華夏英才基金學術文庫

王 庚 编著

数学文化与数学教育

——数学文化报告集

科学出版社
www.sciencep.com

華夏英才基金學術文庫

数学文化与数学教育

——数学文化报告集

王 庚 编著

本书得到南京财经大学出版基金资助

科 学 出 版 社
北 京

内 容 简 介

“数学文化与数学教育”既涉及数学文化，如数学发展纵横谈、数学怪论、数学原子论——数与几何、微积分、橡皮膜上的几何学、古今数学之谜等，也涉及数学教育，如数学建模教学工程的理论与实践、关于大学数学教育的思考、高等数学的整体教学法、大学数学教学中数学建模的融入、大学数学素质教育的实施与开展、“怎样建模”表及其应用等。

本书选题精彩，组织得当，特别是选用了大量珍贵的图片资料，图文并茂，极具吸引力和可读性。本书另一特点是应用性强，信息量大，对于提高大学生和数学工作者的数学素质帮助极大，具有应用价值。这是一本适合当代大学生，尤其是数学专业大学生的好书，对于大、中学数学教师、广大数学爱好者也有很好的参考价值。

图书在版编目（CIP）数据

数学文化与数学教育：数学文化报告集/王庚编著．—北京：科学出版社，2004

（华夏英才基金学术文库）

ISBN 7-03-012076-0

Ⅰ．数…　Ⅱ．王…　Ⅲ．数学-文集　Ⅳ．01-53

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2003）第 078996 号

策划编辑：林　鹏　胡　凯/文案编辑：邱　璐　贾瑞娜/责任校对：朱光光

排版制作：科学出版社编务公司/责任印制：钱玉芬

封面设计：陈　敬

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

新蕾印刷厂 印刷

科学出版社发行　各地新华书店经销

*

2004年1月第 一 版　开本：B5（720×1000）

2004年1月第一次印刷　印张：15 3/4

印数：1-3 000　字数：300 000

定价：34.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换〈环伟〉）

前　言

收集在本书中的文章，是近十年来作者在高校或国内外会议上所作的学术讲座和报告，它们记录了作者的学术心得和思路。作者是一名数学教师，爱读各种类型的数学方面的文献，深受张奠宙教授、齐民友教授、胡炳生教授等学者的数学文化观念的影响，于是作者不把自己围在纯数学的圈子里，虽专长于几何，但兴趣十分广泛。先是对数理逻辑、数学哲学感兴趣，后对数学发展史、数学美学产生了浓厚的感情，近几年又钟情于数学建模、数学应用、数学软件、数学机械化及分形。作者注意到当代教育(包括数学教育)有培养“半个人”的倾向，如培养只懂科学、不懂人文，只懂理论、不懂应用的毕业生，为了培养“全人”，本书中的23个报告是对数学与人文的融合的多层面的探讨，并通过数学文化范畴，用讲座和报告这种亲和的形式来对此做出自己的努力。

数学文化与数学教育的关系是密切的：首先，数学作为一种文化在很大程度上影响数学教育；其次，数学教育应该是数学文化的教育，数学课程以及大、中学的数学教育的主体内容应包括各数学文化群体中那些共同的价值观念、数学知识、数学思想方法。因此在数学教育中如何呈现数学文化、使其反映文化的传递功能是十分重要的问题。

数学文化是人类文化的重要组成部分。但是长期以来数学成了一种看不见的文化却是众所周知的。课程标准规定的大、中学数学课程中不见数学文化的踪影，却成了题海的战场和应试教育的工具。事实上它们理应介绍数学发展的历史、应用和趋势，注意体现数学的社会需要、数学家的创新精神、数学科学的思想体系、数学的美学价值，以帮助学生了解数学在人类文明发展中的作用，逐步形成正确的数学观，并使之成为正确世界观的组成部分。

解决的办法之一是在数学教师和第二课堂中以学术报告和公开讲座的形式来探讨和传播数学文化，本书就是这样一种尝试。

本书共23个学术报告，均为作者近年来在不同场合所作的公开讲座、学术报告。它们涉及数学与哲学，数学与文化，数学与艺术，数学与科学精神，数学与应用，数学与计算机，数学与直觉(各种几何)，数学与教育，数学与近代中国、数学问题、数学建模、数学软件等的关系，从全新的视角诠释了数学文化。

