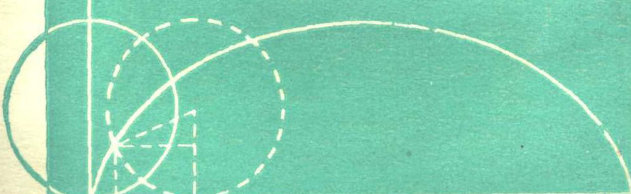
陕西省高等师范函授教材

初等数学

第一册

（代数部分）



初 等 数 学

第 一 册

（代 数 部 分）

陕西教育学院编选

陕西人民出版社

陕西省高等师范函授教材
初 等 数 学
第 一 册
（代数部分）

陕西教育学院选编
陕西人民出版社出版
陕西省新华书店发行
汉中地区印刷厂印刷

开本 787×1092 1/32 印张 7 字数 150,000
1979年7月第1版 1981年5月第2次印刷
印数46,201—56,200
书号：K7094·206 定价：0.57元

前　言

这本讲义是我们在顺义县数学教师函授班上的部分讲稿。我们编写的基本想法是：

1．为帮助教师正确理解教材，对高中数学所涉及的一些基础知识适当给予加深、加宽。

2．对中学数学的某些重点教材给予一定的重视，并提供一些材料供老师们教学时参考。

3．在弄懂、弄清基础知识的前提下注意联系实际的课题，学习解决问题的技能与技巧。并加深对基础知识的了解。

由于我们水平有限，再加上编写时间仓促，错误难免，请同志们提出宝贵意见。

原编者

说　　明

这本教材是北京师范大学数学函授教材，系曹才翰和余炯沛两位同志编写的。我们现翻印出来，作为我省高师函授数学教材，也可供我省中学数学教师教学时参考使用。全教材共分三册，函授学员在第一学年内学完。

翻印时，我们对原稿在排印中的错误作了校正，但限于水平，难免有不当之处，望读者批评指正。

陕西教育学院师训部数学组

一九七九年元月

目　录

第一章　基本知识

第二章　一次函数

第三章　二次函数

第四章　指数概念普遍化

第五章　对　　数

第一章　基本知识

§1　命题的四种形式及充分必要条件

为了在数学中用起来方便，我们先讲一下命题的四种形式及充分必要条件。

什么是命题？

命题就是根据某一条件A的存在而对另一事件B的发生所作的判断。例如“如果某同志现在在保定，那么他一定在河北省”，又如“水烧到100℃就要沸腾。”

数学上的命题就是根据某些数学条件A而对某一数学结论B所作的判断。例如，在实数范围里我们说：“如果$a<b$，那么$a+c<b+c$”这就是一个命题。又如“等腰三角形的底角相等”也是一个命题。

一个命题，从它的构成来说，并不要求一定是正确的。也就是说，判断可能是错误的。例如“平行四边形的对角线相等”是个命题，但它是个错误的命题。经过证明是正确的命题，就称为“定理”。不须证明而公认为正确的命题就称为“公理”。

任何一个命题，总可归结成“若A则B”这一形式。这里A作为前题，B作为结论。

一、命题的四种形式

1．原命题（又叫正命题）：“若A则B”．例如“若$\angle 1$和$\angle 2$是对顶角，则$\angle 1=\angle 2$”．

2．逆命题：“若B则A”．例如：“若$\angle 1=\angle 2$，则$\angle 1$和$\angle 2$是对顶角”．

逆命题的构成法是将原命题中的前提和结论互换位置．

应当注意的是，原命题正确，其逆命题未必也正确．如上面举的例，“若$\angle 1=\angle 2$，则$\angle 1$和$\angle 2$是对顶角”就不是正确的．因为相等的两个角$\angle 1$和$\angle 2$不一定是对顶角，它们可以是同位角，内错角或其他什么角．所以原命题正确并不保证逆命题正确．逆命题是否正确须另行证明．

3．否命题：“若非A则非B”．例如“若$\angle 1$和$\angle 2$不是对顶角，则$\angle 1\neq\angle 2$”．

否命题的构成法是将原命题中的前提和结论都否定，但位置不变．

应当注意的是，原命题正确，其否命题也未必正确，仍以上例来说，$\angle 1$和$\angle 2$不是对顶角，它们可以是内错角，同位角，或其他什么角，因此未必不等．

4．逆否命题：“若非B则非A”．例如“若$\angle 1\neq\angle 2$，则$\angle 1$和$\angle 2$不是对顶角．”

逆否命题的构成法，是将原命题的前提和结论都否定后再互换位置．

应该注意的是，原命题如果正确，那么逆否命题一定也正确．这是因为，若$\angle 1\neq\angle 2$，那么肯定$\angle 1$和$\angle 2$不是对顶角，不然的话，$\angle 1$就要等于$\angle 2$．

