

100 万套 销量饱含读者厚爱

丛书主编
希 雷
扬 洁
琼



三点一测丛书

树品牌典范 拓成才之路

第二次修订版

重点难点提示

知识点精析

综合能力测试



高二数学(下)

● 岑志林 主编



科学出版社 龍門書局

三点一测丛书

(第二次修订版)

高二数学(下)

◎ 岑志林 主编

科学出版社
龙门书局
北京

版权所有 翻印必究

**本书封面贴有科学出版社、龙门书局激光防伪标志，
凡无此标志者均为非法出版物。**

举报电话：(010)64034160, 13501151303(打假办)

邮购电话：(010)64000246

图书在版编目(CIP)数据

三点一测丛书·高二数学·下/希扬主编;岑志林分册主编. —修
订版. —北京:科学出版社 龙门书局, 2003

ISBN 7-80160-418-0

I. 三… II. ①希…②岑… III. 数学课—高中—教学参考资料 IV. G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 081054 号

责任编辑:王 敏/封面设计:东方上林工作室

科学出版社 出版
龙 门 书 局

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

北京二二〇七工厂印刷

科学出版社总发行 各地书店经销

*

1996 年 11 月第 一 版 开本:A5(890×1240)

2003 年 11 月第二次修订版 印张:8

2003 年 11 月第三次印刷 字数:230 000

印数:120 001—180 000

定 价: 9.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

教育为振兴
中华之本

雷洁琼



一九九九年三月

编者的话

本书根据教育部有关教育的最新精神和全日制普通高级中学数学(试验修订本)新教材的使用,在原《三点一测丛书·高二数学》的基础上,根据试验修订本新教材的内容作了较大的调整,增补了试验修订本教材中的新内容,删掉了高难题目与陈旧的内容,并按章节进行编写,以利于与教学同步。

本书旨在加强基础知识、基本技能、提高运算能力、逻辑思维能力、空间想像能力,以及运用所学数学知识和方法,提高分析问题和解决问题的能力,重视对学生的创新能力和实际应用能力的培养。编写的指导思想是,在狠抓“三基”,发展智力,培养能力的前提下,紧紧抓住教材中的“知识点”,对其进行精辟的阐述,再通过精选的例题,认真剖析,重在应用,着力于突出重点,突破难点。

本书每章都是由“重点难点提示”、“知识点精析”、“知识点应用”和“综合能力测试题”四部分组成的。所选的训练题,紧紧抓住知识点,特别是重点、难点,结合近几年的高考题型分选择题、填空题、解答题三种,每单元都选有一套典型的测试题(对选学内容,书中特别加注※号)供检查测验用,以利于巩固、加深和活用,以期逐步实现提高学生分析问题与解决问题能力的目标。参考答案放在各章之后,以供读者借鉴。

参加编写工作的有陈雪筠、陈莹、詹运达、曾放、李兴荣和岑志林。全书由岑志林主编。

本书是我们教学工作经验的结晶,特别是对试验教材的教学体会融入其中。尽管我们进行了认真的编写,但难免有不足和错误之处,望广大读者批评、指正。并对多次给我们提出修改建议的读者表示感谢。

编者

2003年9月

目 录

第九章 直线、平面、简单几何体	(1)
第一单元 空间直线和平面	(1)
9.1 平面	(1)
9.2 空间直线.....	(10)
9.3 直线和平面平行的判定和性质.....	(24)
9.4 直线和平面垂直的判定和性质.....	(30)
9.5 斜线在平面上的射影、直线和平面所成的角	(39)
9.6 三垂线定理.....	(48)
9.7 两个平面平行的判定和性质.....	(54)
9.8 二面角.....	(62)
9.9 两个平面垂直的判定和性质.....	(73)
单元验收	(83)
参考答案	(86)
第二单元 简单几何体	(99)
9.10 棱柱	(99)
9.11 棱锥.....	(114)
9.12 研究性课题:多面体欧拉公式的发现	(128)
9.13 球.....	(134)
单元验收.....	(141)
本章综合测试题.....	(143)
参考答案.....	(146)
第十章 排列、组合和概率	(155)
第一单元 排列与组合	(155)
10.1 分类计数原理与分步计数原理.....	(155)

10.2 排列	(158)
10.3 组合	(162)
10.4 排列、组合综合应用题	(166)
10.5 二项式定理	(172)
单元验收	(182)
参考答案	(184)
第二单元 概率	(190)
10.6 随机事件的概率	(190)
10.7 互斥事件有一个发生的概率	(196)
10.8 相互独立事件同时发生的概率	(202)
单元验收	(212)
本章综合测试题	(214)
参考答案	(218)
下学期期中测试题	(227)
下学期期末测试题(一)	(234)
下学期期末测试题(二)	(241)

第九章 直线、平面、简单几何体



第一单元 空间直线和平面

直线和平面是立体几何基础和关键性的一章,只有熟练掌握本章的基础知识和基本方法之后,才能进一步学好下一章的内容.

