微积分入门

何伍鸣　黄元正　朱志加

代数学知识丛书 JINDAISHUXUEZHISHICONGSHU

四 川 教 育 出 版 社

近代数学知识丛书

微积分入门

何伍鸣　黄元正　朱志加

四 川 教 育 出 版 社

一九八八年·成都

责任编辑　韩承训

特约编辑　毛正中

封面装帧　邱云松

近代数学知识丛书　**微积分入门**

四川教育出版社出版　（成都盐道街三号）

四川省新华书店发行　自贡新华印刷厂印刷

开本787×960毫米　1/36　印张 6　字数 106 千

1988年4月第一版　1988年4月第一次印刷

印数：1—2,120册

ISBN7—5408—0119—0/G120　定价：1.12元

写在前面

从小学跨入中学，特别是步入高中以后，你将碰到许多完全陌生的东西，你将会发现数学天地是那样广阔，那样令人神往而又眼花缭乱，你可能会感到新奇，也可能会因无从下手而产生惶惑……其实，万事入门难，入门前或许不知所云，入了门便“不过如此”了。

这套知识小丛书将帮助你度过“入门难”这一关。它用生动而浅显（有时还很有趣）的语言，准确而明晰的阐述，将近代数学中一些基本的概念、理论和运算一步一步展开，象一级级台阶，将你引入门去，使你并不感到突然和十分吃力。许多地方还从生活现象入手，你读起来象是在聊家常，毫无枯燥之感。所选的例题和练习也将帮助你加深理解。当然，所谓入门，不过是给你一把小小的钥匙而已，一旦“入”得“门”去，那广阔的天地便由你自由驰骋，因而也就不再是这套书的任务了。

这套丛书所收书目见封底所列，大多为中学教学所涉及；少数关系不甚密，可辅你开拓视野，有兴趣者也不妨一读。对于中学教师来说，这套丛书

也不失为良友，对提高教学质量或能助以一臂之力。

这本《微积分入门》由何伍鸣、黄元正、朱志加等同志撰写。由于编者水平所限，书中缺点错误在所难免，恳请读者批评指正。

编者　一九八六年十二月

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

目　录

一　极限论

1·1引言

数学上的伟大成就莫过于十七世纪继解析几何创立之后，诞生的全新的数学分支——“微积分”和它使用的新型分析方法——“极限法”．初期的微积分尽管完全是基于直观的几何观念，朴素的辩证思想，而缺乏严密的逻辑基础，却仍就显示出非凡的威力，在科学技术的各个极其相异的领域里都得到广范的应用，有力地促进了科学技术的蓬勃发展、人类的文明和进步．微积分的伟大成功终于使人们认识到一种科学只有成功地运用数学时，才算达到了真正完善的地步．今天，无论是科技战线的科技人员和工人，还是从事社会科学工作的干部．如果缺乏微积分的知识及其思想方法的训练，都将在工作中遇到困难，甚至寸步难行．所以，微积分学已成为每一个中学生必学的知识．

微积分经过漫长的酝酿时期，迄至17世纪才由于工业革命的刺激脱颖而出，并取得令人惊赞不已的硕果。但是，微积分的基本思想和方法在远古

的年代业已萌芽．从渺小之极的粒子到广阔无垠的宇宙，客观世界的一切事物都在永恒运动，不断变化．面临着变化多端，气象万千的自然界和人类社会，古代学者思考“无限”，研究“运动”，产生了至今尚令人赞赏的朴素的极限思想．我国古代战国时期的著作《庄子·天下篇》就有“一尺之棰，日取其半，万世不竭”的记载，也就是说，长为一尺的木棒，每天截去一半，这样的过程可以无穷无尽地进行下去．用数字表示出来是一个无穷数列

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \cdots,\ \frac{1}{2^n},\ \cdots.$$

三国魏景元年的数学家刘徽的“割圆求周”，即把圆周分成6等分，再分为12等分，分为24等分，…，这可无限地分下去。可作出正6边形，正12边形，正24边形，…，如果用 a_6，a_{12}，a_{24}，…等表示它们的周长，也可得一无穷数列

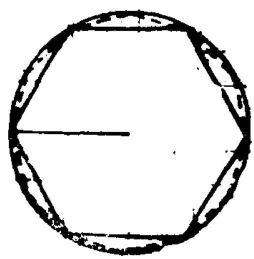

图 1—1

$$a_6,\ a_{12},\ a_{24},\ \cdots,\ a_{3\cdot 2^n},\ \cdots。$$

随着n的无限增大，正多边形的周长$a_{3\cdot 2^n}$将无限与圆周长接近，即所谓“割之弥细，所失弥小，割之又割，以至于不可割，则与圆周合体而无所失矣”．

