高斯、克吕格坐标的换帶

测绘出版社

1959·北京

本書內容是根据"在投影平面上計算坐标的原理"推导一个精度高而实用簡便的換帶公式，并將"Hristow 法"所得之換帶公式加以扩充，以相驗証。为了适应这种高精度的需要，書中又論述了"方向与距离改化公式"的扩充。最后，又扼要叙述了如何編算換帶表等实用問題。

高斯、克吕格坐标的換帶

著者　金　揚　善

出版者　測　繪　出　版　社

北京宣武門外永光寺西街3号

北京市書刊出版業營業許可証出字第081号

發行者　新　华　書　店

印刷者　人民交通出版社印刷厂印刷

印数(京)1-2,900册　　1959年3月北京第1版

开本31"×43" 1/32　　1959年3月第1次印刷

字数42,000字　　印張1[illegible]

定价(10)0.27元

目　录

§1. 总　　論

坐标的換帶，就是把某一点在第Ⅰ投影帶的坐标換算为相鄰第Ⅱ帶的坐标。換帶方法之一，就是直接应用換帶公式或根据公式所編算的“換帶表”。这些公式的推导，首先在分帶子午綫或鄰帶中央子午綫上選一“补助点”，然后根据复数所表示的正形投影条件或根据几何关系以导出最后換帶公式。

在3°与6°分帶的重叠帶中發生的各种換帶情形下（3°与6°帶各自換至相鄰的3°与6°帶，以及3°与6°的互相換算），以及横跨兩帶并超越重叠帶的三角系在平面上平差时所需的換帶，若欲使換帶計算达到1mm的精度，則現有公式及其換算表尙感不足（特別是对于中国之低緯度）；而在实用手續方面，亦尙有进一步簡化之可能。本文之主旨，即在探求更精密之算式与更簡之实用方法。

本文換帶公式的推演，采用选定“补助点”M于分帶子午綫上（見圖1）的办法，并在旋轉橢球面上采取已知点P_1之“对称点”P_2，然后將有关在投影平面上計算P_2点之坐标的公式加以綜合，以演变为單一的直接換帶公式。此外，另將已知的用复数所得之公式加以扩充（§4），以驗其結果是否相符。

所謂P_1之“对称点”P_2，是指在橢球面上P_2为与P_1对称于分帶子午綫之点（圖1中P_1与P_2为其投影点），亦即謂兩点之緯度与經差（对于分帶子午綫而言）的絕对値各相等。这样，M至P_1与P_2的大地綫長度相等（設为S），而

MP_1 与 MP_2 的大地方位角 A_1 与 A_2 则有 $A_2=(360°-A_1)$ 的关系。

圖 1 为第 I 坐标帶之投影平面，Ix 为其中央子午綫，(I . II)为与相鄰第 II 帶之分帶子午綫的投影。在此第 I 帶

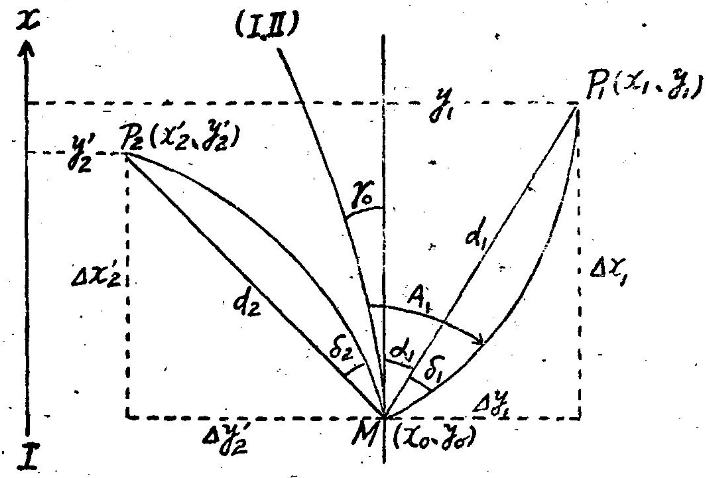

圖 1

投影平面上：設 M、P_1、P_2 之坐标各为(x_0, y_0)、(x_1, y_1)、(x_2', y_2')；γ_0 为 M 点的平面子午綫收斂角；d_1、d_2 为大地綫（橢球面上之 MP_1、MP_2）之投影曲綫之弦長，其与大地綫長度 S 之比各表以$(1+m_1)$、$(1+m_2)$；δ_1 与 δ_2 为投影曲綫方向化为弦綫方向的"改化数"；α_1、α_2 为弦綫 d_1 与 d_2 的坐标方向角。

又設：

$$\left.\begin{aligned}\Delta x_1=x_1-x_0, \quad \Delta x_2'=x_2'-x_0\\ \Delta y_1=y_1-y_0, \quad \Delta y_2'=y_2'-y_0\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

