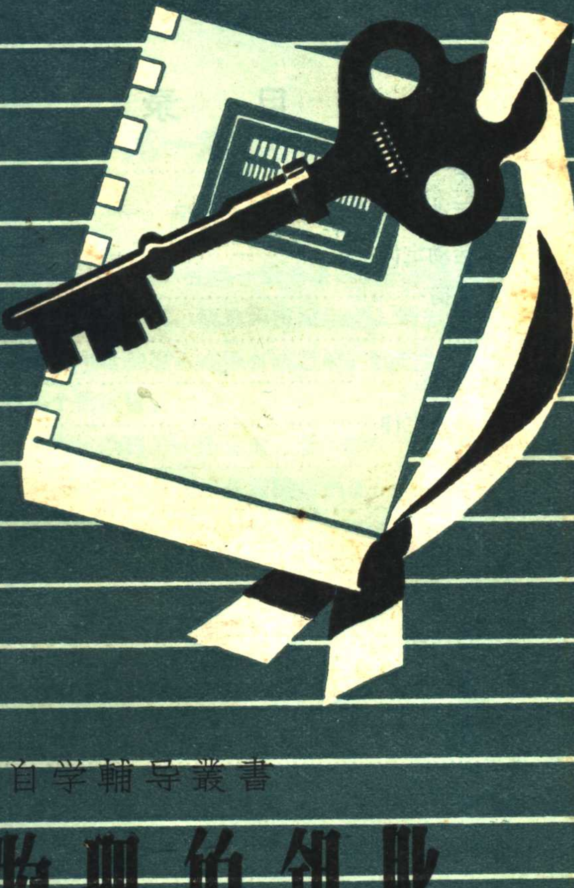

自学輔导叢書

自学物理的鑰匙（高中組）

上海市中学教师进修学院科普工作組

上海科学普及出版社

目　　录

第一章　力学

一、机械运动的規律

1. 路程、速度和加速度　在这一單元里，我們要講由于物体位置的变化而产生的各种运动形式，統称为机械运动。例如直綫运动和曲綫运动，匀速运动和变速运动等。在沒有講之前，我們先来談談研究这些运动必須弄清的几个物理量。

物体从一个地方运动到另一个地方，我們說物体走了一段路程。和路程相仿的另一个物理量是位移。在直綫运动里，路程和位移有时相同，有时不同。例如某人向东走 10 米，再繼續向东走 8 米，則路程和位移都是 18 米；如这人先向东走 10 米，又向西走 8 米，則他所走的路程是 18 米，而位移只有 2 米(現在的位置与原来的位置相距只有 2 米)。所以位移有个方向的关系在里边，我們將在本單元第 5 节标量和矢量里詳細討論。在曲綫运动里，二者也不一样，例如物体沿曲綫从 A 点运动到 B 点(圖 1)，那末它所走的路程是曲綫 AB，位移是直綫 AB。

圖 1.

物体运动的快慢叫做速度，也叫做速率。它們的区别也是个方向关系，我們也要放在标量和矢量一节里談，現在我們統称它做速度。依照各种运动形式的不同，有各种不同的速度概念。在匀速运动里，速度总是不变，所以它等于單位时間里所走的路程。在变速运动里，物体的运动忽快忽慢，时刻在变，我們就引用平均速度这个概念。所謂平均速度，就是平均起来这物体單位时間里走了多少路程。例如火車第 1 小时走 45 公里，第 2 小时走 40 公里，第 3 小时走 50 公里，那么它的平均速

度就是 $\frac{45+40+50}{3}=45$ 公里/时，就是說火車平均每小时走45公里。又如一塊石头从高空落下，5秒鐘落下了12.25米，那么它的平均速度就是 $\frac{12.25}{5}=2.45$ 米/秒。所以平均速度是运动物体所走的路程和走这段路程所化的时間之比。

用平均速度的概念来研究变速运动，只能近似地說明它的运动情形。因为物体的速度时刻在变，这一时刻(如第2秒末)的速度，不同于另一时刻（如第2.1秒末）的速度；經过 A 点时的速度，不同于經过另一点 B 时的速度。因之，我們又引用了另一个速度的概念——即时速度。它的含义是运动物体在某一时刻的速度，或者說运动物体在通过某一点时候的速度。