本节共有以下几个知识点:

平面、平面的基本性质、两条直线的位置关系.平行于同一条直线的两条直线互相平行.对应边分别平行的角.异面直线所成的角.两条异面直线互相垂直的概念.异面直线的公垂线及距离.

直线和平面的位置关系.直线和平面平行的判定与性质.直线和平面垂直的判定和性质.点到平面的距离.斜线在平面上的射影.直线和平面所成的角.三垂线定理及其逆定理.

两个平面的位置关系.两个平面平行的判定和性质.平行平面间的距离.二面角及其平面角.两个平面垂直的判定和性质.

9.1 平 面

重点难点提示

重点 1. 平面的基本性质.

公理 1 如果 $A \in \alpha, B \in \alpha$, 那么 $AB \subset \alpha$.

公理 2 如果 $A \in \alpha, A \in \beta$, 那么 $\alpha \cap \beta = a$, 且 $A \in a$.

公理 3 不共线的三点确定一个平面.

推论 1 一条直线和直线外一点确定一个平面.

推论 2 两条相交直线确定一个平面.

推论 3 两条平行直线确定一个平面.

2. 理解用反证法证明命题的思路, 会用反证法证明一些简单问题.

难点 平面的基本性质的应用和用反证法证题.

知识点精析

1. 平面的概念

平面是从桌面、平静的水面等我们熟悉的事物中抽象出来的描述性的概念, 平面是无限延展的, 对它的理解应从平面的基本性质来加深.

2. 对公理的理解与应用

(1) 公理的应用. 公理 1 是用于判断直线是否在平面内或证明若干条直线共面的根据. 公理 2 是用来判定两个平面是否相交或证明若干个点共线的. 公理 3 及其三个推论均用于确定平面. 确定平面是将空间图形问题转化为平面图形问题来解决的必要条件. 而这种转化又是立体几何中解决相当一部分问题的一种主要的思想方法, 且贯穿于立体几何的整个学习过程中. 必须熟记并能正确运用.

(2) “有且只有一个”的寓意. “有”是说明图形存在, 但不一定惟一. “只有一个”说明图形是惟一的, 它是在图形一定存在的前提下, 证明出惟一. 但它并不保证符合条件的图形一定存在. “有且只有一个”既保证了图形的存在性, 又保证了图形的惟一性. 因此证明有关“有且只有一个”这类命题, 必须从“存在性”和“惟一性”两个方面去论证. “确定一个平面”与“有且只有一个平面”意义相同.

3. 符号语言的运用

数学中字母和符号的运用, 可使命题的叙述和论证十分简捷. 要真正达到这个目的, 熟练地掌握它至关重要. 同时这也是数学能力的组成成分.

需熟练掌握的内容包括如下几个方面:

(1) 各种字母和符号的适用范围. 大写的英文字母 A 、 B 、

$C, \dots$ 通常表示点或直线.表示直线时用两个字母,并写成“直线 AB ”.小写的英文字母 $a, b, c, \dots$ 通常表示直线.小写的希腊字母 $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ 通常表示平面.“ $\in$ ”只能用于点和线或点和面间.“ $\subset$ ”或“ $\cap$ ”只能用于线和线、线和面、面和面之间等.

(2) 字母和符号的正确读、写.如 a 与 α 常混淆; β 常误写成 B ; AC 既可用于表示直线,也可用于表示平面,前边不写上相应的文字,它所表示的对象就不明确,论证过程自然也是混乱的……类似情形必须在开始学习时注意准确掌握.

(3) 符号语言与文字语言的相互转换.如: $P \in \alpha, P \notin$ 平面 AC , 表示点 P 在平面 α 内,但不在平面 AC 内.

