几何系列题研究及证法

栗竹林 编著

东北工学院出版社

几何系列题研究及证法

栗竹林　编著

东 北 工 学 院 出 版 社

几何系列题研究及证法
栗竹林 编著

东北工学院出版社出版 辽宁省新华书店发行
（沈阳·南湖） 沈阳新华印刷厂印刷

开本：787×1092 1/32 印张：6 字数：134千字
1988年5月第1版 1988年5月第1次印刷
印数：1—13000册

责任编辑：王金邦 封面设计：土 木
责任校对：涂宜军

ISBN 7-81006-051-1/G·6

定价：1.26 元

内容简介

本书是根据中学数学教学大纲的要求而编写的。书中把平面几何的基本问题分为十个系列，十七个专题。选题新颖、生动且富有趣味性。对系列题的分析与研究，有助于激发学生的学习兴趣及想象力，更能培养学生的逻辑推理与创造性思维的能力。本书可供中学教师在教学中参考。

前　言

这本小册子是笔者教学实践的总结。对于高度抽象的数学问题，特别是平面几何，在教与学的过程中更需要教师的正确引导，这种引导对解决好教与学的矛盾起着决定性的作用。

学好平面几何学不但能增强学生的逻辑推理能力和想象力，还能为后续课打下坚实的基础。经验证明：在教学中，通过系列题的分析与研究，有助于激发学生的学习兴趣和上述能力的培养。

本书是以研究题型演变为主的。书中的每道题一般只给出了一种解法，笔者的用意是想"突出重点"。事实上，浩瀚的题海中存在着许多规律，这种规律有待于人们去探求、开发和整理。细品起来，本书所涉及的问题是微不足道的，如果读者能够在本书中得到一点启发，做为编者将得到极大的安慰。

本书共分十个系列，十七个专题，较全面而又重点地论述了平面几何中的几个基本的问题。在写法上力求简练易懂；在选题上力求新颖生动，并尽量使启发性与趣味性并存。

本书由徐万恕同志主审，在编写过程中还得到侯华祥、张嘉玺和张丽艳同志的指导，在此一并表示感谢。

限于水平，不足之处再所难免，恳请读者批评指正。

编　者

1987年10月1日　沈阳

求解几何问题的一般步骤

1．正确理解题意。据题画图时，如非指明为特殊图形，都要画成具有一般性的，以免在求解时误入歧途。

2．弄清问题的已知条件和结论，以及已知数量之间或已知图形之间的相互关系。

3．联想与问题有关的知识、原理，包括概念、公理、定理、公式和法则。

4．寻求解题思路，分析并找出解决问题的关键和可能突破问题的方法。

5．书写解答过程应简明扼要，步距大小要适当，不要遗漏必要的步骤。

6．最后应该验证答案的正确性。

目 录

一　角、平行线、角平分线

问题一

1．已知：如图（1），$\angle AOB$是锐角，OC平分$\angle AOD$，OD平分$\angle BOC$．

求证：$\angle 1=\angle 2$．

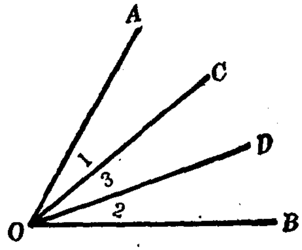
证明：$\because OC$平分$\angle AOD$，

$\therefore \angle 1=\angle 3$．

而OD平分$\angle BOC$，

$\therefore \angle 2=\angle 3$，

故$\angle 1=\angle 2$．



图（1）

如果把题中的锐角改成钝角，其它条件不变，则显然仍有上述结论。现在，对上题进行如下变形：

2．已知：如图（2），$\angle BOC$是钝角，$\angle AOB$是直角，$\angle AOC$是锐角，ON平分$\angle AOC$，OM平分$\angle BOC$．

求：$\angle MON$的度数．

解：由图（2）知：

$\angle MON=\angle MOC-\angle 2$，

$\because OM$平分$\angle BOC$，

$\therefore \angle BOM=\angle MOC$，

即$\angle MON=\angle BOM-\angle 2$．

又ON平分$\angle AOC$，

$\therefore \angle 1=\angle 2$，

即$\angle MON$

$=\angle BOM-\angle 1$。

又$\because \angle BOM$

$=90^\circ-\angle 3$，

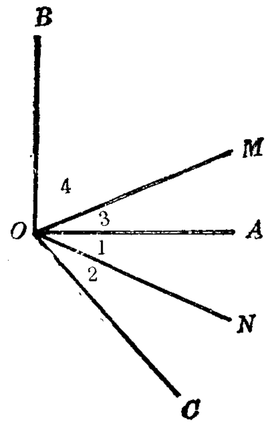
$\therefore \angle MON=90^\circ-(\angle 3+\angle 1)$