即时速度的概念很重要，但是要在学習了数学里的極限概念之后才能徹底了解，現在我們不能詳談。不过讀者必須注意，它与匀速运动里的速度或变速运动里的平均速度不同，它們是等于單位时間里所走的路程或平均路程。但即时速度不是这样，譬如我們說某物体的速度第1秒是9.8米/秒，第2秒是17.6米/秒，不是說它第1秒走了9.8米，第2秒走了17.6米，而是說物体在第1秒末这个瞬間的速度是9.8米/秒，第2秒末这个瞬間的速度是17.6米/秒。在第1秒末稍前一点时刻（如0.99秒末）或稍后一点时刻(如1.01秒末)，它就不是用这个9.8米/秒的速度运动。在第2秒末稍前一点时刻（如1.99秒末）或稍后一点时刻(如2.01秒末)，也不是用这个17.6米/秒的速度运动。我們也可以这样想：假使运动物体从第1秒末开始不再做变速运动，而是做匀速运动，那末在以后的时刻里，每秒鐘將走9.8米。如从第2秒末开始做匀速运动，那么在以后的时刻里，每秒鐘將走17.6米。所以某时刻的即时速度，也可以看做是从这时刻起做匀速运动的速度。

我們以后要講各种变速运动，还要对即时速度举例說明。在習慣上，我們不再写即时速度，而只写速度，但它总是指即时速度，希望讀者注意。

现在我們来談談加速度（用a代表）。在变速运动里，速度总在不断变化。但速度的变化也有快有慢，我們就用加速度这个物理量来表示速度改变的快慢。为着簡單起見，我們假定速度按一定規律改变，不是忽大忽小，而是不断地增加或不断地减小，而且單位时間里增加或减小的速度数値相同，这种运动叫做匀加速运动或匀减速运动。例如某运动物体的速度第1秒是5米/秒，第2秒是7米/秒，第3秒是9米/秒，每秒增加2米/秒，是匀加速运动。在这样簡化的条件下，加速度就等于單位时間里速度的变化（增加或减少）。因此，如某物体在某一时刻t_1的速度（指即时速度，下同）是v_1，到另一时刻t_2变为v_2，則它的加速度是

$$a=\frac{v_2-v_1}{t_2-t_1}。 \qquad (1)$$

这种簡化，只是为着适合單位时間里速度的变化是相同的这些运动形式。如果不是这样，那就要引用即时加速度的概念。即时加速度是指这一时刻的速度的变化，或指經过某一点时候的速度的变化，它不是高中物理学范圍以內的事，我們不再敘述。

从上面加速度的公式里，我們可以看出加速度的單位是$\frac{米/秒}{秒}$，簡写做米/秒²，讀做每秒每秒多少米。

2．兩种最基本的运动形式 在自然界里，物体的运动形式是多种多样的，如机械运动、热运动（分子运动）、电子的运动等。在力学里，我們只講机械运动，就是物体的位置發生变化的运动。这类运动也有好多种，我們現在先講兩种最基本的运动形式。然后用这兩种基本运动为基础，研究其他各种比較复杂的机械运动。

我們要研究各种运动的規律，先要知道什么叫做运动規律。运动規律就是表示运动物体在任何时刻的速度和路程的关系式，也就是路程、速度、加速度和时間的关系，

第一种最基本的运动是匀速直綫运动，簡称匀速运动。我們知道，匀速运动的速度总是不变的，因此，如运动开始时的速度为v_0，則以后

任何时刻的速度 v 总是等于 v_0，即

$$v=v_0 \tag{2}$$

速度既然总是不变，則1个單位时間里所走的路程是 $v_0\times1$，2个單位时間里所走的路程是 $v_0\times2$，… t 个單位时間里所走的路程 S 一定是