又如:平面 α 与平面 β 相交于直线 l , 直线 a 在平面 α 内,且与直线 l 相交于点 A .用符号表示为 $\alpha \cap \beta = l, a \subset \alpha$ 且 $a \cap l = A$.

(4) 水平放置的平面图形的画法,特别是虚线、实线的运用.

4. 反证法证题的思路是:假设原命题结论不成立,由此推出与已知条件或假设、定义、公理、定理等相悖的结果,这表明假设不成立,进而得出原命题正确.

知识应用

【例 1】根据图 9-1-1 写出图形中元素应满足的条件.

答 $\alpha \cap \beta =$ 直线 CD ,
 $a \cap \alpha = A, A \notin$ 直线 CD ,
 $a \cap \beta = B, B \notin$ 直线 CD ,
 $b \subset \alpha$ 且 $b \cap$ 直线 $CD = M$.

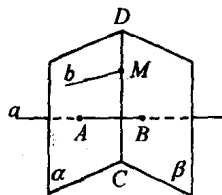


图 9-1-1

【例 2】如图 9-1-2 上面两个图是一个槽形几何体(无土盖)正放与倒放的直观图,下面两个图

是从上面分别看它们的视图,请指出(1)、(2)和(3)、(4)的对应关系.

解 (1)对应(4);(2)对应(3).因为图(1)中一条线 MN 穿过中间部被上面的小盖遮住看不见,(4)也如此,而(2)中 MN 从上向下能看见中间部分故与(3)对应.

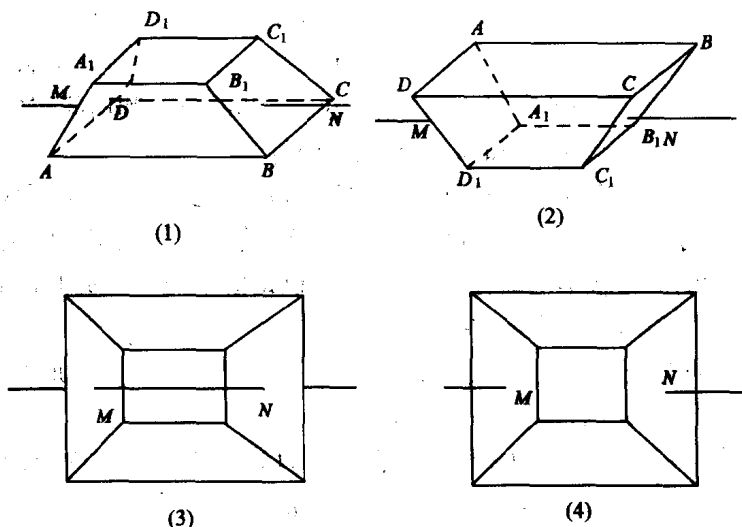


图 9-1-2

【例 3】 根据下列条件画出图形：已知 $P \in \alpha$ ，直线 AP 和 BP 不在 α 内，画出 AP 、 BP 所确定的平面 β 及直线 AB 和 α 的交点 C 。

分析 由题设直线 $AP \cap BP = P$ ， $P \in \alpha$ ， $A \notin \alpha$ ， $B \notin \alpha$ ， $P \in \beta$ ，直线 $AB \subset \beta$ ， $C \in$ 直线 AB ，得 $C \in \beta$ 。由公理 1, 2 知 $\alpha \cap \beta =$ 直线 PC ，则作出图，如图 9-1-3(1)，9-1-3(2) 所示。

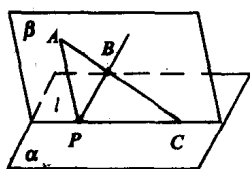


图 9-1-3(1)

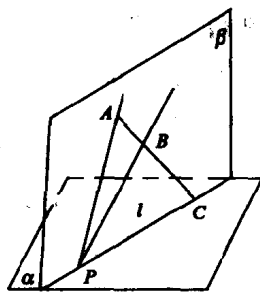


图 9-1-3(2)

说明 (1) 立体几何中作图的形式虽然不是惟一的，但同一个问题中相关点、线、面的关系是确定的。如本题中的两种图式均有 $\alpha \cap \beta = l$ ， l 必过直线 AB 与 α 的交点 C 。

(2) 平面的性质是立体几何中的理论基础，应学会利用性质来作

较简单的空间图形,逐步建立和培养立体结构及空间想像能力.因此,对书中的识图题和画图题要十分重视.