則按高斯、克呂格投影的一般实用公式，应有

$$\left.\begin{aligned}m_i=\frac{1}{2R_m^2}y_m^2+\frac{1}{24R_m^2}\Delta y_i^2+\frac{1}{24R_m^4}y_m^4.\\ d_i=S(1+m_i), \quad i=1,2\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

$$\delta_i = \frac{y_m}{2R_m^2}\Delta x_i - \frac{\Delta x_i \Delta y_i}{12R_m^2} + \frac{\eta^2 t}{R_m^3} y_m^2 \Delta y_i - \frac{1}{6R_m^4} y_m^3 \Delta x_i \quad (3)$$

其中 y_m 为 MP_i 两点横坐标的中数，R_m 为橢球面上两点之中点的平均曲率半徑，t 表 $\tan\varphi$，η^2 表示 $e'^2\cos^2\varphi$，而 e' 为第二偏心率。又在投影平面上：

$$\alpha_1 = A_1 - \gamma_0 - \delta_1$$

$$\alpha_2 = A_2 - \gamma_0 - \delta_2 = 360^\circ - \{(\alpha_1 + 2\gamma_0) + \beta\}, \beta = \delta_1 + \delta_2 \quad (4)$$

$$\Delta x_1 = d_1 \cos\alpha_1 \qquad \Delta y_1 = d_1 \sin\alpha_1 \quad (5)$$

$$\left.\begin{aligned} \Delta x_2' &= d_2\cos\alpha_2 = d_2\{\cos(\alpha_1 + 2\gamma_0)\cos\beta - \sin(\alpha_1 + \\ &\qquad + 2\gamma_0)\sin\beta\} \\ \Delta y_2' &= d_2\sin\alpha_2 = -d_2\{\sin(\alpha_1 + 2\gamma_0)\cos\beta + \cos(\alpha_1 + \\ &\qquad + 2\gamma_0)\sin\beta\} \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

由（2）式中 $d_i = S(1+m_i)$ 之关系，得

$$\frac{d_2}{d_1} = (1+m_2)(1-m_1+m_1^2-m_1^3+\cdots)$$

或 $\quad d_2 = d_1(1+m-mm_1+mm_1^2-\cdots)$，$m = m_2 - m_1 \quad (7)$

（6）式中之 $\sin\beta$、$\cos\beta$ 展为級数，又將（7）式之 d_2 代入，则得：

$$\left.\begin{aligned} \Delta x_2' &= \Delta x + \Delta x\left(m - mm_1 - \frac{1}{2}\beta^2 + \cdots\right) - \Delta y\,(\beta + \\ &\qquad + m\beta + \cdots) \\ -\Delta y_2' &= \Delta y + \Delta y\left(m - mm_1 - \frac{1}{2}\beta^2 + \cdots\right) + \Delta x\,(\beta + \\ &\qquad + m\beta + \cdots) \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

其中：

$$\left.\begin{aligned} \Delta x &= d_1\cos(\alpha_1 + 2\gamma_0) = \Delta x_1\cos2\gamma_0 - \Delta y_1\sin2\gamma_0 \\ \Delta y &= d_1\sin(\alpha_1 + 2\gamma_0) = \Delta y_1\cos2\gamma_0 + \Delta x_1\sin2\gamma_0 \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

M_1 与 P_1 为已知点，其有关各値均为已知，亦即（8）式

中之Δx、Δy、m_1等均为已知。若能求出m与β，則由(8)式即可算出P_2之坐标(x_2', y_2')。因P_1与P_2为"对称点"，故若P_1点在第Ⅱ帶之坐标为(x_2, y_2)，則

$$\left.\begin{array}{ll} x_2 = x_2' & y_2 = -y_2' \\ \Delta x_2 = \Delta x_2' = x_2 - x_0, & \Delta y_2 = -y_2' - y_0 \end{array}\right\} \qquad (10)$$

但m、β中包含m_2与δ_2，亦即包含未知数(x_2', y_2')。故知(8)式实即解求(x_2', y_2')亦即解求第Ⅱ帶坐标(x_2, y_2)之二元高次联立方程式，理論上自可解算。但用一般解算联立方程式之方法解求不易，須用他法。我們可先設想完全采用在投影平面上計算坐标的一般实用方法进行解算，在此法中：先根据M、P_1点的已知值反算橢球面上之S与A_1，暫时略去δ_2而用(4)式求α_2，并暫时略去m_2而用(2)式求d_2，則用(6)式即可得出$(\Delta x_2', \Delta y_2')$之概略值；然后用此概略值計算$m_2$、$\delta_2$与$d_2$、$\alpha_2$，再用(6)式計算$(\Delta x_2', \Delta y_2')$的精密值。此法可反复进行，完全可能得出最精确之結果，但手續較繁。本文則欲借助于投影平面上之計算公式將m、β化为Δx_1、Δy_1、y_0、γ_0之函数，而直接用(8)式解算$\Delta x_2'$, $\Delta y_2'$。这一方法的实質，就是把上述实用方法中所用之計算公式与步驟完全归併于(8)式之算式中。而得出單一的直接換算公式。