$$S=v_0t \tag{3}$$

方程式(2)和(3)就是匀速运动的規律。

严格講，匀速运动的定义应該是：在任何相等时間里，物体所走的路程总是相等的。比如說，某物体在第1秒里走了10米，以后每1秒鐘里都走10米，这是否就是匀速运动呢？我們如把相等时間縮短，看看每 $\frac{1}{2}$ 秒、每 $\frac{1}{5}$ 秒、每 $\frac{1}{100}$ 秒……里怎样，如果它們分別走了5米、2米、0.1米……，那末它是匀速运动無疑。如果它在第1个 $\frac{1}{5}$ 秒里走2米，第2个 $\frac{1}{5}$ 秒里走1.9米，第3个 $\frac{1}{5}$ 秒里走2.1米，那它就不是匀速运动了，所以我們要注意任何相等时間这句話。当然現在我們討論的匀速运动沒有这么严格。

第二种是初速度等于零的匀加速运动。在这种运动里，加速度不变，但速度（即时速度）則时刻在变。假定加速度为 a，由于加速度是單位时間里增加的速度，所以在第一个單位时間末速度增加了 a，第二个單位时間末的速度較原来的速度增加了 $2a\cdots$，又因初速度等于零，所以：

第1个單位时間末的速度 $=0+a=a=a\times1$

第2个單位时間末的速度 $=a+a=2a=a\times2$

第3个單位时間末的速度 $=2a+a=3a=a\times3$

第4个單位时間末的速度 $=3a+a=4a=a\times4$

………………………………………………

第 t 个單位时間末的速度 $=a\times t$

$$\therefore\quad v=at \tag{4}$$

初速度等于零的匀加速运动是一种变速运动，初速度等于零，t 时刻的速度是 v，所以平均速度是 $\frac{0+v}{2}=\frac{v}{2}$。在 t 时刻里所走的路程 S

应該等于平均速度乘上时間，所以：

$$S=\frac{v}{2}\times t,$$

用（4）代入得

$$S=\frac{1}{2}at^2 \qquad (5)$$

公式（4）和（5）就是初速度等于零的匀加速运动規律。如从公式（4）（5）消去 t，得

$$v^2=2aS。$$

讓我們举个例来复習一下。从靜止开始运动的物体，如在6秒鐘內走了270厘米；前3秒鐘是做匀加速运动，后3秒鐘是用第3秒末的即时速度为速度做匀速运动。求物体在第1秒里所走的路程和第1秒末的速度，以及后3秒做匀速运动时的速度。

按照題目的意思，这个物体在6秒鐘內做了兩种形式的运动。前3秒鐘是做初速度等于零的匀加速运动，后3秒鐘是做匀速运动（这时的速度用第3秒末的即时速度）。假設前3秒走 S_1 厘米，后3秒走 S_2 厘米，則

$$S_1+S_2=270$$

前3秒旣做初速度等于零的匀加速运动，設加速度为 a，則

$$S_1=\frac{1}{2}at^2=\frac{1}{2}a\times3^2=4.5a,$$

第3秒末的速度是

$$v_3=at=a\times3=3a。$$

后3秒做匀速运动，速度就是第3秒末的即时速度 v_3，所以

$$S_2=v_3t=3a\times3=9a$$

把 S_1 和 S_2 代入第一式得

$$4.5a+9a=270$$

$$\therefore\quad a=20\ 厘米/秒^2。$$

加速度 a 求出后，我們就可以求題目里所提的問題，即

第 1 秒內所走的路程 $=\frac{1}{2}at^2=\frac{1}{2}\times 20\times 1^2=10$ 厘米，

第 1 秒末的速度 $=at=20\times 1=20$ 厘米/秒，

第 3 秒末的速度，即后 3 秒做匀速运动的速度

$=at=20\times 3=60$ 厘米/秒。

我們希望讀者注意：(1)解题时不要急于求答案，因为一般题目，总不是直接代代公式就可解决的，应該一步一步地按着题意，寻求题目的关鍵。讀者很容易了解，上例的关鍵就是加速度，加速度求出后，题目里問的問題就容易解决了。(2)希望讀者溫習一下即时速度的意义。从这个例子里，可以很明显地看出，第 1 秒的即时速度决不等于第 1 秒里所走的路程；另一方面，第 3 秒末的即时速度就是从这一瞬間起做匀速运动的速度。