反之，如果逆否命题是正确的，那么原命题一定也是正确的。这是因为，在A成立的前提下，假如B不成立，根据“若非B则非A”，就推出A不成立。这是不可能的，所以在A成立的前提下，只能是B也成立。

这样我们看到，原命题和逆否命题，这两者有一个正确，另一个也一定正确。反过来说，有一个不正确，另一个也一定不正确。因此我们说原命题和逆否命题是等价命题。同样，逆命题和否命题也是一对等价命题。在论证问题时，如果我们对证原命题不好下手，那么就改为证逆否命题，其效果是一样的。

我们举一个例子：

例：设$\angle 1$和$\angle 2$是两条直线l_1，l_2同第三条直线交成的同位角(如图1—1)，求证“若$\angle 1=\angle 2$，则$l_1 \parallel l_2$”。

证：因为平行是用不相交来定义的，证两条直线不相交，如果不借助其他定理，就不好下手。所以我们改证逆否命题“若l_1，l_2不平行，原$\angle 1 \neq \angle 2$”。

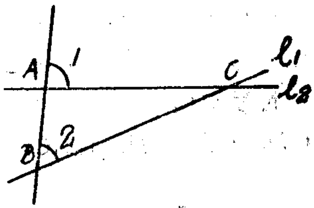


图1—1

假定l_1，l_2不平行，那么必相交于一点C，那么由A，B，C三点可作一个三角形，$\angle 1$是$\triangle ABC$的外角，$\angle 2$是内角，因为三角形的外角一定大于和它不相邻的任一内角，所以$\angle 1 > \angle 2$。这和题设的条件是矛盾的。所以原命题是正确的。

从上面四种形式中，我们还可以看到这样的关系：

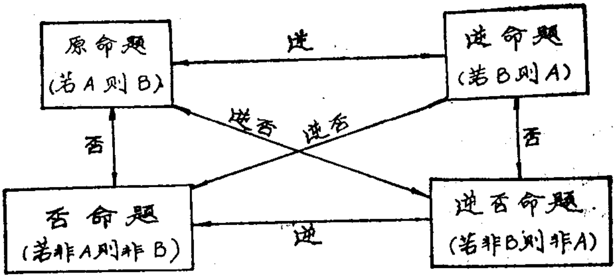
1．原命题与逆命题，否命题与逆否命题，彼此互为逆

命题。

2．原命题与否命题，逆命题与逆否命题，彼此互为否命题。

3．原命题与逆否命题，逆命题与否命题，彼此互为逆否命题。

这些关系可用下表表示



这种正逆命题，我们曾在初中几何中见过，例如关于平行四边形的性质定理和判定定理。

性质定理： "若四边形 $ABCD$ 是平行四边形，则 $AB \underline{\underline{\parallel}} CD$，$BC \underline{\underline{\parallel}} AD$，且 AC 与 BD 互相平分"。

判定定理： "若四边形 $ABCD$ 中 $AB \underline{\underline{\parallel}} CD$，则四边形 $ABCD$ 是平行四边形"。

"若四边形 $ABCD$ 中 AC 与 BD 互相平分，则四边形 $ABCD$ 是平行四边形"。

二、充分必要条件

如果"若A则B"这个命题已被证明是正确的，我们就

称A为B的充分条件，而称B为A的必要条件。

例如“若$\angle 1$和$\angle 2$是对顶角，则$\angle 1 = \angle 2$”这个命题是正确的，所以称“$\angle 1$和$\angle 2$是对顶角”为“$\angle 1 = \angle 2$”的充分条件。可以说“$\angle 1$和$\angle 2$是对顶角”充分地保证了“$\angle 1 = \angle 2$”成立。而“$\angle 1 = \angle 2$”称为“$\angle 1$和$\angle 2$是对顶角”的必要条件。因为若$\angle 1 \neq \angle 2$，则$\angle 1$和$\angle 2$不可能是对顶角，所以可以说$\angle 1$和$\angle 2$相等是$\angle 1$和$\angle 2$成为对顶角所必须具备的条件。

在上面已讨论过“若$\angle 1$和$\angle 2$是对顶角，则$\angle 1 = \angle 2$”的逆命题“若$\angle 1 = \angle 2$，则$\angle 1$和$\angle 2$是对顶角”是不正确的，就是说，“$\angle 1 = \angle 2$”不能保证“$\angle 1$和$\angle 2$是对顶角”，所以“$\angle 1 = \angle 2$”就不是“$\angle 1$和$\angle 2$是对顶角”的充分条件，同时“$\angle 1$和$\angle 2$是对顶角”也不是“$\angle 1 = \angle 2$”的必要条件。

这样，我们认识到，一个命题“若A则B”中的两个条件A和B，一般都有个强弱问题：A是B的充分条件并不意味着A也是B的必要条件；同样，B是A的必要条件并不说明B也是A的充分条件。