本书的出版一直是作者的心愿。这次的出版，作者衷心感谢华夏英才基金和南京财经大学出版基金的支持。由于这种尝试涉及内容多、范围广，不当之处还请读者批评指正。

王　庚

2003.6 于南京

目　　录

1　数学发展纵横谈

今天的整个数学领域看起来就像一片庞大的建筑群，其中每一幢建筑就是一部生动的历史教科书。这些古老而又在不断扩建的数学建筑业已成为了一块碑石，它记载着时代的兴衰、尘世的沧桑、社会的嬗变。只要它还矗立着，那些愉快的、甜蜜的、辛酸的、苦涩的乃至于充满血腥气的往事，都会不时在我们的脑海里泛起。

古希腊时期毕达哥拉斯的门徒希伯斯因发现了无理数并公开了这一发现而被该派处以死刑扔进了大海；数学史上第一位女数学家希伯蒂娅(曾在古希腊博学园教授过数学与哲学、测量过金字塔高度)因继续去研究院教课，传播她的数学思想而遭一群暴徒袭击，被砍去手脚投入火中烧死；人们自然也不会忘记从欧几里得年代到 19 世纪末的两千多年中，许许多多的数学家试证欧几里得第五公设，所走过的漫长而又艰苦的岁月，尤其是匈牙利的数学家俄·波尔约与约·波尔约父子两代人的艰辛努力。数学问题是数学的心脏，我们自然联想起数学家们是如何攻克古代几何三大难题、四色问题、哥尼斯堡七桥问题、哥德巴赫猜想、费马大定理和希尔伯特 23 个问题等，以及它们曾给数学带来的生机；数学史里的矛盾斗争也是很激烈的，它们常以一种“怪论”形式出现，曾导致过 3 次数学危机。在数学发展的历史长河里，有种种传奇，出现过许多次的大争论，发生过多桩冤假错案以及数学灾难。我们永远记得那些天才的数学家像高斯、阿贝尔、伽罗瓦、冯·诺伊曼、拉马努金、闵可夫斯基等的故事；那些多才多艺的人像达·芬奇、牛顿、高斯、欧拉、希尔伯特、庞加莱、外尔等的故事；那些各具特色的数学门派、数学家族，等等。它们在我们的脑海里翻腾起伏，不断地给我们以启迪和反思。

今天的数学是千百年来众多的先辈们艰苦卓绝奋斗的心、灵、血、汗、泪结晶积累而成的，它已成为拥有几百个分支的大学科。我们在中小学学习过算术、代数、平面几何、立体几何、解析几何、三角学，在大学里正学习着微积分、线性代数、空间解析几何、概率论、高等几何、复变函数等专门的数学课程。但又有谁能说清楚数学是什么？数学家是干什么的？

数学是什么？就像“盲人摸象”那个寓言所描述的，一个盲人摸着象的大腿说：“它像一个柱子”，另一个盲人摸着象的鼻子报告说：“它像一条蛇”，第三个盲人摸着一只象耳朵说：“它像一把扇子”。人们可根据自己对数学的理解做出不同的回答，其实在历史上许多数学家与哲学家对这一问题的看法也莫衷一是：

1）德国数学家弗立克斯·克莱因认为数学是自明之物的科学。

2）法国数学家拜节门·庞斯称数学为得出必然结论的科学。

3）英国数学家怀特海称数学为对于“一切类型的形式的、必然和演绎的推理”的研究。

4）古希腊亚里士多德则认为数学是对“量”的研究。

5）法国数学家笛卡儿又称数学是“序和度量”的科学。

6）英国培根称数学为一种使人“机敏精细”的学问。

7）德国大卫·希尔伯特称数学为“无实在含义的形式游戏”。

8）法国的布尔巴基们回答说：“数学，至少纯数学，就是研究各种结构的一门学问。”