(8)式为無窮級数式，須仅采用其有限項，但为适合前述之实用目的与精度要求(1mm)，須先研究在各种換帶情形中之最不利的情况下，級数之某次項仍可略去。采用3°帶之換帶公式（补助点經差为1°.5）进行3°与6°帶的互相換算，以及在6°帶平面上平差跨帶三角系所进行之換帶計算，兩者均为不利之情况，緯度愈小，情况愈不利，在$\varphi = 15°$时：前一情况之y_0約为161km，Δy_1可大至215km($\Delta y_2'$約等于Δy_1)，后一情况之y_0約为323 km，Δy_1可大于100km。

因此，視 y_0 与 Δy_1（与 $\Delta y_2'$）均为 240 km（为了估算方便），当能包括所有之最不利情况。Δx_1 可大可小，視实际换算时所选之“补助点”而異，一般可使其甚小，且可使之为零（見§3），但此处采用 Δx_1（$\Delta x_2'$ 約相等）为 50 公里以估定級数項之取舍，当能充分保証精度。又在 φ 为 15° 时，R 約为 6360 公里，$\sin 2\gamma_0$ 为0.0271（$l=3°$时），$\eta^2 t$ 为 0.00168 。由（2）、（3）、（8）式可見：m_i 与 δ_i 所影响于 $\Delta x_2'$ 与 $\Delta y_2'$ 之項可写成 $R^{-r} y_0^{r+1-i} \Delta x_1^i$（視 $y_0 = \Delta y_1$）。茲按上述各值算出下表，以供决定級数項取舍之依据。

指数 $i=$	0	1	2	3	4	5
	mm	mm	mm	mm	mm	mm
$R^{-3} y^{4-i} \Delta x_1^i \eta^2 t$	21.67	4.51	0.94	0.20	0.04	0.01
$R^{-3} y^{4-i} \Delta x_1^i \eta^2 t \sin 2\gamma_0$	0.59	0.12	0.02			
$R^{-4} y^{5-i} \Delta x_1^i$	487.20	101.50	21.15	4.41	0.92	0.19
$R^{-4} y^{5-i} \Delta x_1^i \sin 2\gamma_0$	13.20	2.75	0.57	0.11	0.02	0.00
$R^{-4} y^{5-i} \Delta x_1^i \sin^2 2\gamma$	0.01	0.00				
$R^{-5} y^{6-i} \Delta x_1^i \eta^2 t$	0.03	0.00				
$R^{-6} y^{7-i} \Delta x_1^i$	0.07	0.05	0.03	0.00		

由上表之数值，并参考（2）、（3）式各項之係数，可見（8）式之 mm_1、$m\beta$、β^2 中 $\left(\frac{1}{R}\right)$ 四次以上之項以及 m_1、m、β 之二次以上之項完全可略。

公式（2）、（3）在一般实用上只适用于百公里以內之边長，用于前述之换帶情况則不够精确，由“（2）（3）式中缺少 y、Δy、Δx 的各种次数之項目”的情况，并参考上表数字，亦可猜測其項目不够，故須另加扩充，下节述之。

§ 2. 距离與方向改化公式的扩充

如圖2：x、y为高斯、克吕格投影平面上之坐标軸，ξ、η为該平面上另一直角坐标軸，M与P_1即相当于(圖1)之M、P_1，s为大地綫S之投影曲綫的長度，d_1为s的弦長，若m为"投影長度比"，則

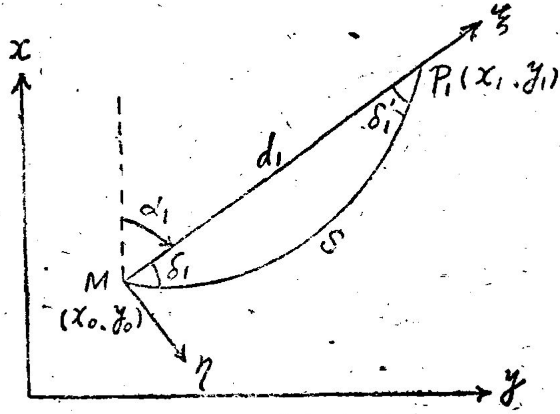

圖 2

$$dS=\frac{1}{m}ds=\frac{1}{m}\sqrt{d\xi^2+d\eta^2}$$

$$S=\int_0^s\frac{1}{m}ds=\int_0^{d_1}\frac{1}{m}\left[1+\left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}d\xi \qquad (11)$$

