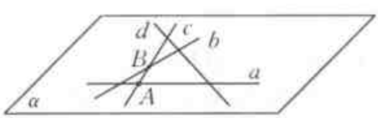


图 8-2(1)

(2) 有三条直线共点. 不妨设直线 b、c、d 相交于一点 M，直线 a 与直线 b、c、d 分别相交于点 P、Q、R，显然 $M\notin a$，所以直线 a 与点 M 可以确定一个平面 β.

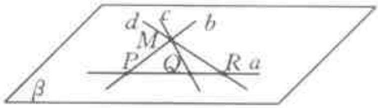


图 8－2(2)

又因为 $M\in$ 平面 β，$P=a\cap b$，所以 $P\in$ 直线 a，得点 $P\in$ 平面 β，而点 M、$P\in$ 直线 b，于是直线 $b\subset$ 平面 β，同理可证直线 c、$d\subset$ 平面 β.

所以直线 a、b、c、d 在同一个平面内.

【思维方法评析】 例 1 与例 2 均是证明 n 条直线共面. 由思维过程可以发现先是由其中两条直线确定平面，然后证明其余 $n-2$ 条直线均在该平面内. 而且论证依据是平面的三个公理.

例 3 如图 8－3，正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，A_1C 与平面 DBC_1 交于 O 点，AC、BD 交于 M 点，求证：C_1、O、M 三点共线.

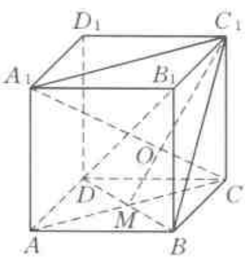


图 8－3

【思维过程】 证明若干个点共线，需证明这些点在某两个平面的交线上，也就是要证明这些点分别在两个平面内.

［证明］ 连结 A_1C_1，

$\because AC\cap BD=M$，

$\therefore M\in AC$，$C_1\in A_1C_1$，$O\in A_1C$.

$\therefore$ 三个点 M、O、C_1 均在平面 A_1ACC_1 内.

又 $M\in BD$，$C_1\in C_1B$，A_1C 与平面 DBC_1 交于 O 点.

$\therefore$ 点 M、O、C_1 在平面 C_1DB 内.

而平面 $C_1DB\cap$ 平面 $A_1ACC_1=C_1M$.

$\therefore$ 三个点 C_1、O、M 都在直线 C_1M 上，

故三点 M、O、C_1 共线.

【思维方法评析】 首先根据点 C_1、O、M 的位置，确定两个平面 A_1ACC_1 和平面 C_1DB，再证这些点同时在这两个平面内，依据公理2问题得以解决.

例 4 已知：在空间四边形 $ABCD$ 中，E、F 分别是 AB、AD 的中点，G、H 分别是 BC、CD 上的点，且 $\frac{BG}{GC}=\frac{DH}{HC}=2$.

求证：直线 EG、FH、AC 相交于一点.

【思维过程】 在证明若干条直线共点时，应该先确定其中两条直线的交点，再证明其他直线都经过这个点.

[证明] ∵ E、F 分别是 AB、AD 的中点，∴ $EF \mathrel{\underline{\underline{/\!/}}} \frac{1}{2}BD$.

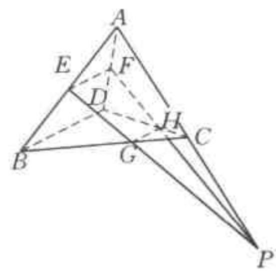


图 8－4

又 $\frac{BG}{GC}=\frac{DH}{HC}=2$,

∴ $GH \mathrel{\underline{\underline{/\!/}}} \frac{1}{3}BD$.

∴ $EF /\!/ GH$. 且 $EF \neq GH$，四边形 $EFHG$ 是梯形.

设两腰 EG、FH 相交于一点 P.

∵ $EG \subset$ 平面 ABC，$FH \subset$ 平面 ACD.

∴ $P \in$ 平面 ABC，$P \in$ 平面 ACD.

又平面 $ABC \cap$ 平面 $ACD = AC$,

∴ $P \in AC$.

∴ 直线 EG、FH、AC 相交于一点 P.

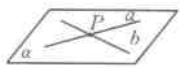
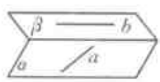
【思维方法评析】 此题是证明三条直线交于一点，先证明 EG、FH 交于一点 P，再由公理2作为两个平面相交于一条直线的理论依据作保证，证明另一条直线也经过点 P，是证明三条直线共点的常用方法.

透彻理解有关平面性质的三个公理及三个推论，是解好有关证明三点共线及若干点共面问题的保证. 反之，通过证明线共点、点共线、点共面或线共面等问题，也可以加深对平面基本性质的理解.

知识梳理

二、空间直线

1. 空间两条直线的位置关系(见下表)

两条直线的位置关系		图　示	表示方法	公共点个数
两条直线共面	相　交		$a \cap b = P$	一个
	平　行		$a /\!/ b$	无
两条直线不同在任何一个平面内			a、b是异面直线	无

2. 直线与直线平行

公理4：平行于同一条直线的两条直线互相平行.

这说明把平行线的传递性推广到空间也是成立的，这个公理是研究空间中直线、平面垂直或平行的基础.

在学习立体几何时，必须注意并不是平面几何中关于直线位置关系的定理都可以随便推广到空间来的. 如："同一平面中，垂直于同一直线的两条直线互相平行"在空间不成立. 在辨识空间图形的点、线、面的位置关系时，我们还可以借助周围环境中的实例，例如：桌面、几支笔，以及教室的四面墙壁及天花板和门窗等等，这些都给我们以直观的形象.

3. 空间中两角的相等

我们常把"如果一个角的两边和另一个角的两边分别平行，并且