# 工程数学

同济三、四版通用

# 线性代数

# 辅导与习题全解

高等学校教材配套辅导丛书

华研数学

同济大学

马志敏 张华隆 濮燕敏／主编

TOPWAY

中山大学出版社

·广州·

**图书在版编目(CIP)数据**

线性代数辅导与习题全解/马志敏,张华隆,濮燕敏主编. —广州:中山大学出版社,2003.8

(高等学校教材配套辅导丛书)

ISBN 7-306-02148-6

I. 线… II. ①马…②张…③濮… III. 线性代数–高等学校–教学参考资料 IV. 0151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 074469 号

责任编辑:张礼凤　封面设计:郭　炜　责任校对:凌　雪　责任技编:黄少伟

中山大学出版社出版发行

(地址:广州市新港西路 135 号　邮编:510275)

电话:020-84111998、84037215

广东新华发行集团发行

广州市番禺官桥彩色印刷厂印刷

(地址:广州市番禺区石楼官桥　邮编:511447)

850 毫米×1168 毫米　32 开本　9 印张　270 千字

2003 年 8 月第 1 版　2003 年 8 月第 1 次印刷

定价:12.80 元

# 前　言

线性代数是理工科学生的一门重要的必修基础课程，它的基本概念、基本理论和基本运算具有较强的逻辑性、抽象性和广泛的应用性。但该课程课时少、概念多、定理多、内容抽象而实例较少，众多学生在学习过程中普遍感到听课时似乎内容都懂了，但在分析问题、解决问题时，却又好像概念混淆，解题思路贫乏。为了进一步培养学生思维能力和计算演绎能力，帮助学生巩固、加深、提高和拓宽所学的知识，我们结合多年的教学经验编写了本书。

本书与同济大学数学教研室编写的《线性代数》(第三、四版)的章节内容同步，每章内容包括：

1. 学习要求与考点提要；
2. 基础知识回顾；
3. 典型例题分析与解题思路总结；
4. 教材课后习题解题思路分析。

在本书最后，附录一给出了近三年研究生入学数学考试线性代数部分的试题及题解；附录二提供了五套《线性代数》期末模拟考试试题，根据各专业的学习要求，模拟试卷按难易可分别适用于每周2学时教学要求或每周3学时教学要求。

本书可供大学本专科学生，尤其是使用同济大学数学教研室编写的《线性代数》(第三、四版)教材的读者作为参考书，也可作为报考研究生的读者复习线性代数课程时的参考书。

我们衷心希望本书能够成为广大读者学习线性代数课程的得力助手，当然由于编者水平所限，再加之时间仓促，书中不妥之处在所难免，恳请广大读者及同行批评指正。

编　者

2003年8月

# Contents

# 目录

# 第一章 行列式

行列式是一种重要的数学工具，在数学领域的各个分支及其他许多学科中都将经常用到这一工具。读者可以在二、三阶行列式的基础上理解一般$n$阶行列式的意义和用途。

## §1.1 学习要求与考点提要

### 1 • 学习要求

1. 理解$n$阶行列式的概念与性质。了解一些特殊行列式的值,如对角行列式、三角行列式等。熟练掌握运用行列式的性质将各类行列式化成特殊行列式的方法,以及行列式按行(列)展开的方法来计算行列式。

2. 了解范德蒙行列式及其结果。

3. 掌握用行列式为工具求解线性方程组的克莱姆法则。理解该法则在实用上的不便与理论上的重要价值。

### 2 • 考点提要

1. 利用行列式的性质或展开定理求行列式的值。

2. 利用克莱姆法则讨论线性方程组解的情况。

## §1.2 基础知识回顾

### 1 • 主要内容提要

#### 1. 排列的奇偶性

在一个排列$p_1p_2\cdots p_t\cdots p_s\cdots p_n$中,若$p_s<p_t$,则称$p_s$与$p_t$构成了一个逆

序。一个排列的逆序总数称为该排列的**逆序数**，用$\tau(p_1p_2\cdots p_n)$表示。若$\tau$为奇数，则称$p_1p_2\cdots p_n$为**奇排列**；若$\tau$为偶数，则称$p_1p_2\cdots p_n$为**偶排列**。$1,2,\cdots,n$这$n$个数构成的排列中，奇排列与偶排列的总数各为$\frac{1}{2}n!$个。