若δ代表投影曲綫上任一点之斜角，則"方向改化数"δ_1与δ'_1为"零点"M及P_1处的斜角，而

$$\eta'=\frac{d\eta}{d\xi}=\tan\delta\longrightarrow\delta \quad \eta'_0=\left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)_M\longrightarrow\delta_1 \qquad (12)$$

(11)式中的大地綫S为橢球面上的"最短綫"，根据"变分

法"· 欲使 S 为最小，須使(11)式右端之被积分函数

$$F=\frac{1}{m}\sqrt{1+\eta'^2}$$

滿足下列之"尤拉方程"

$$\frac{d}{d\xi}F_{\eta'}-F_{\eta}=0 \qquad \text{(A)}$$

式中

$$F_{\eta}=\frac{\partial F}{\partial\eta}=\sqrt{1+\eta'^2}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{1}{m}\right)$$

$$F_{\eta'}=\frac{\partial F}{\partial\eta'}=\frac{\eta'}{m\sqrt{1+\eta'^2}}$$

以此兩式代入(A)式，則得(11)式中之 S 为最小的必要条件为:

$$\frac{d}{d\xi}\left(\frac{\eta'}{m\sqrt{1+\eta'^2}}\right)-\sqrt{1+\eta'^2}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{1}{m}\right)=0 \qquad (13)$$

演算上式，并注意 $\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{1}{m}\right)=\left(\frac{-1}{m}\right)\frac{\partial}{\partial\xi}\log_e m$ 的关系，則得

$$\eta''=(1+\eta'^2)\left\{\beta'\frac{\partial}{\partial\xi}\log_e m-(1+\eta'^2)\frac{\partial}{\partial\eta}\log_e m\right\} \qquad (14)$$

由下述之(18)、(33)与(26) 式可知 η'、$\frac{\partial}{\partial\xi}\log_e m$ 与 $\frac{\partial}{\partial\eta}\log_e m$ 之主項均为 $\left(\frac{1}{R}\right)$ 之二次項，故 $\eta'^2\frac{\partial}{\partial\xi}\log_e m$、$\eta'^2\frac{\partial}{\partial\eta}\log_e m$ 之主項均为六次項而可略去，故(14)式可写为

$$\eta''=\eta'\frac{\partial}{\partial\xi}\log_e m-\frac{\partial}{\partial\eta}\log_e m \qquad (15)$$

投影曲綫 S 在(ξ,η)坐标系中之方程式可写为 $\eta=f(\xi)$，根据原点 M 展为 Maclaurin 級数，則

$$\eta=\eta_0+\eta_0'\xi+\frac{1}{2!}\eta_0''\xi^2+\frac{1}{3!}\eta_0'''\xi^3+\frac{1}{4!}\eta_0^{\mathrm{IV}}\xi^4+$$

$$+\frac{1}{5!}\eta_0^{\mathrm{V}}\xi^5+\cdots\cdots \tag{16}$$

η_0、η_0'、η_0''…等均表示在 M 点之值，都是常数。

在 M 点上时，$\eta=\xi=0$， 故 $\eta_0=0$。

在 P_1 点上时，$\eta=0$，$\xi=d_1$，且因 $\eta_0'=\delta_1$，故由(16)式可得

$$\delta_1=-\frac{1}{2}\eta_0''d_1-\frac{1}{6}\eta_0'''d_1^2-\frac{1}{24}\eta_0^{\mathrm{IV}}d_1^3-\frac{1}{120}\eta_0^{\mathrm{V}}d_1^4-\cdots \tag{17}$$

取(16)式对于 ξ 之微分，得

$$\eta'=\eta_0'+\eta_0''\xi+\frac{1}{2}\eta_0'''\xi^2+\frac{1}{6}\eta_0^{\mathrm{IV}}\xi^3+\frac{1}{24}\eta_0^{\mathrm{V}}\xi^4+\cdots \tag{18}$$

在 P_1 点上时，$\xi=d_1$，$\eta'_{P_1}=-\delta_1'$，且因 $\eta_0'=\delta_1$，故(18)式变为

$$-\delta_1'=\delta_1+\eta_0''d_1+\frac{1}{2}\eta_0''d_1+\frac{1}{6}\eta_0^{\mathrm{IV}}d_1^3+\frac{1}{24}\eta_0^{\mathrm{V}}d_1^4+\cdots \tag{19}$$