而$\angle 3+\angle 1=\angle MON$，

$\therefore \angle MON=90^\circ-\angle MON$，

即$2\angle MON=90^\circ$，

故$\angle MON=45^\circ$。



图（2）

3．已知：在图（2）中，$\angle AOB$是直角，$\angle AOC$ 是锐角，OM 平分$\angle BOC$，如果$\angle MON=45^\circ$，

求证：ON平分$\angle AOC$。

证明：$\because OM$平分$\angle BOC$，

$\therefore \angle BOM=\angle MOC$。

又$\angle MON=45^\circ$，

故$\angle 2=\angle MOC-45^\circ$

$=\angle BOM-45^\circ$。

$\because \angle BOM=90^\circ-\angle 3$，

故$\angle 2=90^\circ-\angle 3-45^\circ$，

$\therefore \angle 2+\angle 3=45^\circ$。

又$\angle 1+\angle 3=45^\circ$，

$\therefore \angle 1=\angle 2$，

故ON平分$\angle AOC$。

前面三道题是由锐角过渡到直角和钝角，下面我们进一

步把直角和钝角扩充到平角。

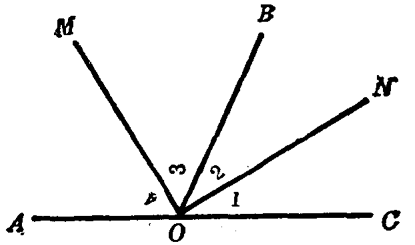
4．已知：如图（3），AOC 成一直线，且 OM 平分 $\angle AOB$，ON平分$\angle BOC$。

求证：$OM \perp ON$。

证明：$\because AOC$成一直线，

OM平分$\angle AOB$，

ON平分$\angle BOC$，



图（3）

$\therefore \angle 3 = \angle 4$、$\angle 2 = \angle 1$。

$\because 2\angle 3 + 2\angle 2 = 180°$，

$\therefore \angle 3 + \angle 2 = 90°$，

故$OM \perp ON$。

可以想象，无论图（3）中以O为端点的射线 OB 怎样变化，则其结论 $OM \perp ON$ 永远成立。如果把 4 题的题设"AOC成一直线"和结论"$OM \perp ON$"互换，则新的问题是否成立呢？

5．已知：如图（3），邻角$\angle AOB$、$\angle BOC$ 的平分线分别为OM、ON，且$OM \perp ON$。

求证：OA、OC成一直线。

证明：

$\because OM \perp ON$,

$\therefore \angle 2+\angle 3=90^{\circ}$.

$\because \angle AOB$、$\angle BOC$的平分线为OM、ON,

$\therefore \angle 3=\angle 4$, $\angle 2=\angle 1$,

即$\angle 1+\angle 4=90^{\circ}$.

从而得:

$\angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 4=180^{\circ}$.

故AO、OC成一直线.

6. 已知:如图(4),直线AB、CD相交于O,OD平分$\angle AOF$,且$OE \perp CD$,$\angle 1=40^{\circ}$.

求:$\angle BOF$的度数.

解:

$\because OE \perp CD$,

$\therefore \angle 5=\angle 1+\angle 2=90^{\circ}$.

又$\because \angle 1=40^{\circ}$,

$\therefore \angle 2=\angle 4=50^{\circ}$.

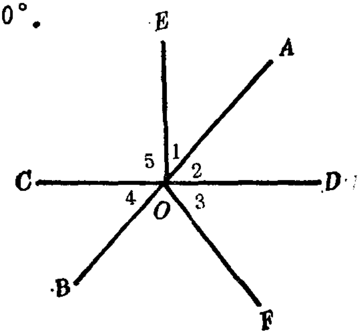
又$\because OD$平分$\angle AOF$,

$\therefore \angle 2=\angle 3=50^{\circ}$

$\therefore \angle BOF=180^{\circ}-\angle 2-\angle 3$

$=180^{\circ}-50^{\circ}-50^{\circ}$

$=80^{\circ}$



图(4)

7. 此题是在第6题的基础上的进一步变形.

已知:如图(5),AB、CD 相交于 O,$OE \perp CD$、$OF \perp AB$.

求证:$\angle AOE=\angle DOF$.