在排列$p_1p_2\cdots p_t\cdots p_s\cdots p_n$中，对调任意两数$p_s$与$p_t$的位置，其余位置的数保持不动，则得到一个新的排列$p_1p_2\cdots p_s\cdots p_t\cdots p_n$。这样的对调称为一次**对换**。对换改变排列的奇偶性。任意一个排列可进行多次对换，每次对换都改变排列的奇偶性。若进行偶数次对换，则新排列与原排列的奇偶性一样；若进行奇数次对换，则新排列与原排列的奇偶性相反。

由同样的$n$个数组成的任意两个不同排列，总可以经过若干次对换，将其中的一个排列变成另一个排列。若两者奇偶性相同，则对换次数一定是偶数；若两者的奇偶性不同，则对换次数一定是奇数。

### 2. $n$阶行列式的定义

(1) $n^2$个数$a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$按一定的规律运算后构成一个确定的数，这样得到的数就称为$n$阶行列式，记为

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

其中的运算规律为如下形式：

$$D=\sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^{\tau}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$$

式中$(p_1p_2\cdots p_n)$表示数$1,2,\cdots,n$的一个排列，$\tau$表示这个排列的逆序数。求和号$\sum$表示对数$1,2,\cdots,n$的所有不同全排列进行求和(共$n!$项求和)。

(2) 由$n$阶行列式的定义可算出下列一些特殊行列式。这些结果在一般行列式的计算过程中经常用到，须熟记。

① 上、下三角行列式等于主对角线上的元素之积。即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

② 对角行列式等于对角线元素之积。即

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{vmatrix} = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$$

③ 对角行列式(次对角)为

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & \lambda_1 \\ 0 & \cdots & \lambda_2 & 0 \\ \vdots & \therefore & \vdots & \vdots \\ \lambda_n & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$$

### 3. $n$ 阶行列式的性质

(1) 行列式 $D$ 与它的转置行列式 $D^{T}$ 相等。

(2) 互换行列式的两行(列),行列式变号。——变换

今后用 $r_i \leftrightarrow r_j(c_i \leftrightarrow c_j)$ 表示 $i,j$ 两行(列)互换。

(3) 行列式某一行(列)中所有元素都乘以同一数 $k$,等于用数 $k$ 乘此行列式;或者,行列式某一行(列)的各元素有公因子 $k$ ,则 $k$ 可提到行列式记号外。——倍乘

今后用 $kr_i(kc_i)$ 表示用数 $k$ 乘行列式第 $i$ 行(列)。

(4) 行列式中如果有两行(列)的元素对应相等或成比例,则此行列式为零。

(5) 如果行列式中的某一行(列)的每个元素都写成两个数的和,则此行列式可以写成两个行列式的和,这两个行列式分别以这两个数为所在行(列)对应位置的元素,其他位置的元素与原行列式相同。

(6) 将行列式某一行(列)的所有元素同乘以数 $k$ 后加到另一行(列)对应位置的元素上去,行列式的值不变。——倍加

今后用 $r_i+kr_j(c_i+kc_j)$ 表示第 $j$ 行(列)元素的 $k$ 倍加到第 $i$ 行(列)元素上去。

### 4. 行列式按行(列)展开

(1) 行列式中将元素 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 所在的第 $i$ 行和第 $j$ 列的元素全部划去,余下的元素按原来的顺序构成一个 $n-1$ 阶行列式,称之为元素 $a_{ij}$ 的余子式,记作 $M_{ij}$。记 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ ,称 $A_{ij}$ 为元素 $a_{ij}$ 的**代数余**

子式。

$n$ 阶行列式 $D$ 总共有 $n^2$ 个元素，分别对应 $n^2$ 个余子式及 $n^2$ 个代数余子式。

(2) $n$ 阶行列式等于它的任一行(列)的各元素与对应的代数余子式的乘积之和，即行列式可按第 $i$ 行展开：

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}\quad (i=1,2,\cdots,n)$$

或者行列式可按第 $j$ 列展开：

$$D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}\quad (j=1,2,\cdots,n)$$