贝特兰·罗素

9）英国的贝特兰·罗素称数学为“恒同于逻辑”的学科。关于数学他还说过一句意义玄妙的俏皮话：“数学这门科学是既不知道它说些什么，也不知道它所说的是否正确的一门学问。”

10）我们印象较深的是恩格斯曾说的“数学乃是关于物质世界的空间形式及其数量关系的科学”。

11）关于“数学是什么?”的最直截了当和自然的回答是：它是研究思想事物的。它不是铅笔和粉笔写下的符号，也不是物质的形状之集，而是思想之集合。

12）伽利略的名言：“数学是上帝用来书写宇宙的文字。”

以上这些各抒己见的高谈阔论，都很重要，但又都不全面。事实上，不论是对专家来说，还是对普通人来说，惟一正确全面的回答，不是哲学的几句高深玄妙的言论，而应该是数学发现本身中那些活生生的经验(即数学史)。就这一点来说，相比之下，下列的说法较为客观。

13）前苏联数学家柯尔莫哥洛夫就区分数学对象发展的几个阶段时指出：“①数学是作为关于数、量、几何图形的科学；②数学是作为关于量的变化及几何的映像的科学；③数学是作为关于现实世界一切普遍性、抽象化的数量形式及其空间形式的科学。”

柯尔莫哥洛夫

其实数学是人类活动的结果，具有明显的社会性，因此只有真正了解数学的历史的人才能对这一问题有较全面的认识。平常的一些数学课程使人产生了这样一种感觉：似乎数学家们几乎可以理所当然地从定理到定理，从概念到概念，从一般到抽象、从抽象到更抽象；在深奥的数学抽象王国里，数学家们都是天才、超天才，他们能克服任何困难，能轻松的巧架辅助线，巧设辅助函数，任何难题他们

都所向披靡，学生们被湮没在成串的定理、各种冗繁的计算之中，只能感叹数学太难了。培根说："读史使人明智"，数学发展史即数学史将告诉我们：数学家也是普通的人，不是神，他们中有男人、有女人，有十几二十岁的年轻小伙子、又有年过花甲的老人，有反应敏捷的、有反应迟钝的，有专业的、更有业余的，有普通的老百姓、有律师、有军人、有主教大人、有画家、有文学家、有皇帝、有工程师，等等，各行各业可谓三教九流。他们也曾经历过漫长艰苦的道路，也曾遇到过挫折、斗争，也跌过跤，也曾在迷雾中摸索前进，他们有伟大的一面，也有渺小的一面。数学史还将告诉我们：认真探索先人的数学创造的思想、数学发现的能力往往比仅仅掌握积累数学教科书上的知识更为重要。

数学史是研究数学发展进程和规律的学科，故此它对于了解课堂教学内容的历史背景，提高教与学的兴趣；对于培养一个未来合格的数学应用工作者；对于指导数学的进展和预见数学的未来，都有十分重要的意义。

其实任何一种事物都有其自身发展的规律性，有些事物从外表上看起来似乎杂乱无章，但实际上都是按照某种规律发展着的，数学也不例外，它也有自身的发展规律。

数学史主要研究数学规律的发展。包括研究方法、历史背景、学术交流、哲学对数学发展的影响、数学与实践的关系，等等。因此从认识上看：数学是第一个层次、数学史是第二个层次，显然后者是以前者为基础的，所以数学史的对象是历代的数学成果和影响数学发展的各种因素。

数学史已成为一门学科，它一般分为中国数学史和外国数学史。由于它的重要性，早在19世纪，西方有些国家的大学就开设了数学史课程，目前在这些国家开设数学史课的大学极为普遍，美国有的大学还设置了数学史系。20世纪50年代，我国也曾计划把数学史列为高等师范院校的选修课，但由于师资和教材的原因，这个计划并没有得到实施。近年来，数学素质教育受到人们的关注，情况有了很大好转，开设数学史课的大学逐年增加，关于数学史的研究也有增多。