在初速度等于零的匀加速运动里，有一种叫做自由落体运动，例如一塊石子从高空落下来的运动。它和一般的匀加速运动有点不同，因为在一般运动里，加速度要跟着运动物体所受的力的大小而改变(第二單元里要講)。但在自由落体运动里，加速度总是不变的；任何物体，在任何时間，只要它們在同一地方运动，加速度总是一样的；即使在不同地方，相差也不大。这个加速度叫做重力加速度，用 g 来代表。平均講，它的大小是 980 厘米/秒^2。

因此，自由落体运动的規律和初速度等于零的匀加速运动規律相同，只是用 g 代替 a，所以

$$v=gt, \tag{6}$$

$$S=\frac{1}{2}gt^2, \tag{7}$$

这里 S 是物体在时間 t 内竪直落下的距离。从(6)(7)消去 t 得

$$v^2=2gs。$$

3．初速度不等于零的匀加速直綫运动 用上面兩种最基本的运动做基础，我們可以推导其他各种运动的規律。本节要講三种。

第一种是初速度不等于零的匀加速直綫运动。我們可以把它分做兩

部分来看：一部分是用初速度等于 v_0 做匀速运动，另一部分是用初速度等于零，以不变的加速度 a 做匀加速运动；兩部分沿同一直綫，向同一方向运动。这兩部分运动的并合，就是初速度不等于零的匀加速直綫运动。所以它的运动規律应該是：

$$v=v_0+at \tag{8}$$

$$S=v_0t+\frac{1}{2}at^2 \tag{9}$$

从(8)(9)消去 t 得

$$v^2=v_0^2+2aS$$

讀者很容易看出，(8)是(2)(4)之和，(9)是(3)(5)之和。这种把比較复杂的运动，看做兩个基本运动的合成，叫做运动的合成。

第二种是初速度不等于零的匀减速直綫运动。我們同样可以把它看做是兩种基本运动沿同一直綫，在相反方向上的并合，所以它的运动規律是

$$v=v_0-at \tag{10}$$

$$S=v_0t-\frac{1}{2}at^2 \tag{11}$$

从(10)(11)消去 t 得

$$v^2=v_0^2-2aS$$

兩組公式，(8)(9)和(10)(11)，实际上是一样的，只差了一个符号。因为一組兩种基本运动的方向是相同的，另一組則方向相反。前者，速度和路程都不断增加，所以是兩种基本运动加起来；后者，則速度逐渐减小，相等时間里所走的路程也逐渐减小，所以是兩种基本运动相减。

第三种是竖直上抛运动，像竖直投擲石子的运动。实际上它是初速度不等于零的匀减速直綫运动，只是像自由落体运动一样，不管竖直上抛是石子也好，皮球也好，或其他任何物体，它們的加速度都是重力加速度 g，所以用 g 代替(10)(11)中的 a，就得到竖直上抛运动的規律

$$v=v_0-gt \tag{12}$$

$$S=v_0t-\frac{1}{2}gt^2 \tag{13}$$

从(12)(13)消去 t 得

$$v^2=v_0^2-2gS$$

上面講的三种运动形式，实际上都可归結为初速度不等于零的匀加速直綫运动。因为匀减速运动可以看做是加速度为 $-a$ 的匀加速运动，即負加速度。竪直上抛运动可以看做是加速度为 $-g$ 的匀加速运动，現在我們举兩个例来复習一下。

例 1. 用速度 18 米/秒开行着的火車，使在 15 秒鐘內停止。求火車的加速度和它在这段时間里通过的路程。

[解] 題目說火車本来用 18 米/秒的速度行駛，經 15 秒鐘停止了，可見这是初速度不等于零的匀减速运动。这里，初速度 $v_0=18$ 米/秒，15 秒末的速度是零，所以用公式(10)得

$$0=18-a\times 15$$

$$\therefore\quad a=\frac{6}{5}\text{ 米/秒}^2\text{(負加速度)}$$

再用公式(11)得

$$S=18\times 15-\frac{1}{2}\times\frac{6}{5}\times 15^2=135\text{ 米。}$$

例 2. 橡皮球由 7.8 米的高处落下，触地后竪直向上跳起，上跳的速度是着地时的速度的 $\frac{3}{4}$。問球能跳多少高？它由开始降落到第二次触地要經过多少时間？