(3) 行列式任一行(列)的各元素与另一行(列)的对应元素的代数余子式的乘积之和等于零，即

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0,\quad i\neq j$$

或

$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=0,\quad i\neq j$$

### 5. 范德蒙(Vandermonde)行列式

$n$ 阶范德蒙行列式的形式和结果为：

$$V(x_1,x_2,\cdots x_n)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}=\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j)$$

### 6. 克莱姆(Cramer)法则

考虑含有 $n$ 个方程的 $n$ 元线性方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases}\tag{1.1}$$

当 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 全为零时称为**齐次线性方程组**；否则，称为**非齐次线性方程组**。

(1) 线性方程组(1.1)的系数行列式 $D\neq 0$ 时，它有惟一解：$x_i=\dfrac{D_i}{D}$

$(i=1,2,\cdots,n)$，其中$D_i$是将$D$中的第$i$列元素用方程组(1.1)右端的自由项替代后得到的$n$阶行列式。

(2) 如果方程组(1.1)无解或者至少存在两个不同的解，则其系数行列式$D=0$。

(3) 由于齐次线性方程组至少有一个零解，上述结论可叙述为：如果齐次线性方程组的系数行列式$D\neq 0$，则它只有零解；如果齐次线性方程组有非零解，则它的系数行列式$D=0$。

## 2 • 常见疑难问题解答

### 1. 本章关于行列式的性质较多，该如何学习？

**答**：行列式的定义表达式是一个复杂的计算式，$n$阶行列式共有$n!$项求和，而每项又由$n$个不同元素的乘积构成，直接利用定义计算行列式是很困难的。通常有两种途径可简化行列式的计算。

(1) 反复利用行列式的性质将任意行列式化成特殊的行列式，如三角行列式或对角行列式，而这些特殊行列式的值很容易看出。这种途径主要用到行列式的三条性质：行(列)交换，行(列)倍乘，行(列)倍加。行列式计算的这三条性质一定要熟练掌握。

(2) 利用行列式按行(列)展开定理将$n$阶行列式化成低一阶的行列式来计算。显然低阶行列式比高阶行列式更容易计算。如果在用展开定理之前，能利用行列式的三条性质(交换、倍乘、倍加)首先将行列式的某行(列)的大多数元素化成零(最好只剩下一个非零元素)，则使用展开定理计算行列式将更加简便。

### 2. 范德蒙行列式有哪些特点？

**答**：范德蒙行列式是一类很特殊的行列式，其结果今后可不加证明地直接运用(除非要求证明此结果)。从结构来看，$n$阶范德蒙行列式的第$j$列从上到下依次为变元$X_j$的零次幂、一次幂、……、$n-1$次幂$(j=1,2,\cdots,n)$。第$i$行各元素则是变元$x_1,x_2,\cdots,x_n$的$i-1$次幂$(i=1,2,\cdots,n)$。从行列式结果看，范德蒙行列式中总共有$n$个变元$x_1,x_2,\cdots,x_n$，它是关于这些变元的$\frac{1}{2}n(n-1)$次齐次函数，而此齐次函数可分解成$\frac{1}{2}n(n-1)$个形如$(x_i-x_j)$的因子的乘积，其中$1\leqslant j<i\leqslant n$，即足标大的变元与足标小的变元之差。另一方面可看到，$n$个变元$x_1,x_2,\cdots,x_n$之间形如$(x_i-x_j)(1\leqslant j<i\leqslant n)$的

所有不同因子共$\frac{1}{2}n(n-1)$个。于是，$n$阶范德蒙行列式等于所有足标大的变元与足标小的变元之差作为其乘积因子的$n$元函数。

### 3. 学习克莱姆法则要注意些什么？

**答**：克莱姆法则给出了$n$元$n$个方程的线性方程组有惟一解的判定条件，并且在此条件下给出了方程组惟一解的具体表达式。首先应注意到，解的表达式要计算$n+1$个$n$阶行列式$D,D_1,D_2,\cdots,D_n$。当$n$比较大时，这些行列式的计算都比较困难。因此，当方程组的变量较大时($n$超过3)，一般不适宜用克莱姆法则求解线性方程组。本书第三、四章将介绍更简便的方法求解一般的线性方程组。