数学史的内容庞大、繁杂，为使大家能窥视其中一斑，下面谈谈数学发展史的几个规律。

一、数学发展的四部曲

数学这部交响乐由四个乐章组成，它们是精确数学、随机数学、模糊数学、突变数学。可以说数学思想方法的发展经历了这么几个阶段。

它们的产生发展来源于生产实际，大千世界、自然现象形形色色、纷繁复杂，如果按质分类，大体可归四大类：必然现象、或然现象、模糊现象和突变现象。

(一) 必然现象与必然数学(精确数学或经典数学)

必然现象的例子非常多，如金属加热会膨胀、冷却会收缩；异性电荷互相吸引、同性电荷互相排斥；氢在氧气中燃烧生成水。

具体的例子：熊熊炉火，锤炼着一把刀具。当把刀具拿回实验室时，它的温度为150℃，10分钟后则为100℃。那么，20分钟后刀具的温度应为多少呢？(设实验室空气的温度为24℃)显然这个温度是惟一确定的。总之，必然现象是指如果事物变化服从确定的因果关系，由前一时刻的运动状态可推知后一时刻的运动状态。

为描述和研究现实世界的必然现象及其规律，就产生了必然数学。它包括算术、三角、几何、代数、微积分、微分方程论、积分方程论和函数论等分支学科。

例如上述的具体例子，建立的数学模型是微分方程$\frac{du}{dt}=-k(u-u_\alpha)$，其中$u$为刀具在$t$时的温度，$k>0$为一常数，$u_\alpha$为室温。解此微分方程可算得20分钟后刀具的温度是64℃。

精确数学最成功的例子，便是根据万有引力定律推算出行星环绕太阳运行的轨迹，甚至还预测到海王星和冥王星。在数学史上，这一杰出成就，曾一度使人们认为一切自然现象都可以用精确数学来描述。

实际上在第一乐章里数学思想曾经历过两次重大转折。

1. 从算术到代数

这一重大转折主要表现为算术解题法到代数解题法的演进。

算术解题法

这是我们小学数学的内容，它的特点是只限于对具体的、已知的数进行运算，不允许有抽象的未知数参加。

它的解题步骤为：①依据问题的条件列出关于具体的已知数的算式；②通过四则运算求出算式的结果。

它的困难是：在对于那些具有复杂数量关系的应用题第①步难办到。于是产生了：

代数解题法

这是我们小学高年级和初中数学的内容，其特点为：未知数与已知数有着同等的权利(即可以移项、+、−、×、÷等)，而方程只是一种条件等式。

其步骤为：列方程、解方程；而解方程的过程是未知数和已知数进行重新组

合的过程，即未知数向已知数转化的过程。

总之，算术与代数作为最基础而又最古老的两个分支学科，有着不可分割的亲缘关系，算术是代数产生的基础、代数是算术发展到一定阶段的必然产物。

方程在数学中占有重要的地位，代数解题法对后来整个数学的进程产生了巨大的影响，其中最典型的应首推常量数学的形成。常量数学是以常量即不变的数量和固定的图形为其研究对象，主要内容是初等数学包括算术、初等代数、初等几何、三角。

2. 从常量数学到变量数学

运用常量数学可以有效地描述事物和现象相对稳定的状态。但对于描述运动和变化，却是无能为力的。

16、17 世纪自然科学提出了大量数学问题，大体可分为以下 5 种类型：

1）非匀速运动物体的轨迹(天文学)；

2）求变速运动物体的速度或路程(物理学)；

3）求曲线在任一点的切线(光学、力学)；

4）求变量的极值(力学、天文学)；

5）计算曲线长度、曲边形面积、曲面体体积、物体的重心、变密度物体的重心以及大质量物体之间的引力等。

这些问题一个共同的特征就是要以“变量”作为其研究对象，于是便产生了从量上描述事物的运动和变化规律的数学部分——变量数学。

变量数学产生于 17 世纪，大体上经历了两个具有决定性的重大步骤：第一步：解析几何的产生；第二步：微积分的创立。

变量数学的产生，使数学自身在思想方法上发生了重大的变革。新的数学分支学科如雨后春笋般地涌现出来，诸如：解析数论、微分几何、常微分方程论、偏微分方程论、积分方程论、级数论、差分学、实变函数论和复变函数论等变量数学成为了一个庞大的家族。而常量数学和变量数学统称为精确(必然、经典)数学。