以(17)式代入，则

$$-\delta_1'=\frac{1}{2}\eta_0''d_1+\frac{1}{3}\eta_0'''d_1^2+\frac{1}{8}\eta_0^{\mathrm{IV}}d_1^3+\frac{1}{30}\eta_0^{\mathrm{V}}d_1^4+\cdots \tag{20}$$

長度比 m 之公式采用下之已知公式：

$$m=1+\frac{1}{2R^2}y^2+\frac{1}{24R^4}y^4 \tag{21}$$

此式已略去 $\frac{1}{6R^4}y^4(\eta^2-6\eta^2t)$，其对長度之影响不超过 0.3mm。式中之 R 为椭球面上相应于 (x,y) 之一点的平均曲率半徑，化之为相应于 $M(x_0,y_0)$ 之点的 R_0，須应用下之已知公式（近似式，但已够用）：

$$\frac{1}{R^2}=\frac{1}{R_0^2}\left(1-\frac{4\eta^2t}{R_0}\Delta x\right),\Delta x=x-x_0 \tag{22}$$

代入(21)式，并略去 $\left(\frac{1}{R}\right)$ 四次以上之項，則

$$m=1+\frac{1}{2R_0^2}y^2\left(1-\frac{4\eta^2t}{R_0}\Delta x\right)+\frac{1}{24R_0^4}y^4 \tag{23}$$

兩端取对数并展为級数（略去$\frac{1}{R}$四次以上之項）

$$\log_e m=\frac{1}{2R_0^2}y^2-\frac{2\eta^2 t}{R_0^3}y^2\,\Delta x-\frac{1}{12R_0^4}y^4 \tag{24}$$

如圖 2，投影曲綫上任一点在兩种坐标系中之坐标(x, y)与(ξ,η)应存在下列关系：

$$\left.\begin{aligned} x-x_0&=\Delta x=\xi\cos\alpha_1-\eta\sin\alpha_1\\ y-y_0&=\Delta y=\xi\sin\alpha_1+\eta\cos\alpha_1\end{aligned}\right\} \tag{25}$$

取(24)式之微分，并顧及(25)式，得

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\xi}\log_e m&=\frac{y}{R_0^2}\sin\alpha_1-\frac{4\eta^2 t}{R_0^3}y\Delta x\sin\alpha_1-\\ &\quad-2\frac{\eta^2 t}{R_0^3}y^2\cos\alpha_1-\frac{y^3}{3R_0^4}\sin\alpha_1\\ \frac{\partial}{\partial\eta}\log_e m&=\frac{y}{R_0^2}\cos\alpha_1-\frac{4\eta^2 t}{R_0^3}y\Delta x\cos\alpha_1+\\ &\quad+\frac{2\eta^2 t}{R_0^3}y^2\sin\alpha_1-\frac{y^3}{3R_0^4}\cos\alpha_1\end{aligned}\right\} \tag{26}$$

(26)式代入(15)式，并略去$\eta'\frac{\partial}{\partial\xi}\log_e m$中$\left(\frac{1}{R}\right)$四次以上之項，則得

$$\begin{aligned}\eta''=&-\frac{y}{R_0^2}\cos\alpha_1+\frac{4\eta^2 t}{R_0^3}y\Delta x\cos\alpha_1-\frac{2\eta^2 t}{R_0^3}y^2\sin\alpha_1+\\ &+\frac{y^3}{3R_0^4}\cos\alpha_1+\eta'\frac{y}{R_0^2}\sin\alpha_1\end{aligned} \tag{27}$$

$$\begin{aligned}\eta'''=\frac{\partial}{\partial\xi}\eta''=&-\frac{1}{R_0^2}\cos\alpha_1\sin\alpha_1+\frac{4\eta^2 t}{R_0^3}\Delta x\cos\alpha_1\sin\alpha_1+\\ &+\frac{4\eta^2 t}{R_0^3}y\cos^2\alpha_1-\frac{4\eta^2 t}{R_0^3}y\sin^2\alpha_1+\frac{y^2}{R_0^4}\cos\alpha_1\sin\alpha_1+\\ &+\eta''\frac{y}{R_0^2}\sin\alpha_1+\eta'\frac{1}{R_0^2}\sin^2\alpha_1\end{aligned}$$