古希腊著名学者阿基米德在他的《方法篇》中提出了计算抛物线弓形面积的穷竭法．我们用现在的数学语言把它叙述如下．

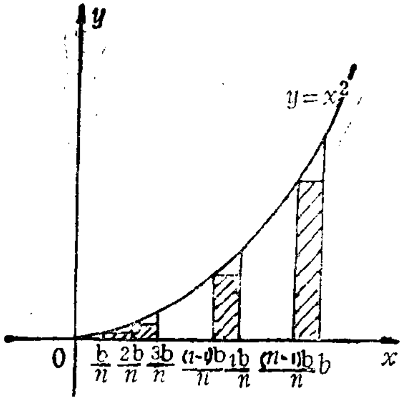

图1—2

如图1—2，求抛物线$y=x^2$与$x=0$，$x=b$，$y=0$所围成的曲边梯形的面积.

设曲边梯形的面积为S，把区间$[0,b]$分为n等分，分点是0，$\frac{b}{n}$，$\frac{2b}{n}$，…，$\frac{ib}{n}$，…，$\frac{n-1}{n}b$，$\frac{nb}{n}=b$.每一个小区间$[x_{i-1},x_i]$($i=1$，2，…，n)的长都等于$\frac{b}{n}$.过这些分点作垂直于x轴的垂线，将已知曲边梯形分割为n个小曲边梯形.再以这些小曲边梯形的左边长为边作矩形(图1—2)，这些矩形的面积是

$$\left(\frac{i-1}{n}b\right)^2\cdot\frac{b}{n}\ (i=1,2,\cdots,n).$$

所有这些矩形的面积和

$$S_n=\frac{b^3}{n^3}\left[1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2\right]$$

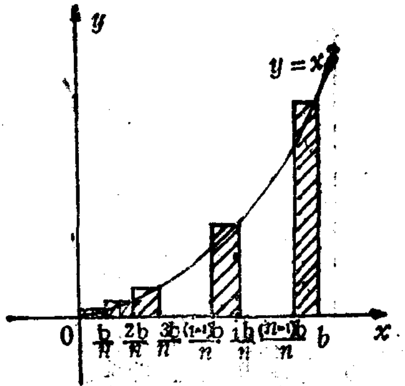

图1—3

$$=\frac{b^3}{n^3}\cdot\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$$

$$=\frac{b^3}{3}\left(1-\frac{3}{2n}+\frac{1}{2n^2}\right)$$

$$=\frac{b^3}{3}-\frac{b^3}{3}\left(\frac{3}{2n}-\frac{1}{2n^2}\right);$$

同样以小曲边梯形的右边长为边作矩形（图1—3），矩形的面积是

$$\left(\frac{ib}{n}\right)^2\cdot\frac{b}{n}\ (i=1,\ 2,\ \cdots n,\ ).$$

所有这些矩形的面积和是

$$S_n=\frac{b^3}{n^3}(1^2+2^2+\cdots+n^2)=\frac{b^3}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$=\frac{b^3}{3}(1+\frac{3}{2n}+\frac{1}{2n^2})=\frac{b^3}{3}+\frac{b^3}{3}(\frac{3}{2n}+\frac{1}{2n^2})$$

容易看出，$S_n<S<S_n$

随着n的无限增大，S_n和S_n都将与曲边梯形的面积S

无限接近，阿基米德求出$S=\frac{b^3}{3}$。

上述三个中外古代著名数学例子都藉助于一个无穷的过程（无穷数列）描述和解决实践中所遇到的问题，包含有朴素的极限思想，即要求某一个量S，我们先构造一连串无限趋近于它的变量S_n($n=1$, 2, 3, …)，通过它们把S的数值确定，或可算出S精确到任意程度的近似值.

然而，由于古代生产力发展的限制，科学技术极为原始，古代学者的极限思想是十分含糊肤浅的。他们虽然也解决了一些现在要用微积分才能解决的问题，但其方法总是依赖于具体问题的几何和运动的直观背景，因而不能认识问题的实质，抽象出清楚、精确的极限方法.正是由于他们思想方法依赖于直觉，缺乏清晰的概念，严密的思维，所以无法回答对于极限方法的各种责难.曾经长期为人们争论不休的古代希腊著名的芝诺悖论就是一个例证.芝诺悖论中的两分法悖论说：一个赛跑者永远也不能到达终点，因为他必须先到达全程的中点，然后又须抵达余下路程的中点，而这种情况可以无限地进行下去（图1—4）.