【例4】 已知空间四点 A, B, C, D 不在同一个平面内,求证:直线 AB 和 CD 既不相交也不平行.

证明 用反证法.假设直线 AB 和 CD 相交或平行.由公理3的推论2,3知,这两条直线确定一个平面.

设这个平面为 α .则有 $AB \subset \alpha, CD \subset \alpha$.

于是, $A \in \alpha, B \in \alpha, C \in \alpha, D \in \alpha$, 即点 A, B, C, D 同在平面 α 内.与已知条件矛盾.

因此假设不成立.于是 AB 和 CD 既不相交也不平行.

说明 用反证法证题,必须注意驳倒与原结论相反的所有情况.如要证 $\angle A > \angle B$, 就应把 $\angle A = \angle B, \angle A < \angle B$ 两种情况都驳倒.因此,若结论的反面情况为两种或两种以上时,用反证法就显得麻烦一些.

【例5】 求证经过两条相交直线的平面有且只有一个.

已知 a, b 是两条相交直线,求证经过 a, b 的平面 α 有且只有一个.

证明 如图9-1-4.存在性:设直线 $a \cap b = P$.在直线 a, b 上各取异于点 P 的一点 Q 和 R , 那么 P, Q, R 三点不共线,于是经过 P, Q, R 三点可以确定一个平面 α .

$\because P \in a \cap b, \therefore P \in a, P \in b$, 又 $\because Q \in a, R \in b, \therefore a \subset \alpha, b \subset \alpha$.

$\therefore$ 平面 α 经过相交直线 a 和 b .

惟一性:点 Q, R 的取法同存在性取法,根据公理3,过 P, Q, R 三点的平面只有一个,此时 a, b 在此平面内,所以惟一性得证.

【例6】 已知四边形 $ABCD$ 中, $AB \parallel DC$, AB, BC, CD, DA 所在直线分别与平面 α 交于点 E, G, F, H .

求证: E, H, F, G 四点共线.

证明 如图9-1-5. $\because AB \parallel CD$,

设 AB, CD 确定平面 β . $\therefore$ 点 E, F, G, H 分别在直线 AB, CD ,

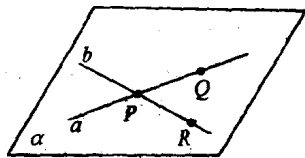


图9-1-4

BC、AD 上,

$\therefore E, F, G, H$ 都在 β 内.

又因点 E, F, G, H 都在平面 α 内,

$\therefore$ 点 E, F, G, H 在 α 和 β 的交线上.

由公理 2, 两个平面有且只有一条交线, 知点 E, F, G, H 四点共线.

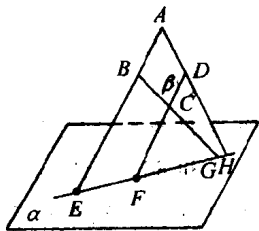


图 9-1-5

说明 要证明若干点在同一条直线上, 只需证这些点同在两个相交平面的交线上. 这是常用方法之一.

【例 7】 已知 $a \parallel b \parallel c, l \cap a = M, l \cap b = N, l \cap c = P$.

求证: a, b, c, l 四条直线在同一平面内.

证.

证明 如图 9-1-6.

$\because a \parallel b, \therefore a, b$ 确定平面 α .

$\because M \in a, a \subset \alpha, \therefore M \in \alpha$.

同理 $N \in \alpha$.

又由 $M \in l, N \in l$, 由公理 1 知 $l \subset \alpha$.

同理, $\because b \parallel c, \therefore b, c$ 确定平面 β .

而 $P \in c, N \in b, \therefore P \in \beta, N \in \beta$.

又 $P \in l, N \in l, \therefore l \subset \beta$.

$\because l \cap b = N, \therefore l$ 与 b 确定一个平面.

$\therefore l$ 与 b 既在 α 内, 又在 β 内.

$\therefore \alpha$ 与 β 必重合, 故 a, b, c, l 共面.

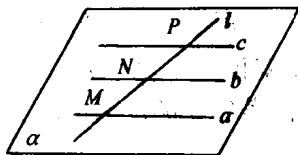


图 9-1-6

说明 证明若干条直线在同一个平面内的常用方法有: 先证它们分别在几个不同的平面内, 再证这几个平面必重合. 或者, 先由题设条件确定一个平面, 再证其他元素也在这个平面内.