克莱姆法则给出了$n$元$n$个方程的线性方程组惟一解或有非零解与只有零解(齐次)的判定条件，这些判定条件是本书第三、四章讨论一般线性方程组理论的基础，可以说是一般线性方程组求解的基础。读者在学习过程中千万不能因为该法则对求解线性方程组不方便而忽略了该法则的价值，而应意识到该法则对于建立方程组的一般理论是必不可少的。

### 4. 为什么$n(n\geqslant 4)$阶行列式不能按对角线展开方法来计算？

**答**：二、三阶行列式可以按对角线展开方法来计算，而四阶及四阶以上的行列式则不能按对角线展开方法来计算，因为$n\geqslant 4$时行列式按对角线展开后计算得到的结果与$n$阶行列式的定义不符。例如，对于四阶行列式，如果按照类似于三阶行列式的对角线法则，则只能写出八项求和，这显然是错误的。因为按照行列式的定义，四阶行列式总共有4!项求和，即24项的代数和。另外，按对角线方法得出的项的符号也不一定正确。例如，对于乘积项$a_{14}a_{21}a_{32}a_{43}$，排列4132的逆序数为3，该项应取负号而非正号。所以，在计算$n(n\geqslant 4)$阶行列式时，对角线法则失效。

### 5. 为什么说在一个$n$阶行列式中，如果等于零的元素多于$(n^2-n)$个，则该行列式的值一定等于零？

**答**：$n$阶行列式共有$n^2$个元素，若等于零的元素多于$n^2-n$个，则不等于零的元素一定少于$n$个。即此行列式中不等于零的元素至多是$n-1$个。根据行列式的定义，$n$阶行列式总共有$n!$项求和，而每项由$n$个元素

乘积组成，且这$n$个元素分别取自行列式不同的行和不同的列。这样，行列式的$n!$个求和项中，每一项都至少包含一个零因子，故该行列式一定为零。

## §1.3 典型例题分析与解题思路总结

### 1 • 选择填空题

**例 1** 排列134782695的逆序数为(　　)。

(A) 9;　(B) 10;　(C) 11;　(D) 12。

**答案**:(B)。

**[思路分析]** 1排在首位，逆序数为0;3,4,7,8各数的前面没有比它们自身大的数，故这四个数的逆序数均为0;2的前面比2大的数有四个(3,4,7,8)，故逆序数为4; 6的前面比6大的数有两个(7,8)，故逆序数为2;9是最大的数，前面的数都比它小，故逆序数为0;5的前面比5大的数有4个(7,8,6,9)，故逆序数为4。于是，排列134782695的逆序数为$t$=0+0+4+2+4=10。故选(B)。

**例 2** $D$是5阶行列式，其中$a_{12}$=0，则$D$按定义的展开式中等于零的项至少有(　　)项。

(A) 4;　(B) 5;　(C) 24;　(D) 120。

**答案**:(C)。

**[思路分析]** 5阶行列式按定义的展开式中含$a_{12}$的项有$a_{12}a_{2p_2}a_{3p_3}a_{4p_4}a_{5p_5}$，其中$p_2,p_3,p_4,p_5$是4个数1,3,4,5的任一个排列，不同的排列共有4! =24种，由于$a_{12}$=0，故至少有24项等于零。因此选(C)。

**例 3** 设

$$f(x)=\begin{vmatrix} x-a_{11} & -a_{12} & -a_{13} & -a_{14} \\ -a_{21} & x-a_{22} & -a_{23} & -a_{24} \\ -a_{31} & -a_{32} & x-a_{33} & -a_{34} \\ -a_{41} & -a_{42} & -a_{43} & x-a_{44} \end{vmatrix}$$

则$x^3$ 的系数为(　　)。

(A) $-(a_{11}+a_{22}+a_{33}+a_{44})$;　　(B) $a_{11}+a_{22}+a_{33}+a_{44}$ ;