(二) 或然现象与随机数学

或然现象(偶然现象、随机现象)比如：夏日的夜晚，星空灿烂。当你仰望苍穹，欣赏这自然美景的时候，有时会发现突然一道亮光划破夜空，这是流星闪现，但是究竟在何时能够观察到流星的出现？当你迎着朝阳，走在上课路上，沿途就会碰到人，究竟多少人？他们是谁？

据报道：美国北卡罗来纳州的威尔明市，1982 年 7 月 4 日有一名叫拉夫尔·

伯特伦·威廉斯四世的婴儿在新汉诺佛纪念医院降生；巧合的是，他的父亲是1950年7月4日诞生的；他的祖父也是1920年7月4日出生，而他的曾祖父同样也是7月4日出世的，而那天又正好是美国独立一百周年纪念日——1876年7月4日，这可谓惊人的巧合。

三百多年前，一些赌徒问著名的科学家伽利略：一次掷三粒骰子并计算总点数，为什么总和为10的情况比出现总和为9的情况要多呢?

1654年，一个赌徒问数学家帕斯卡：把两粒骰子投掷24次，出现两个6的情况有多少?

平日里摸牌、抓阄、有奖储蓄、买彩票、打麻将、投骰子等等都与随机现象密切相关。

总之，随机现象是指事物的变化发展不受单值的确定的因果关系的制约，而是具有几种不同的可能性，究竟何种结果，有随机性、偶然性。

水分子的运动是无规则运动，完全是随机的。但我们知道：水在1个大气压下，加热到100℃，就要化为水蒸气。

婴儿诞生，可能是男孩，也可能是女孩；但就全世界来说每天诞生的男女孩总数几乎是相等的；根据数学家拉普拉斯的统计：一个婴儿是女孩的可能性是22/43。上面提到的美国惊人巧合之事，曾引起了北卡罗来纳大学一位数学家的兴趣，他专门为此进行了计算，最后得出结论：同一家族的四代人在同一日期出生的现象，约117亿人中才有一例。对于“巧合之谜”，《科学美国人》杂志的数学专栏编辑马丁·加德纳认为，每天在几十亿人身上发生几千万桩大大小小的事件。因此，时而出现一些令人惊诧的凑巧事件是不可避免的。巧合只不过是“大数规律”在起作用。

由此可见，在纷乱的大量偶然现象背后，往往隐藏着必然的规律。一位研究学者认为，这种不可思议的巧合现象表明，概率论能够以不可思议的精确性来预料出大量个别事件的总结果，而单靠一件件个别事件却是无法预示出总结果的。换言之，我们面临着许多许多产生确定性结果的非确定性事件。

探索这些规律，利用这些规律来为人类服务，正是随机数学的任务。随机数学主要包括概率论、随机过程理论、数理统计学。

另外，或然数学与必然数学、自然科学和社会科学相互作用产生出许多新的学科。如平稳随机过程论、马尔科夫过程论、随机微分方程论、多元统计分析、试验分析、统计物理学、统计生物学、统计医学和概率逻辑等。

（三）模糊现象与模糊数学

模糊现象又称为不分明现象。比如：父母双亲的基因遗传使子女保留了双亲

的共同特征，然而子女并不完全像他们的父母；一棵枝叶茂密的参天大树，尽管它的叶子有着共同的特征，可是其中绝无两片完全一模一样的树叶；同样的一个字，由不同的人写出来，或者由同一个人写上千百次，它们都不会绝对相同；同一批出厂的合格产品，看上去是一个模样，可仔细考察起来竟然千差万别；电视图像清晰还是不清晰，不存在什么严格的界限；天气预报时，在晴天与多云之间不存在明确的界限；人类思维中，“红色”与“蓝色”、“暖和”与“较冷”、“很高”与“很矮”、“浓和淡”、“明与暗”、“胖与瘦”、“老年与年轻”、“美与丑”等也是如此。