以(27)式之η''代入，并略去$\frac{1}{R}$四次以上之项，得

$$\eta'''=-\frac{1}{R_0^2}\sin\alpha_1\cos\alpha_1+\frac{4\eta^2t}{R_0^3}\Delta x\sin\alpha_1\cos\alpha_1+$$

$$+\frac{4\eta^2t}{R_0^3}y(\cos^2\alpha_1-\sin^2\alpha_1)+\eta'\frac{1}{R_0^2}\sin^2\alpha_1 \tag{28}$$

$$\eta^{\mathrm{IV}}=\frac{\partial\eta'''}{\partial\xi}=\frac{4\eta^2t}{R_0^3}\sin\alpha_1\cos^2\alpha_1+\frac{4\eta^2t}{R_0^3}\sin\alpha_1(\cos^2\alpha_1-$$

$$-\sin^2\alpha_1)+\frac{1}{R_0^2}\left(-\frac{y}{R_0^2}\cos\alpha_1\right)\sin^2\alpha_1 \tag{29}$$

$$\eta^{\mathrm{V}}=\frac{\partial}{\partial\xi}\eta^{\mathrm{IV}}=-\frac{1}{R_0^4}\sin^3\alpha_1\cos\alpha_1 \qquad \eta^{\mathrm{VI}}=0 \tag{30}$$

在M点：$\xi=\eta=0$，$x=x_0$，$y=y_0$，$\Delta x=0$，$\eta_0'=\delta_1$，故得

$$\left.\begin{aligned}
\eta_0''&=-\frac{y_0}{R_0^2}\cos\alpha_1-\frac{2\eta^2t}{R_0^3}y_0^2\sin\alpha_1+\\
&\quad+\frac{1}{3R_0^4}y_0^3\cos\alpha_1+\delta_1\frac{y_0}{R_0^2}\sin\alpha_1\\
\eta_0'''&=-\frac{1}{R_0^2}\sin\alpha_1\cos\alpha_1+\frac{4\eta^2t}{R_0^3}y_0(\cos^2\alpha_1-\\
&\quad-\sin^2\alpha_1)+\delta_1\frac{1}{R_0^2}\sin^2\alpha_1\\
\eta_0^{\mathrm{IV}}&=\frac{4\eta^2t}{R_0^3}\sin\alpha_1\cos^2\alpha_1+\frac{4\eta^2t}{R_0^3}\sin\alpha_1(\cos^2\alpha_1-\\
&\quad-\sin^2\alpha_1)-\frac{y_0}{R_0^4}\sin^2\alpha_1\cos\alpha_1\\
\eta_0^{\mathrm{V}}&=-\frac{1}{R_0^4}\sin^3\alpha_1\cos\alpha_1,\quad \eta_0^{\mathrm{VI}}=0
\end{aligned}\right\} \tag{31}$$

以(31)式代入(17)与(20)式，并注意下之关系（見圖2）：

$$x_1-x_0=\Delta x_1=d_1\cos\alpha_1 \qquad y_1-y_0=\Delta y_1=d_1\sin\alpha_1 \tag{32}$$

則得

$$\delta_1=\frac{y_0}{2R_0^2}\Delta x_1+\frac{\eta^2 t}{R_0^3}y_0^2\Delta y_1-\frac{y_0^3}{6R_0^4}\Delta x_1-\delta_1\frac{y_0}{2R_0^2}\Delta y_1+$$
$$+\frac{1}{6R_0^2}\Delta x_1\Delta y_1-\frac{4\eta^2 t}{6R_0^3}y_0(\Delta x_1^2-\Delta y_1^2)-\delta_1\frac{1}{6R_0^2}\Delta y_1^2-$$
$$-\frac{\eta^2 t}{6R_0^3}\Delta y_1\Delta x_1^2-\frac{\eta^2 t}{6R_0^3}\Delta y_1(\Delta x_1^2-\Delta y_1^2)+$$
$$+\frac{1}{24R_0^4}y_0\Delta y_1^2\Delta x_1+\frac{1}{120R_0^4}\Delta y_1^3\Delta x_1$$

$$-\delta_1'=-\frac{y_0}{2R_0^2}\Delta x_1-\frac{\eta^2 t}{R_0^3}y_0^2\Delta y_1+\frac{y_0^3}{6R_0^4}\Delta x_1+\delta_1\frac{y_0}{2R_0^2}\Delta y_1-$$
$$-\frac{1}{3R_0^2}\Delta x_1\Delta y_1+\frac{4\eta^2 t}{3R_0^3}y_0(\Delta x_1^2-\Delta y_1^2)+\delta_1\frac{1}{3R_0^2}\Delta y_1^2+$$
$$+\frac{\eta^2 t}{2R_0^3}\Delta x_1^2\Delta y_1+\frac{\eta^2 t}{2R_0^3}\Delta y_1(\Delta x_1^2-\Delta y_1^2)-\frac{1}{8R_0^4}y_0\Delta y_1^2\Delta x-$$
$$-\frac{1}{30R_0^4}\Delta y_1^3\Delta x_1$$