证明:

$\because OE \perp CD$,

$\therefore \angle EOD = 90°$。

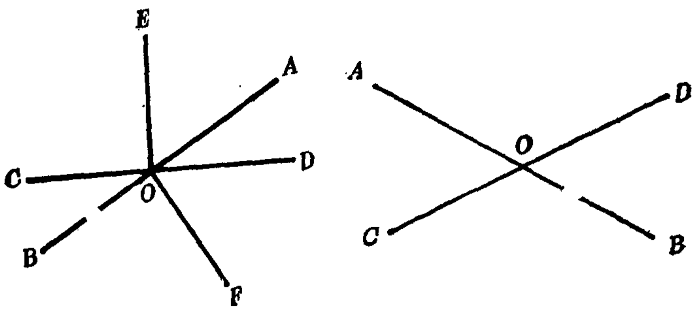
又$OF \perp AB$，

$\therefore \angle AOF = 90°$，

则$\angle AOE = \angle DOF$。

下面是一组题型：

8．已知：如图（6），直线AB、CD相交于O点，且$\angle AOD - \angle BOD = 70°$。



图（5）　　　　图（6）

求：$\angle AOC$的度数。

解：

$\because \angle AOD - \angle BOD = 70°$　　　　(1)

又$\angle AOD + \angle DOB = 180°$。　　　　(2)

由(1)+(2)得：

$2\angle AOD = 250°$，

故$\angle AOD = 125°$，

$\therefore \angle AOC = 180° - 125° = 55°$。

9．已知：如图（7），直线AB、CD相交于点O，$\angle AOC = 60°$，且$\angle 1 : \angle 2 = 2:3$。

求：$\angle 2$的度数。

解：由$\dfrac{\angle 1}{\angle 2}=\dfrac{2}{3}$，

得$\angle 2=\dfrac{3}{2}\angle 1$　　(1)

又$\angle AOC=60°$，

而$\angle AOC=\angle BOD$

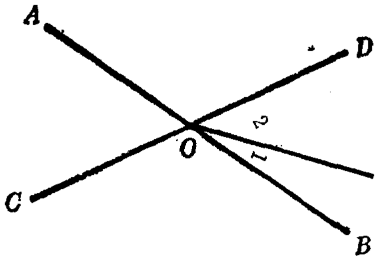
$=\angle 1+\angle 2=60°$　　(2)

把（1）代入（2）得

$\angle 1+\dfrac{3}{2}\angle 1=60°$，

$\therefore \angle 1=24°$，

故$\angle 2=36°$。



图（7）

小　　结

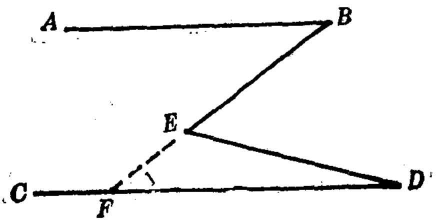
这套系列题是平面几何中最基本的问题．由锐角开始到平角结束是这套系列题的特点．这不仅是对一个系列而言，对有些问题也同样适合．比如问题一中第 1 题，条件是$\angle AOB$是锐角，事实上，当其它条件保持不变时，$\angle AOB$可以是直角、钝角和平角． 2 题的变形是由 1 题锐角扩充到钝角（指问题中的最大角度），并稍加改变其它条件而得到． 3 题是把 2 题中的题设 ON 平分$\angle AOC$与结论 $\angle MON=45°$互换而得到，它们是一对互逆的问题． 4 与 5 题也是一对互逆的问题，是在 1 、 2 、 3 题的基础上的扩充，是由锐角、钝角向平角的过渡．由图（3）知：无论以O为端点的射线OB怎样变化，4 题结论$OM\perp ON$永远成立． 8 、 9 题是两个基本题型。

解这类问题的主要依据是：角平分线的定义、直角的定义、平角的定义等。就每题解法而言，它们或多或少的隐含着一些探求问题的基本方法。比如问题一中第1题是由$\angle 1 = \angle 3$、$\angle 2 = \angle 3$而导出$\angle 1 = \angle 2$的，4题中证明二线垂直以及5题中证明OA、OC成一直线的方法，也是常用的基本方法。掌握这些方法不但可以灵活的处理问题，还为后续课奠定了基础。2题与3题、4题与5题是两对互逆的问题，它们是由条件和结论的互换而产生的。

要想使学生达到熟练的处理问题，养成善于全面思考问题的良好学风，就必须对学生加强基本功训练，使之掌握概念的定义，根据定义，以及已知的其它条件，列出关系式，然后进行推导，以达到所要求的结果。