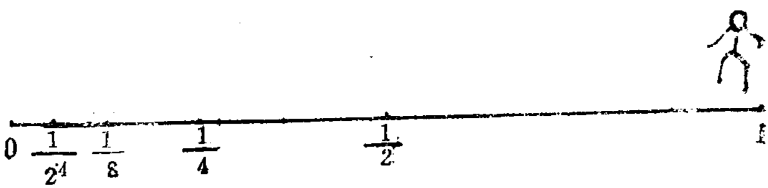

图 1-4

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

上述说明显然不合实际，是完全错误的.但是，要指出它的谬误，必须具备有连续，极限和无限集合的清晰、精确的概念.而这在生产力水平低下的古代是不可能的.

在中世纪晚期，行将取封建制度而代之的新的资本主义生产关系在欧洲出现，资本家野蛮地剥削，残酷地掠夺和扩张，促进了世界贸易的发展，远洋航行，工业技术发展都迫切需要解决许多与运动关联的问题.研究“运动”也成了数学的中心课题.经过二千年的积累和发展，古代的朴素的极限思想，在实践的刺激下，在科学技术发展的推动下，有了长足的发展和进步，终于由牛顿和莱布尼兹集前人之大成而创建了微积分学.微积分一诞生，许多过去深感困难，束手无策的问题都迎刃而解，在科技领域里硕果累累.微积分学本身也在实践中以磅礴的气势向前发展，产生了许许多多全新的数学分支.它的思想和方法渗透到古老的数学中，使古老的数学焕发出青春.微积分学变革数学方法上的重大意义，无论怎样估计都不会过份.然而初期的微积分虽然经过十七、十八世纪的飞速发展，却仍然没有彻底清除古代极限思想中那种从几何和运动的直觉出发的思维特征，极限概念仍就是一个动态的模糊不清的描述性概念，直到十九世纪，经过许多数学家的不懈努力，才由柯西提出了沿用至今的极限的精确定义，开创了用“有限”刻划“无限”的数学语言（ε—δ语言等），为把微积分纳

入一个严密的逻辑体系奠定了基础．尽管柯西开辟的使微积分学严密化的工作并未因有了极限的精确定义而终结．但是极限法是整个微积分学的基石，它贯串微积分的始终．所以重视极限概念的学习，正确掌握它的精确定义，对于学好微积分，乃至整个高等数学有着重要作用．

1·2　数列的极限

1．记号 $+\infty$ 和 $-\infty$

自然数列：1，2，…，n，…是无限的，通常我们用 $n\to+\infty$（在 n 为自然数时；也简记为 $n\to\infty$）表示它．显然，$+\infty$ 不是一个数，它表示自然数 n 可以无限增大（即大于任意的自然数 N）．

同样，对于负整数列：-1，-2，…，$-n$，…，我们说它趋于负无穷大，用 $n\to-\infty$ 表示．

由于实数可用数轴上的点表示（图1—5），它可向两方无限延伸，分别用 $x\to+\infty$ 和 $x\to-\infty$ 表示向右和向左无限延伸．通常也将数轴记为（$-\infty$，$+\infty$）．

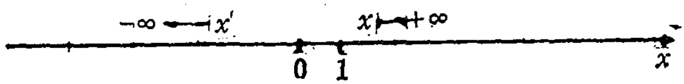

图　1—5

2．数列的极限

以后，我们限于研究无限数列．观察下面的数

列图1—6.

$$\{a_n\}:\ 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \cdots,\ \frac{1}{n},\ \cdots$$

$$\{b_n\}:\ 0,\ \frac{3}{2},\ \frac{2}{3},\ \cdots,\ 1+\frac{(-1)^n}{n},\ \cdots$$

$$\{c_n\}:\ -1,\ 2,\ -3,\ \cdots,\ (-1)^n n,\ \cdots$$

数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$有如下特性：随着n的无限增大，a_n将无限接近于0，b_n将无限接近于1. 而数列$\{c_n\}$却没有上述特性，它不趋于任何常数.为了能区别上述不同类型的数列，我们称$\{a_n\}$，$\{b_n\}$为收敛的，而称$\{c_n\}$为发散的.

数列极限的描述性定义：设$\{a_n\}$为一数列，a为一常数，如果随着n的无限增大，数列的项a_n无限接近于常数a，则称数列$\{a_n\}$以a为极限（或$\{a_n\}$收敛于a），记为

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a^*.$$

例如，随着n无限增大，$\frac{1}{n}$无限接近于常数

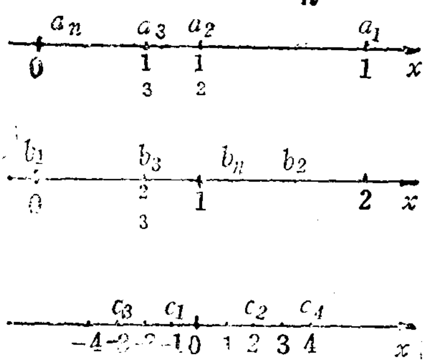

图 1—6

* 符号lim是拉丁文limes的缩写，读着"里米特".