【例 8】 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 8cm, M, N, P 分别是 AD, A_1B_1, B_1B 的中点.

(1) 画出过 M, N, P 三点的平面与平面 AC 的交线以及与平面 BC_1 的交线;

(2) 设过 M, N, P 三点的平面与 BC 交于点 R , 求 PR 的长.

分析 如图 9-1-7. 设过点 M, N, P 的平面为 α , 由题设 $M \in$ 面

AC, 点 $M \in \alpha$, 若再找出两个面的另一个公共点, 交线即得到.

解 (1) 设过 M, N, P 三点的平面为 α . 在面 AB_1 中, 直线 AB 与 NP 不平行, 延长 NP, AB , NP 与 AB 必相交于点 Q , $\therefore Q \in$ 直线 $NP, Q \in$ 直线 AB .

$\therefore NP \subset \alpha, AB \subset$ 面 AC ,

$\therefore Q \in$ 面 $AC \cap \alpha$.

$\therefore M \in$ 面 $AC, M \in \alpha, \therefore M \in$ 面 $AC \cap \alpha$.

连结 MQ , 直线 MQ 为过 M, N, P 三点的平面与平面 AC 的交线.

设直线 $MQ \cap$ 直线 $BC = R$. 连结 PR .

$\therefore P, R \in \alpha, P, R \in$ 面 BC_1 .

$\therefore$ 直线 PR 是面 α 与面 BC_1 的交线.

(2) 在 $Rt\triangle PRB$ 中, $PR^2 = PB^2 + BR^2$,

由题设正方体棱长为 8cm , $\therefore BQ = NB_1 = 4\text{cm}$.

又 $\triangle QBR \sim \triangle QAM$, 得 $\frac{BR}{AM} = \frac{BQ}{AQ}$,

$$BR = \frac{4}{12} \times 4 = \frac{4}{3} \text{cm},$$

又 $\therefore PB = 4\text{cm}$,

$$\therefore PR = \sqrt{16 + \frac{16}{9}} = \frac{4}{3} \sqrt{10} \text{cm},$$

故 PR 的长为 $\frac{4}{3} \sqrt{10} \text{cm}$.

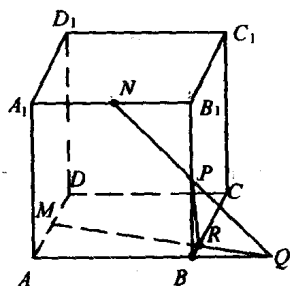


图 9-1-7

综合能力测试题

一、选择题

1. 下面四个命题:

(1) 如果两个平面有三个公共点, 那么这两个平面重合;

(2) 两条直线可以确定一个平面;

(3) 若 $M \in \alpha, M \in \beta, \alpha \cap \beta = l$, 则 $M \in l$;

(4) 空间中, 相交于同一点的三条直线在同一个平面内.

其中真命题的个数为 ()

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

2. 点 P 在直线 a 上, 直线 a 在平面 α 内可记为 ()

A. $P \subset a, a \in \alpha$ B. $P \in a, a \subset \alpha$

C. $P \subset a, a \subset \alpha$ D. $P \in a, a \in \alpha$

3. 下列推理错误的是 ()

A. $A \in \alpha, A \in \beta, B \in \alpha$, 且 $A \neq B, B \in \beta \Rightarrow \alpha \subset \beta$

B. $M \in \alpha, M \in \beta, N \in \alpha$, 且 $M \neq N, N \in \beta \Rightarrow \alpha \cap \beta = \text{直线 } MN$

C. l 不在平面 γ 内, $A \in l \Rightarrow A \notin \gamma$

D. $A, B, C \in \alpha, A, B, C \in \beta$, 且 A, B, C 不共线 $\Rightarrow \alpha$ 与 β 重合

4. 空间三条直线交于同一点, 它们或它们中的两条确定的平面的个数记为 n , 则 n 的可取值为 ()

A. 1 B. 1, 3 C. 1, 2, 3 D. 1, 2, 3, 4

5. 已知命题“直线 l 上两点 A, B 在平面 α 内”, 那么与此命题不等价的命题是 ()

A. $l \subset \alpha$

B. 平面 α 通过直线 l

C. 直线 l 上只有这两个点在 α 内

D. 直线 l 上所有点都在 α 内

6. 空间四点 A, B, C, D 共面但不共线, 则下面结论成立的是 ()