问题二

1．已知：如图（8），E为AB、CD内一点，且$\angle BED = \angle B + \angle D$。



图（8）

求证：$AB \parallel CD$。

分析：若证二线平行，一般是应用平行线的判定定理。当直接证明有困难时，可设法引辅助线，来达到证明的目

的。

证明：延长BE交CD于F，

则$\angle BED=\angle 1+\angle D$。

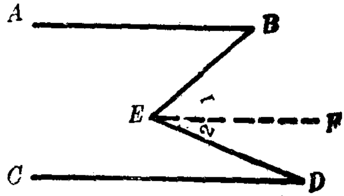
而$\angle BED=\angle B+\angle D$，

$\therefore \angle 1=\angle B$，

故$AB \parallel CD$。

注：本题也可通过过E点作$EF \parallel AB$的方法证明。

如果把1题的题设和结论互换则有：



图（9）

2．已知：如图(9)，E为AB、CD内一点，$AB \parallel CD$。

求证：$\angle BED=\angle B+\angle D$。

证明：过E作$EF \parallel AB$，

$\because AB \parallel CD$，

$\therefore AB \parallel EF \parallel CD$，

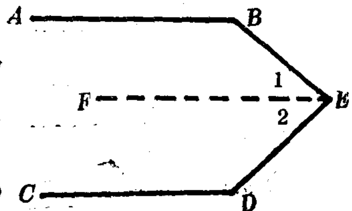
$\therefore \angle 1=\angle B$、$\angle 2=\angle D$。

而$\angle BED=\angle 1+\angle 2$，

故$\angle BED=\angle B+\angle D$。

注：本题也可用证明1题的方法证明。

观察图（9）可发现，B、D与E的连线呈“凹”状，下面的变形是变“凹”为“凸”。



图(10)

3．已知：如图（10），E为直线AB、CD之间的一点，且$AB \parallel CD$。

求证：$\angle B+\angle BED+\angle D=360°$。

证明：过E点作$EF \parallel AB$，

$\because AB \parallel CD$，

$\therefore AB \parallel EF \parallel CD$。

而$\angle 1 + \angle B = 180°$，

$\angle 2 + \angle D = 180°$，

$\therefore \angle 1 + \angle 2 + \angle D + \angle B = 360°$。

又$\angle 1 + \angle 2 = \angle BED$，

$\therefore \angle B + \angle BED + \angle D = 360°$。

将上题的题设与结论互换可得下题。

4．已知：见图（10），设E为直线AB、CD之间的一点，且$\angle B + \angle BED + \angle D = 360°$。

求证：$AB \parallel CD$。

证明：过E点作$EF \parallel AB$，

则$\angle 1 + \angle B = 180°$。

又$\angle B + \angle BED + \angle D = 360°$，

$\therefore \angle 2 + \angle D = 180°$，

$\therefore EF \parallel CD$。

而$EF \parallel AB$，

故$AB \parallel CD$。

以上四题的特点是“E”点在二直线AB、CD之间，下面把E点移到直线AB、CD同侧，可得如下问题。

5．已知：如图（11），点E是直线AB、CD同侧的一点，且$AB \parallel CD$。

求证：$\angle D - \angle B = \angle BED$。

证明：过点E作$EF \parallel AB$，

$\because AB \parallel CD$，

$\therefore AB \parallel EF \parallel CD$。

$\therefore \angle FEB = \angle B$,

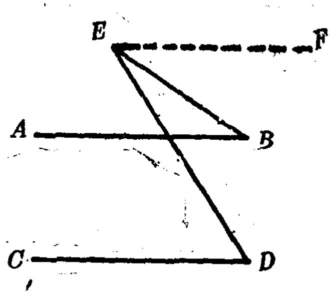
$\angle FED = \angle D$.

又$\angle DEF - \angle BEF$

$= \angle DEB$,

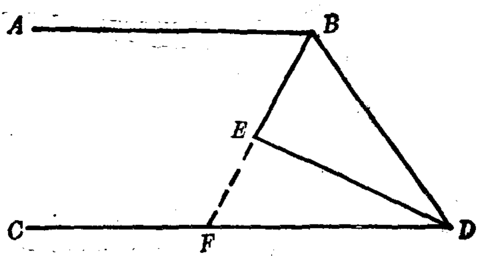
故$\angle D - \angle B = \angle BED$.

事实上，第1题的$\angle BED$可能是锐角，可能是钝角，也可能是直角。当它是直角时，再对题设稍加变动，又可得到新的问题。



图(11)

6．已知：如图（12），BE平分$\angle ABD$，DE平分$\angle BDC$，且$\angle BED = 90°$。



图(12)

求证：$AB /\!/ CD$。

证明：延长BE交CD于F，

$\because \angle BED = 90°$，

$\therefore \angle FED = 90°$。

又$\angle FDE = \angle EDB$，

$\therefore \angle DFE = \angle DBE$。

又$\angle ABE = \angle DBE$，