上兩式右端之 δ_1 以其二次項代入，幷加以簡化，得

$$\left.\begin{aligned}\delta_1=&\frac{\Delta x_1}{6R_0^2}(3y_0+\Delta y_1)+\frac{\eta^2 t}{6R_0^3}\Delta y_1(6y_0^2+4y_0\Delta y_1+\\&+\Delta y_1^2)-\frac{\eta^2 t}{3R_0^3}\Delta x_1^2(2y_0+\Delta y_1)-\\&-\frac{\Delta x_1}{360R_0^4}(60y_0^3+90y_0^2\Delta y_1+45y_0\Delta y_1^2+7\Delta y_1^3)\end{aligned}\right\}\quad(33)$$

$$\left.\begin{aligned}\delta_1'=&\frac{\Delta x_1}{6R_0^2}(3y_0+2\Delta y_1)+\frac{\eta^2 t}{6R_0^3}\Delta y_1(6y_0^2+8y_0\Delta y_1+\\&+3\Delta y_1^2)-\frac{\eta^2 t}{3R_0^3}\Delta x_1^2(4y_0+3\Delta y_1)-\frac{\Delta x_1}{360R_0^4}(60y_0^3+\\&+90y_0^2\Delta y_1+45y_0\Delta y_1^2+8\Delta y_1^3)\end{aligned}\right\}\quad(34)$$

以上兩式，即為在上节末段所述之最不利情況下一般投影曲綫兩端之“方向改化”所适用之精确公式。

同(33)式之理，（圖 1 ）中投影曲綫 MP_2 在 M 点之方向改化数 δ_2 应为：

$$\left.\begin{aligned}\delta_2=&\frac{\Delta x_2'}{6R_0^2}(3y_0+\Delta y_2')+\frac{\eta^2 t}{6R_0^3}\Delta y_2'(6y_0^2+4y_0\Delta y_2'+\\&+\Delta y_2'^2)-\frac{\eta^2 t}{3R_0^3}\Delta x_2'^2(2y_0+\Delta y_2')-\frac{\Delta x_2'}{360R_0^4}(60y_0^3+\\&+90y_0^2\Delta y_2'+45y_0\Delta y_2'^2+7\Delta y_2'^3)\end{aligned}\right\}\quad(35)$$

求(23)式之倒数，并略去 $\frac{1}{R}$ 四次以上之项，得

$$\frac{1}{m}=1-\frac{y^2}{2R_0^2}+\frac{2\eta^2 t}{R_0^3}y^2\Delta x+\frac{5y^4}{24R_0^4}\qquad(36)$$

以(25)式代入(36)式，（此处顧及投影曲綫与其弦綫上坐标之差異）得

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{m}=&1-\frac{1}{2R_0^2}(y_0+\xi\sin\alpha_1)^2+\frac{2\eta^2 t}{R_0^3}(y_0+\\&\xi\sin\alpha_1)^2\xi\cos\alpha_1+\frac{5}{24R_0^4}(y_0+\xi\sin\alpha_1)^4-\\&-\frac{1}{R_0^2}(y_0+\xi\sin\alpha_1)\eta\cos\alpha_1-\\&-\frac{1}{2R_0^2}\eta^2\cos^2\alpha_1+\cdots\end{aligned}\right\}\quad(37)$$

(16)式中之 $\eta_0=0$，$\eta_0'=\delta_1$，以(31)与(33)式代入(16)式并仅取 $\frac{1}{R^2}$ 項，得投影曲綫之方程式:

$$\eta=\frac{\Delta x_1}{6R_0^2}(3y_0+\Delta y_1)\xi-\frac{y_0}{2R_0^2}\cos\alpha_1\xi^2-\frac{1}{6R_0^2}\sin\alpha_1\cos\alpha_1\xi^3$$

代入(37)式，并略去 $\frac{1}{R}$ 四次以上之項，得

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{1}{m}=1-\frac{1}{2R_0^2}y_0^2+\frac{5}{24R_0^4}y_0^4+\\
&+\xi\left\{-\frac{y_0}{R_0^2}\sin\alpha_1+\frac{2\eta^2t}{R_0^3}y_0^2\cos\alpha_1+\frac{5y_0^3}{6R_0^4}\sin\alpha_1-\right.\\
&\left.-\frac{\Delta x_1}{6R_0^4}y_0(3y_0+\Delta y_1)\cos\alpha_1\right\}+\xi^2\left\{-\frac{1}{2R_0^2}\sin^2\alpha_1+\right.\\
&+\frac{4\eta^2t}{R_0^3}y_0\sin\alpha_1\cos\alpha_1+\frac{5y_0^2}{4R_0^4}\sin^2\alpha_1+\\
&\left.+\frac{y_0^2}{2R_0^4}\cos^2\alpha_1-\frac{\Delta x_1}{6R_0^4}(3y_0+\Delta y_1)\sin\alpha_1\cos\alpha_1\right\}\\
&+\xi^3\left\{\frac{2\eta^2t}{R_0^3}\sin^2\alpha_1\cos\alpha_1+\frac{5y_0}{6R_0^4}\sin^3\alpha_1+\right.\\
&\left.+\frac{2y_0}{3R_0^4}\sin\alpha_1\cos^2\alpha_1\right\}+\xi^4\left\{\frac{5}{24R_0^4}\sin^4\alpha_1+\right.\\
&\left.+\frac{1}{6R_0^4}\sin^2\alpha_1\cos^2\alpha_1\right\}
\end{aligned}\right\}\quad(38)$$