L. A. 查德

总之，模糊现象是指客观事物界限不分明的量和性质，这时要处理模糊量及其关系变化规律。明晰数学(必然数学与或然数学)就不适用了，1965 年，美国加利福尼亚大学自动控制专家 L. A. 查德(L. A. Zadeh)第一次提出了“模糊集合”的概念，从而为模糊数学的诞生奠定了基础，模糊数学便由此产生了。三十多年来，模糊数学理论上正在不断完善，应用也日益广泛。

模糊数学找到了一个切实可行的方法。即用数量表示一个事物属于某个模糊概念的程度，即隶属度，以此说明该事物能否包括在那个模糊概念的论域之中。

例如，以年龄为论域，取 $U=[0,100]$。查德曾给出“年老”$\underset{\sim}{Q}$与“年轻”$\underset{\sim}{y}$两个模糊子集的隶属函数如下

$$U_{\underset{\sim}{Q}}(x)=\begin{cases}0, & 0\leqslant x\leqslant 50\\ \left(1+\left(\dfrac{x-50}{5}\right)^{-2}\right)^{-1}, & 50\leqslant x\leqslant 100\end{cases}\qquad\text{(如图 1.1)}$$

$$U_{\underset{\sim}{y}}(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x\leqslant 25\\ \left(1+\left(\dfrac{x-25}{5}\right)^{2}\right)^{-1}, & 25\leqslant x\leqslant 100\end{cases}\qquad\text{(如图 1.2)}$$

从图中可以看出，凡小于 25 岁和大于 75 岁，都分别明晰地属于“年轻”和“年老”，而大于 25 岁小于 75 岁之间的人都处于“年轻”到“年老”的中间过渡状态。

如把 55 岁、60 岁、65 岁分别代入 $U_{\underset{\sim}{Q}}(x)$分别得：0.5、0.8、0.9，这说明 55 岁、60 岁、65 岁的人属于“年老”范畴的程度分别为：0.5、0.8、0.9，而 70 岁则达 0.97 以上了。

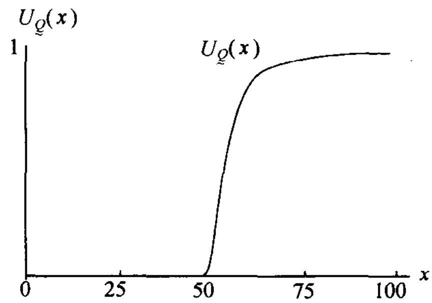

图 1.1

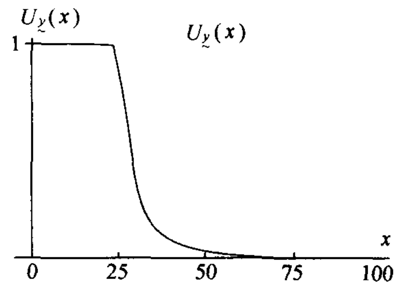

图 1.2

模糊数学在发展过程中，不断提出了新的应用研究课题，如模糊信息、模糊控制、模糊规划与决策、模糊语言、模糊逻辑等。如今，模糊数学已经越来越广泛地应用到自然科学乃至社会科学的各个领域，如模糊技术可将红绿灯改造得更灵活、模糊智能家电(模糊控制的洗衣机、以模糊规则为基础的照相机、模糊感应的空调等)使生活更方便、航空航天中的火星探测器离不开模糊技术、在机器人足球赛中模糊数学更是大展身手等等。查德指出模糊数学在未来最重要的应用领域，应该是计算机模拟识别和人工智能方面。

记得周恩来年轻时曾写过一首诗《雨中岚山——日本京都》“人间的万象真理，愈求愈模糊；模糊中偶然见着一点光明，真愈觉姣妍”。

(四) 突变现象与突变理论(也称灾变数学)