[解] 这是自由落体运动和竪直上抛运动的混合題。第一步是自由落体运动，設球从 7.8 米 (780 厘米) 高处落到地面的时間为 t_1，着地时的速度为 v_1，則用公式(7)得

$$780=\frac{1}{2}\times 980t_1^2$$

$$\therefore\quad t_1=\frac{1}{7}\sqrt{78}\text{ 秒，}$$

用公式(8)得

$$v_1=980\times\frac{1}{7}\sqrt{78}=140\sqrt{78}\text{ 厘米/秒。}$$

第二步是竪直上抛运动，它上跳的初速度是 $\frac{3}{4}v_1=\frac{3}{4}\times140\sqrt{78}=105\sqrt{78}$ 厘米/秒。皮球要上升到速度等于零时，不再上升。設皮球上升到最高的时間为 t_2，上升的高度为 h，則用公式(10)和(11)得

$$0=105\sqrt{78}-980\ t_2,$$

$$\therefore\quad t_2=\frac{3}{28}\sqrt{78}\text{ 秒。}$$

$$h=105\sqrt{78}\times\frac{3}{28}\sqrt{78}-\frac{1}{2}\times980\left(\frac{3}{28}\sqrt{78}\right)^2=\frac{1755}{4}=439\text{ 厘米。}$$

第三步，皮球既不再上升，于是又回落下来，第二次触地，又变成自由落体运动。設这次落下来經过的时間是 t_3，則用公式(7)得

$$\frac{1755}{4}=\frac{1}{2}\times980\ t_3^2$$

$$\therefore\quad t_3=\frac{3}{28}\sqrt{78}\text{ 秒。}$$

所以，从开始降落到第二次触地要經过的时間

$$t=t_1+t_2+t_3=\frac{1}{7}\sqrt{78}+\frac{3}{28}\sqrt{78}+\frac{3}{28}\sqrt{78}=\frac{10}{28}\sqrt{78}=3.15\text{ 秒。}$$

从这兩个例子里，我們希望讀者注意：(1)复習一下自由落体运动和竪直上抛运动中的加速度 g，和一般匀加速运动里的加速度 a。(2)像例2那样是兩种运动的混合題，非常普遍。做習題时，特別是这类混合題，必須先想通它的运动过程，然后一步一步按不同的运动形式，用不同的运动規律来做。(3)例2里的 t_2 和 t_3 是相等的，这不是偶然的相等而是一定相等的，就是說竪直上抛到最高点的时間总等于从最高点再下落到出發点的时間，簡單点講，就是上抛时間等于下落时間，讀者也可以用竪直上抛运动的兩个公式来証明它。(4)做例2时，我們不把 t_1、v_1 等的方根开出来。这是因为开出来是近似値，一步一步都用近似値，会影响最后結果，而且也会造成計算过程中的麻煩。

4．平抛和斜拋运动　斜拋石子的运动叫做斜拋运动。如在高处沿水平方向投擲石子的运动，則叫做平拋运动，它們都是曲綫运动。我們也可用运动的合成来解它們。

平拋运动，可以看做是沿水平方向用初速度 v_0 为速度的匀速运动和竖直向下的自由落体运动的合成，所以它的运动規律是：

$$\left.\begin{array}{ll} v_{\text{水平}}=v_0 & v_{\text{竖直}}=gt \\ S_{\text{水平}}=v_0t & S_{\text{竖直}}=\dfrac{1}{2}gt^2 \end{array}\right\} \tag{14}$$

式中 $v_{\text{水平}}$、$S_{\text{水平}}$ 是水平方向的速度和路程；$v_{\text{竖直}}$、$S_{\text{竖直}}$ 是竖直方向的速度和路程。

讓我們举个例来說明：作出从 125 米高处用 30 米/秒的速度水平拋出的物体的运动軌迹。并求物体落到地面处离拋出处的水平距离和落地时間。重力加速度 g 可用 10 米/秒^2。