又由(18)、(31)与(33)式，略去$\frac{1}{R}$四次以上之項，得

$$\eta'^2=\delta_1^2+2\delta_1\eta_0''\xi+(\eta_0''^2+\delta_1\eta_0''')\xi^2+(\eta_0''\eta_0''')\xi^3+\frac{1}{4}(\eta_0''')^2\xi^4\doteq$$

$$\begin{aligned}
&=\left\{\frac{\Delta x_1}{6R_0^2}(3y_0+\Delta y_1)\right\}^2-\frac{\Delta x_1}{3R_0^4}y_0(3y_0+\Delta y_1)\cos\alpha_1\xi+\\
&+\left\{\frac{y_0^2}{R_0^4}\cos^2\alpha_1-\frac{\Delta x_1}{6R_0^4}(3y_0+\Delta y_1)\sin\alpha_1\cos\alpha_1\right\}\xi^2+\\
&+\frac{y_0}{R_0^4}\sin\alpha_1\cos^2\alpha_1\xi^3+\frac{1}{4R_0^4}\sin^2\alpha_1\cos^2\alpha_1\xi^4
\end{aligned}$$

由以上兩式，並略去$\frac{1}{R}$四次以上之項，得

$$\frac{1}{m}\left\{1+\left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}\doteq\frac{1}{m}\left\{1+\frac{1}{2}\eta'^2\right\}\doteq$$

$$\doteq \frac{1}{m}+\frac{1}{2}\eta'^2=\alpha+\beta\xi+\gamma\xi^2+\delta\xi^3+\varepsilon\xi^4 \tag{39}$$

(39)式之 α、$\beta\cdots$如下:

$$\left.\begin{aligned}
\alpha=&1-\frac{1}{2R_0^2}y_0^2+\frac{5y_0^4}{24R_0^4}+\\
&+\frac{\Delta x_1^2}{72R_0^4}(9y_0^2+6y_0\Delta y_1+\Delta y_1^2)\\
\beta=&-\frac{y_0}{R_0^2}\sin\alpha_1+\frac{2\eta^2 t}{R_0^3}y_0^2\cos\alpha_1+\frac{5y_0^3}{6R_0^4}\sin\alpha_1-\\
&-\frac{\Delta x_1}{3R_0^4}(3y_0^2+y_0\Delta y_1)\cos\alpha_1\\
\gamma=&-\frac{1}{2R_0^2}\sin^2\alpha_1+\frac{4\eta^2 t}{R_0^3}y_0\sin\alpha_1\cos\alpha_1+\\
&+\frac{5y_0^2}{4R_0^4}\sin^2\alpha_1+\frac{y_0^2}{R_0^4}\cos^2\alpha_1-\\
&-\frac{\Delta x_1}{4R_0^4}(3y_0+\Delta y_1)\sin\alpha_1\cos\alpha_1\\
\delta=&\frac{2\eta^2 t}{R_0^3}\sin^2\alpha_1\cos\alpha_1+\frac{5y_0}{6R_0^4}\sin^3\alpha_1+\\
&+\frac{7y_0}{6R_0^4}\sin\alpha_1\cos^2\alpha_1\\
\varepsilon=&\frac{5}{24R_0^4}\sin^4\alpha_1+\frac{7}{24R_0^4}\sin^2\alpha_1\cos^2\alpha_1
\end{aligned}\right\} \tag{40}$$

將(39)式代入(11)式，并進行积分，則得

$$\frac{S}{d_1}=\alpha+\frac{1}{2}\beta d_1+\frac{1}{3}\gamma d_1^2+\frac{1}{4}\delta d_1^3+\frac{1}{5}\varepsilon d_1^4 \tag{41}$$

以(40)式代入(41)式，并注意(32)式，得

$$\frac{S}{d_1}=1-\frac{y_0^2}{2R_0^2}+\frac{5}{24R_0^4}y_0^4+\frac{\Delta x_1^2}{72R_0^4}(9y_0^2+6y_0\Delta y_1+\Delta y_1^2)-$$

$$-\frac{y_0}{2R_0^2}\Delta y_1+\frac{\eta^2 t}{R_0^3}y_0^2\Delta x_1+\frac{5}{12R_0^4}y_0^3\Delta y_1-$$