(C) $a_{11}+a_{22}+a_{44}$;　　(D) $-(a_{11}+a_{22}+a_{44})$ 。

**答案**:(A)。

**[思路分析]** 本题不需要将行列式按定义展开。由行列式定义知,行列式的每一项是由取自不同行和不同列的元素之积构成,含$x^3$的项必须出现三个主对角线上的元素的积,因此第4个乘积因子也只能是剩余的主对角元,即$x^3$只能出现在4个主对角元乘积的表达式中。由 $(x-a_{11})(x-a_{22})(x-a_{33})(x-a_{44})$,可知,$x^3$的系数应是$-(a_{11}+a_{22}+a_{33}+a_{44})$。

**例 4** 若$f(x)=\begin{vmatrix} x-2 & x-1 & x-2 & x-3 \\ 2x-2 & 2x-1 & 2x-2 & 2x-3 \\ 3x-3 & 3x-2 & 4x-5 & 3x-5 \\ 4x & 4x-3 & 5x-7 & 4x-3 \end{vmatrix}$

则 方程$f(x)=0$的根的个数为(　　)。

(A) 1; (B) 2; (C) 3; (D)4 。

**答案**:(B)。

**[思路分析]** 四阶行列式,每个元素都有$x$,首先会想到$f(x)$是4次多项式。由于构成$x$四次幂的项不止一个,它们的和有可能是零,故应考虑将行列式进行化简。

由于原行列式第2,3,4行各元素中$x$前的系数均是第一行各元素中$x$系数的倍数,将第1行的$-i$倍加到第$i$行($i=2,3,4$),得

$$f(x)=\begin{vmatrix} x-2 & x-1 & x-2 & x-3 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & x+1 & 4 \\ 8 & 1 & x+1 & 9 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x-2 & x-1 & x-2 & x-3 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & x+1 & 4 \\ 5 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

由行列式定义(每行每列只取一个元素相乘得一项)可知,$f(x)$是一个二次多项式,故$f(x)=0$只有两个根。

**例 5** 行列式 $\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix}=(\quad)$。

(A) $a_1a_2a_3a_4-b_1b_2b_3b_4$;　　(B) $a_1a_2a_3a_4+b_1b_2b_3b_4$;

(C) $(a_1a_2-b_1b_2)(a_3a_4-b_3b_4)$;　　(D) $(a_1a_4-b_1b_4)(a_2a_3-b_2b_3)$。

**答案**:(D)。

**[思路分析]** 每行都只有两个非零元素,首先想到按行展开,比如说按第一行展开。

则 $$\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix}=a_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & 0 \\ b_3 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix}-b_1\begin{vmatrix} 0 & a_2 & b_2 \\ 0 & b_3 & a_3 \\ b_4 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=a_1a_4\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ b_3 & a_3 \end{vmatrix}-b_1b_4\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ b_3 & a_3 \end{vmatrix}=(a_1a_4-b_1b_4)(a_2a_3-b_2b_3)。$$

**另解** 本题也可考虑用定义做。因为每行每列只能取一个元素相乘得行列式的一项,考虑到行列式的零元素较多,故当取(1,1)位的元素$a_1$后,第四行只有(4,4)位的元素 $b_4$非零,因此2,3行有两种取法$a_2,a_3$或$b_2,b_3$。同理讨论第一行取(1,4)位的元素$b_1$的情况,并考虑各项的符号$(-1)^\tau$,即得

$$\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix}=a_1a_4a_2a_3-a_1a_4b_2b_3-b_1b_4a_2a_3+b_1b_4b_2b_3$$

$$=(a_1a_4-b_1b_4)(a_2a_3-b_2b_3)。$$

**例 6** 行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=$______

**答案**：$-3$。

**[思路分析]** 本题是简单行列式，直接利用行列式的性质及展开定理容易求出其值为$-3$。

**例 7** 设$|A|$是$m$阶行列式，$|B|$是$n$阶行列式，且 $|A|=a$，$|B|=b$，$C=\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}$，则$|C|=$______。