0，可记为 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$.

同样 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[1+\frac{(-1)^n}{n}\right]=1$.

例1 观察下列数列有无极限，如有极限用极限符号表示它.

(1) $\left\{\frac{1}{n^2}\right\}$； (2) $\left\{\frac{n-1}{n}\right\}$；

(3) $\left\{(-1)^n\frac{n-1}{n}\right\}$.

解 (1) $\left\{\frac{1}{n^2}\right\}$：1，$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{9}$，…，$\frac{1}{n^2}$，…随着$n$的无限增大，$\frac{1}{n^2}$无限接近于0，即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0.$$

(2) $\left\{\frac{n-1}{n}\right\}$：0，$\frac{1}{2}$，$\frac{2}{3}$，$\frac{3}{4}$，…，$\frac{n-1}{n}$，…，随着$n$的无限增大，$\frac{n-1}{n}$无限接近于1，即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{n}=1.$$

(3) $\left\{(-1)^n\frac{n-1}{n}\right\}$：0，$\frac{1}{2}$，$-\frac{2}{3}$，$\frac{3}{4}$，…，$(-1)^n\frac{n-1}{n}$，…随着$n$的增加，它将在1与$-1$之间来回摆动，不会趋于任何常数，所以它没有极限.

极限的描述性定义，难以用作推理和论证的依

据，必须对它加以更精确的定义.这正如相似三角形的描述性定义："形状相似的三角形叫相似三角形"，难以用来判断两个三角形是否相似，只有对它给以精确的定量的刻划，即"对应角相等，对应边成比例"，才能用作推理的依据.下面我们通过对例1（2）的分析，来阐述极限的精确定义的方法.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{n}=1，即$$

随着n的无限增大，$\frac{n-1}{n}$无限接近于1.

从图1-7可看出，$\frac{n-1}{n}$无限接近于1，它在数轴上的表示是指点$\frac{n-1}{n}$与1的距离$\left|\frac{n-1}{n}-1\right|$要无限变小，即

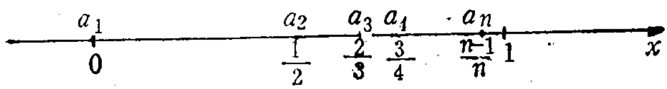

图 1—7

随着n无限增大，距离$\left|\frac{n-1}{n}-1\right|$无限变小

距离$\left|\frac{n-1}{n}-1\right|$无限变小的意义是什么呢？那就是当$n$充分大时，$\left|\frac{n-1}{n}-1\right|$能变得任意小.所谓任意小就是对无论怎样小的正数$\varepsilon$，随着$n$的无限增大，$\left|\frac{n-1}{n}-1\right|$都能小于$\varepsilon$，且保持

着小于ε. 例如当$\varepsilon=\frac{1}{10}$，$\left|\frac{n-1}{n}-1\right|=\frac{1}{n}<\frac{1}{10}$，故只须$n>10$，就恒有$\left|\frac{n-1}{n}-1\right|<\frac{1}{10}$，即第10项$a_{10}$以后的所有的项$a_n$都使$|a_n-1|<\frac{1}{10}$.

当$\varepsilon=\frac{1}{1000}$，只须$n>1000$，即从数列$\left\{\frac{n-1}{n}\right\}$的第1000项$a_{1000}$以后的所有的项都使$|a_n-1|<\frac{1}{1000}$.

当$\varepsilon=10^{-10}$，只须$n>10^{10}$，就恒有$\left|\frac{n-1}{n}-1\right|<\frac{1}{10^{10}}$.

但是尽管$\varepsilon=10^{-10}$是很小的数，它却是确定的数. 我们说$\left|\frac{n-1}{n}-1\right|$任意小，必须是它可变得恒小于任意给定的无论多小的正数ε. 这只须$n>\frac{1}{\varepsilon}$即有$\left|\frac{n-1}{n}-1\right|=\frac{1}{n}<\frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}}=\varepsilon$. 所以，极限$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n-1}{n}=1$可进一步叙述为

> 对任意$\varepsilon>0$，随着n的无限增大，恒有
>
> $$\left|\frac{n-1}{n}-1\right|<\varepsilon$$

要使$\left|\frac{n-1}{n}-1\right|<\frac{1}{10}$，必须$n>10$；要使

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com