A. 四点中必有三点共线

B. 四点中必有三点不共线

C. 直线 AB 与 CD 必相交

D. AB, BC, CD, DA 四条直线中总有两两平行

7. 空间中有四个点, 如果其中任意三个点都不在同一条直线上, 那么经过其中三个点的平面 ()

A. 可能有一个, 也可能有两个

B. 可能有一个, 也可能有两个

C. 可能有四个,也可能有三个

D. 可能有四个,也可能有一个

8. 在空间四边形 $ABCD$ 各边 AB 、 BC 、 CD 、 DA 上分别取 E 、 F 、 G 、 H 四点,如果 EF 、 GH 交于一点 Q ,则 ()

A. 点 Q 一定在直线 BD 上

B. 点 Q 一定在直线 AC 上

C. 点 Q 在直线 AC 或 BD 上

D. 点 Q 既不在直线 BD 上,也不在直线 AC 上

二、填空题

1. 三条直线两两平行,但不共面,它们或它们中的两条可确定 _____ 平面.

2. 一个平面把空间分成 _____ 部分;两个平面把空间分成 _____ 或 _____ 部分;三个平面可把空间分成 _____ 或 _____ 或 _____ 部分.

3. 已知 $\alpha \cap \beta = l$, $m \subset \alpha$, $n \subset \beta$, $m \cap n = P$, 则点 P 与直线 l 的位置关系用相应的符号表示为 _____.

4. 直线 AB , $AD \subset \alpha$, 直线 CB , $CD \subset \beta$, 点 $E \in AB$, 点 $F \in BC$, 点 $G \in CD$, 点 $H \in DA$, 若直线 $EH \cap$ 直线 $FG = M$, 则点 M 必在直线 _____ 上.

三、解答题

1. 根据下列条件,画出图形:

① 平面 $\alpha \cap$ 平面 $\beta = l$, 直线 $AB \subset \alpha$, $AB \parallel l$, $E \in AB$, 直线 $EF \cap \beta = F$, $F \notin l$.

② 平面 $\alpha \cap$ 平面 $\beta = a$, $\triangle ABC$ 的三个顶点满足条件 $A \in a$, $B \in \alpha$, $B \notin a$, $C \in \beta$, $C \notin a$.

2. 求证两两相交且不共点的四条直线在同一平面内.

3. 已知 $\alpha \cap \beta = a$, 直线 $m \subset \alpha$, $n \subset \beta$, 且 $a \cap m = M$, $a \cap n = N$, M 、 N 不重合. 问 m 与 n 能否平行? 证明你的结论.

4. 已知长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, O_1 是上底面 $A_1B_1C_1D_1$ 对角线的交点, 对角线 A_1C 交截面 B_1D_1A 于 P . 求证: O_1 、 P 、 A 三点共线.

9.2 空间直线

重点难点提示

重点

1. 两条直线的位置关系.

(1) 相交直线:共面,有且只有一个公共点.

(2) 平行直线:共面,没有公共点.

(3) 异面直线:不同在任何一个平面内,没有公共点.

2. 异面直线的定义及判定方法.

(1) 定义:不同在任何一个平面内的两条直线.

(2) 教材例题3:若 $a \subset \alpha, A \notin \alpha, B \in \alpha, B \notin a$, 则直线 AB 和 a 是异面直线.

3. 公理4、等角定理及其推论.

(1) 公理4 若 $a \parallel b, b \parallel c$, 则 $a \parallel c$.

(2) 等角定理 若 $\angle ABC$ 与 $\angle A'B'C'$ 的边 $AB \parallel A'B', BC \parallel B'C'$, 且方向相同, 则 $\angle ABC = \angle A'B'C'$.

(3) 推论 如果两条相交直线和另两条相交直线分别平行, 那么这两组直线所成的锐角(或直角)相等.

4. 异面直线所成角的概念及其取值范围.

直线 a, b 是异面直线, 经过空间任意一点 O , 分别引直线 $a' \parallel a, b' \parallel b$, 把直线 a' 和 b' 所成的锐角(或直角)称为异面直线 a 和 b 所成的角. 其取值范围是 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$.

5. 异面直线的公垂线及距离的概念.

和两条异面直线都垂直相交的直线叫两条异面直线的公垂线. 两条异面直线的公垂线在这两条异面直线间的线段的长度叫两条异面直线的距离.

难点

1. 异面直线的判定.