**答案**：$(-1)^{mn}ab$。

**[思路分析]** 易知行列式$\begin{vmatrix} A & O \\ O & B \end{vmatrix}=|A||B|$。可考虑将行列式$|C|=\begin{vmatrix} O & A \\ B & O \end{vmatrix}$通过行（或列）的交换化成$\begin{vmatrix} A & O \\ O & B \end{vmatrix}$的形式。若将$|C|$中$A$所在的每列与前$n$列逐次往前进行列交换，而$A$共有$m$列，故一共要进行$m\times n$次两列交换的运算，即可得到$\begin{vmatrix} A & O \\ O & B \end{vmatrix}$的形式。

按行列式交换两列其值变号的性质，得

$$|C|=\begin{vmatrix} O & A \\ B & O \end{vmatrix}=(-1)^{m\times n}\begin{vmatrix} A & O \\ O & B \end{vmatrix}=(-1)^{m\times n}|A||B|=(-1)^{mn}ab。$$

**例 8** 若齐次线性方程组 $\begin{cases} \lambda x_1+x_2+x_3=0 \\ x_1+\lambda x_2+x_3=0 \\ x_1+x_2+x_3=0 \end{cases}$

只有零解，则$\lambda$应满足条件______。

**答案**：$\lambda\neq 1$。

[思路分析] 3个方程3个变量的线性方程组，可由Cramer法则知，其只有零解（惟一解）的条件是系数行列式不等于零。

即

$$\begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=\lambda^2-2\lambda+1=(\lambda-1)^2\neq 0,$$

故$\lambda\neq 1$。

**例9** $n$阶行列式$D=\begin{vmatrix} a & b & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & b \\ b & & & a \end{vmatrix}=$________。

**答案**：$a^n+(-1)^{n+1}b^n$。

[思路分析] 第一列只有两个非零元素，按第一列展开。

$$D=a\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a & b & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & b \\ b & & & a \end{vmatrix}_{n-1}+b\cdot(-1)^{1+n}\begin{vmatrix} b & & & \\ a & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & a & b \end{vmatrix}_{n-1}$$

$=a^n+(-1)^{n+1}b^n$。

**另解** 本题行列式中零元素较多，可类似于例5的讨论用$n$阶行列式的定义来求其值。结果为$a^n+(-1)^{n+1}b^n$。

**例10** 5阶行列式

$$D_5=\begin{vmatrix} 1-a & a & & & \\ -1 & 1-a & a & & \\ & -1 & 1-a & a & \\ & & -1 & 1-a & a \\ & & & -1 & 1-a \end{vmatrix}=\_\_\_\_\_\_\_\_。$$

**答案**：$1-a+a^2-a^3+a^4-a^5$。

**[思路分析]** 第2,3,4行各行元素的和均为零，可考虑将$D_5$的各列全加到第一列上去，再按第一行展开。

$$D_5=\begin{vmatrix} 1 & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-a & a & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-a & a & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1-a & a \\ -a & 0 & 0 & -1 & 1-a \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 1-a & a & 0 & 0 \\ -1 & 1-a & a & a \\ 0 & -1 & 1-a & a \\ 0 & 0 & -1 & 1-a \end{vmatrix} -a\begin{vmatrix} 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1-a & a & 0 \\ 0 & -1 & 1-a & a \\ -a & 0 & -1 & 1-a \end{vmatrix}$$

右端第一个行列式是与$D_5$同型的4阶行列式，记为$D_4$，而第二个行列式的值容易看出为$a^4$，则有

$$D_5=D_4-a^5$$

这样就得到了递推公式，继续做下去，得

$$D_5=D_4-a^5=(D_3+a^4)-a^5=(D_2-a^3)+a^4-a^5$$

$$D_2=\begin{vmatrix} 1-a & a \\ -1 & 1-a \end{vmatrix}=1-a+a^2$$

$$D_5=1-a+a^2-a^3+a^4-a^5。$$

**例 11** $n$阶行列式$D=\begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix}=$______。

**答案**：$(-1)^{n-1}(n-1)$。

**[思路分析]** 每行元素之和均为$n-1$，可考虑将各列全加到第1列上去，把第1列的公因子$(n-1)$提出后将第一行的$(-1)$倍加到各行上去。

即得