突变现象比如：1959 年，美国的一架 F-111 飞机在俯冲拉起时，由于飞机的左翼突然脱落，造成机毁人亡；

水的温度不断升高，水的密度便缓慢地变小，当水温达到 100℃ 时，水的密度突然小到蒸汽出现的程度；

两块乌云的电荷不断累积，当到了一定的数量界限时便击穿空气，于是电闪雷鸣发生了；

地应力不断增加，当它达到了一定的程度时，就会突然地动山摇，地震爆发了。

这些现象的研究不论是明晰数学还是模糊数学都不适用了。法国数学家伦尼·托姆(Rene Thom, 1923～　)在这一方面做了开创性的工作。1968 年，托姆发表了他的第一篇论文，1972 年，他出版了《结构稳定性和形态发生学》一书，系统阐述了突变论。托姆经过数学推导证明：渐变的控制因素(控制空间)产生的突变行为(行为空间)，在控制时间不超过四维的情况下，自然界的各种突变可以

结为七种基本突变模式，即折叠型、尖点型、燕尾型、蝴蝶型、双曲型、椭圆型、抛物型。

伦尼·托姆

托姆的这一重大发现立即轰动了数学界，有人把这个理论捧上了天，说它可以和牛顿的《自然哲学的数学原理》相媲美，因为牛顿的理论解释了所有连续的、渐变的现象，而托姆的突变理论解释了所有的不连续的、突变的现象。有人甚至赞誉它为“数学界的一次智力革命——微积分以后最重要的发现”。

突变以奇点理论为其数学基础，运用拓扑学、结构稳定性等数学工具，以形象而生动的模型来把握事物的量质互变过程。

精确数学—随机数学—模糊数学—突变理论(每部分又分为连续与离散的方面)，就是迄今为止的数学发展史。从横的方面看：精确数学主要应用在自然科学领域；随机数学开始向社会科学渗透；而模糊数学则将成为思维科学中的数学工具；突变理论则向各个领域渗透(如经济、胚胎学)。这样纵横捭阖，合奏出一首壮美的大型现代立体声交响乐。

二、数学发展历史的分期(在时间方面)

整个数学发展史可简单分为三个时期，即古代数学时期(原始人时代到17世纪初)(主要成果为常量数学、初等数学)、近代数学时期(17世纪到19世纪上半叶)(主要成果为变量数学大部分)、现代数学时期(19世纪至今)，这种分期与总论中柯尔莫哥洛夫的数学定义是一致的。

这种分期就好像研究“飞”：第一阶段，研究飞鸟的几张相片；第二阶段，研究飞鸟的一部电影；第三阶段，研究飞鸟、飞机、飞船等的一般性质。

这里再介绍一种更细致的数学史分期。

分期的原则：①数学知识的性质和结构；②数学的社会功能和社会地位。

数学史分期与特点：

1）萌芽时期，大约在公元前五六世纪以前。

这个时期算术、几何开始逐渐形成，特点是有简单的推理。

2）初等数学时期，大约是公元前5世纪到公元17世纪中叶，前后延续了两千多年。

这个时期算术、代数、几何、三角等都成为比较独立的学科，以几何逻辑为其突出特色。另外素数理论、弓形面积计算公式、二项式定理、对数、十进对数、无理数、复数等已出现。

3）变量数学时期，大约是17世纪中叶到19世纪20年代。其特点与前面

“常量数学到变量数学” 一致。

4）近代数学时期，（19 世纪 20 年代——二次世界大战）

这一时期的特点：

①几何的质变：欧氏几何到非欧几何，现实空间到抽象空间。

②代数的质变：群、环、域等代数系统结构的研究，标志是伽罗瓦群论。

③分析基础的形成：极限的精确化，康托尔的集合论等。

5）现代数学时期(20 世纪 40 年代以来)

这一时期的特点：

①纯粹数学方面出现了一些重大突破，如连续统假设，大基数问题，广义函数论，数理逻辑中的“力迫法”、“模型论”、纤维丛理论，数论中用李群的无限维表示法。

②应用数学分支的大量涌现和发展，如计算数学、对策论、控制论、生物数学、数学金融学、数理经济学等。

③系统科学的出现。

④各种新思潮的出现，如非标准分析、模糊数学、突变理论、结构数学、构造数学、分形几何、混沌学等等。

⑤计算机科学和人工智能(如智能算法等)的发展。

⑥证明的机械化。

总之，从时间上来看，数学史是一个由简单到复杂、由低级向高级、由特殊到一般的过程。

三、数学是矛盾斗争的历史(在哲学方面)