我们再举两个例子看看：

例如：两个几何图形全等是这两个图形有相等面积的充分条件，但不是必要条件。因为两个不全等的几何图形也可以有相等的面积。

又如：两个三角形全等的必要条件是其中有一双对应边相等，但不是充分条件，因为只有一双对应边相等未必这两个三角形全等。

下面引入一个记号“$\Rightarrow$”如果“若A则B”这个命题已

被证明是正确的，那么可以写成

$$A \Rightarrow B$$

如果命题"若A则B"正确，即$A \Rightarrow B$，同时其逆命题"若B则A"也正确，即$B \Rightarrow A$，那么：

由$A \Rightarrow B$知A是B的充分条件。

由$B \Rightarrow A$知A是B的必要条件。

这样，在正逆命题同时都正确的情况下，即$A \Longleftrightarrow B$，那么A即是B的充分条件，也是B的必要条件，简言之，A是B的充要条件（当然这时B也是A的充要条件）。因此，A是B的充要条件这句话，包含着两个命题，一个是"若A则B"，一个是"若B则A"，并且都是正确的。

例如：二次方程$ax^2+bx+c=0$（$a \neq 0$）有实根的充分必要条件是$b^2-4ac \geq 0$，这句话包含两个正确命题：

"若$ax^2+bx+c=0$有实根，则$b^2-4ac \geq 0$"，

"若$b^2-4ac \geq 0$，则方程$ax^2+bx+c=0$有实根"。

简写为 $ax^2+bx+c=0$有实根$\Longleftrightarrow b^2-4ac \geq 0$。

还可以举出一些关于充分必要条件的例子。

例如：三角形的两腰相等是两个底角相等的充分必要条件。

又如：四边形的两条对角线互相平分是这个四边形成为平行四边形的充分必要条件。

最后，我们可以这样说：在$A \Longleftrightarrow B$的情况下，条件A和条件B是强弱相当的。另外，根据逆否命题的等价性，也就有非$A \Longleftrightarrow$非B，所以有时为了说起来方便，就把"A是B的充要条件"换一说法为"当且仅当A成立时，B也成立"，两种说法含义是一样的。

§ 2 集合与一一对应

一、集　合

由于许多数学概念可以非常容易地通过集合来描述，因此我们先介绍集合的概念。

集合是个不加定义的数学名词，这好比在几何学里的点、线、面不加定义那样。通俗地讲，集合就是我们所考虑的某些对象的全体。例如，“某教室里全体学生的集合”，“所有正数的集合”，“所有有理数的集合”，“所有实数的集合”，“方程$x^2-2x-3=0$的根的集合”等等。

在几何中，我们可以用集合来描述各种曲线，例如，我们可以说，“圆是与一个定点等距离的所有点的集合”，“抛物线是到一个定点的距离和到一条定直线的距离相等的点的集合”。

集合的表示法，主要有下列三种：

1．用一句话表达出一个集合

例如：A是大于1且小于4的整数集合。（有限集）

B是大于4且小于1的整数集合。（空集）

C是所有正整数的集合。（无穷集）

2．直接写出集合中的全体元素，放在{　}号内

例如：$A=\{2, 3\}$，

$B=\{\ \}$，（空集）

$C=\{1, 2, 3\cdots\cdots\}$。

一个元素也没有的集合叫做空集，用字母$\varnothing$表示。例如，方程$x^2+1=0$的实根的集合，就是空集。

3．通过一个规则来描述集合

例如：$\{x|x$是0和4之间的整数$\}$，意思是，集合由字母x所代表的元素构成的，竖线右边写着入集规则，1，2，3符合入集规则，在这集合里，-2，-1，0，4，5等等，不符合入集规则，不在这集合里。这集合的全体元素是整数1，2和3。

又如$\{x|x^2-2x-3=0(x$是实数$)\}$，它描述的集合是由方程$x^2-2x-3=0$的实根构成，也就是-1，3两个实数。

集合有这样的特征：任何一个确定的集合，它本身就具备了判定一个元素是否属于这个集合的标准。

例如：集合$A=\{2,3\}$，显然，2和3属于这个集合，而1，4，5等不属于这个集合。

又如$\{x|x$是整数$\}$，0，±1，$\pm2\cdots$是整数，属于这个集合，1.5，2.6等不是整数，不属于这个集合。

集合常用大写字母A、B、C等表示，集合里的元素常用小写字母a、b、c、x、y等表示，如果元素a属于集合A，则记作$a\in A$，如果a不属于A，则记作$a\overline{\in}A$。

我们以前学过的数，可以用集合来说：

自然数集：自然数集N是所有正整数的集合。

$N=\{1,2,3\cdots\cdots\}$。

整数集：整数集J是所有正整数，负整数和零的集合。

$J=\{\cdots\cdots-3,-2,-1,0,1,2,3,\cdots\cdots\}$。

有理数集：有理数集Q是能表为形如$\frac{p}{q}$，p和q都是整数，且$q\neq0$的数的集合。