从哲学上看，数学是现实世界量的侧面在人们头脑中的反映，因为现实世界是充满着矛盾的，所以数学也必然充满了矛盾。正像恩格斯所指出的，不仅高等数学充满着矛盾，“连初等数学也充满着矛盾”。

比如：正与负、直与曲、平行与相交、已知与未知、常量与变量、有限与无限、连续与不连续、精确与近似、必然与或然、加法与减法、乘法与除法、乘方与开方、微分与积分、几何变换及其逆变换、数学算子与逆算子、实在的与虚构理性的，等等。当然在整个数学发展过程中还有许多深刻的矛盾。例如：有穷与无穷、连续与离散，乃至存在与构造、逻辑与直观、具体对象与抽象对象、概念与计算，等等。它们可以说贯穿整个数学发展史，而这些大大小小的矛盾的产生，发展到激化，到解决，总是不断为数学产生新的概念、新的方法、新的理论，也可能产生新的危机。

上述提到的深刻的矛盾曾激化到涉及当时的整个数学基础，曾产生了数学史

上的三次大的危机。(第2讲中介绍)

危机实际上是一种激化的、非解决不可的矛盾，而这些矛盾的消除，危机的解决，往往给数学带来新的内容、新的进展，甚至引起革命性的变革，这也反映出矛盾斗争是事物发展的历史动力的基本原理。

四、数学的比喻

法国的布尔巴基们曾给数学打过一个比喻："数学好像一座大城市，它的郊区在周围的土地上不停地有点杂乱无章地向外扩展。同时市中心隔一段时期就进行重建。每一次重建设计更加明确、布局更加雄伟，总是以老住宅区和它们迷宫式的小街道为基础，通过更直、更宽、更舒适的林荫大路道通往四面八方。"

也有人把数学看做由以纯粹数学为核心的许多同心层组成。在这个核心内可辨认的分支学科已将近一百种。再加上外层的纯粹数学与应用数学混合扩散界面上的应用数学，如统计数学、计算数学、运筹学和理论物理等，则其分科的数目不下几百个。

前些年有人常用一棵大橡树来形象地描绘数学。但是今天的数学用橡树式的数学树是不能真实地反映其全貌的，数学工作者们提出另一种理想的树——印度榕树，并用它来做这种描绘，这种树有许多树干，并不断生长出新的树干，树干上的分枝生长伸开垂向地面，植入地面后又长出新根，其后的几年更加粗壮，分枝本身也成为长满了分枝的树干，每一个树干再垂下分枝植入地面。一方面在地面上新枝往上长并向各个方向交叉，长出了犬牙交错的几百个形形色色的分枝和奇花异果，另一方面在地面下各种新旧根往下生长，盘根错节牢牢地扎根于大地。

我国著名数学家齐民友在1958年所写的《竹子的哲学》一文中认为数学的生长像竹子，根在大地，然后自己一节一节向上长，间或爆出新笋，长成新竹。若干年之后，竹子开花，结成种子，重回大地。这一比喻，何等贴切。

今天的基础数学像：初等数学(算术、初等代数、初等几何、三角学)、集合论、实数理论、几何基础等，都是古典数学、近代数学、现代数学的根，而老三高(高等几何、微积分、线性代数)以及新三高(泛函分析、抽象代数、拓扑学)、数理逻辑学等，都是古今数学的树干，而数论、李代数、环代数、格论、范畴与函子论、实分析、巴拿赫理论、复分析、单(多)复变函数、亚纯函数论、代数几何、微分几何(局部、整体)、微分拓扑学、代数拓扑学、黎曼几何学、Mose理论，对策论、优选法、统筹法、计算机算法语言、生物数学、数学教育学、数学心理学、数学哲学、数学美学等，都是古今数学的枝叶。除了这些枝枝叶叶外还有一些奇花异果，如模糊数学、非标准分析、突变理论以及它们的应用，老三论(耗