先作运动物体的軌迹。按題意知 $v_0=30$ 米/秒，代入上述公式得

$$S_{\text{水平}}=30t,$$
$$S_{\text{竖直}}=\frac{1}{2}\times10t^2=5t^2。$$

使 $t=0, 1, 2\cdots$代入，得下表

t(秒)	0	1	2	3	4	5
$S_{\text{水平}}$(米)	0	30	60	90	120	150
$S_{\text{竖直}}$(米)	0	5	20	45	80	125

根据这只表，我們来作它的軌迹圖（用 1.75 厘米代表 30 米，如圖 2）。物体原在 0 点。第 1 秒鐘，它沿水平方向走到 A 点，$OA=30$ 米，同时又竖直向下走了 5 米，$AA_1=5$ 米，所以第 1 秒末物体实际上是在 A_1 点。第 2 秒鐘物体沿水平方向走到 B 点，$AB=30$ 米，即 $OB=60$ 米，同时又竖直向下走了 $BB_1=20$ 米，所以第 2 秒末物体实际上走到 B_1 点。依此类推，第 3 秒末物体走到 C_1 点，第 4 秒末在 D_1 点，第 5 秒末在

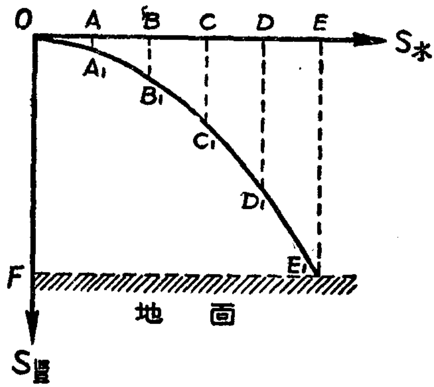

圖 2.

E_1 点。这时 $EE_1=125$ 米，按題意物体已落到地面。把 O、A_1、B_1…联結起来就是运动物体的軌迹圖。

从圖上可以看出，物体落到地面处离抛出处的水平距离 $=FE_1=150$ 米，落地时間是 5 秒。

不用圖而用上面的公式也可以求。因为从題目里知道 $S_{竖直}=125$ 米，所以用 $S_{竖直}=\frac{1}{2}gt^2$，就可以求出落地时間 t，即

$$125=\frac{1}{2}\times 10\,t^2$$

$$\therefore\quad t=5\ 秒$$

再用 $S_{水平}=v_0t$ 得

$$S_{水平}=30\times 5=150\ 米。$$

現在来談斜抛运动，它也可以看成是沿斜綫以初速度 v_0 作为速度的匀速运动和竖直向下的自由落体运动的合成。所以它的运动規律是

$$\left.\begin{array}{ll} v_{斜}=v_0 & S_{斜}=v_0t \\ v_{竖}=gt & S_{竖}=\frac{1}{2}gt^2 \end{array}\right\} \qquad (15)$$

讓我們举个例来說明。用 45 米/秒的初速度跟水平面成 45° 的投射

角把一个物体斜向上抛，試作出这个物体的运动軌迹(取 $g=10$ 米/秒^2)。

用上面公式，$v_0=45$ 米/秒，得

$$S_{斜}=45t, \qquad S_{竪}=\frac{1}{2}\times 10\,t^2=5\,t^2。$$

用 $t=0, 1, \cdots$ 代入，得下表

t(秒)	0	1	2	3	4	5	6	7
$S_{斜}$(米)	0	45	90	135	180	225	270	315
$S_{竪}$(米)	0	5	20	45	80	125	180	245

根据这只表，我們就可以作出它的軌迹圖(用 1 厘米代表 45 米如圖 3，本圖不很准确讀者可自画。)。物体原在 0 点。第 1 秒鐘它沿斜綫走到 A 点，$OA=45$ 米，同时又竪直向下走了 5 米，$AA_1=5$ 米，所以实际上第 1 秒末它是在 A_1 点上。同样，第 2 秒它沿斜綫又走了 45 米到 B 点，

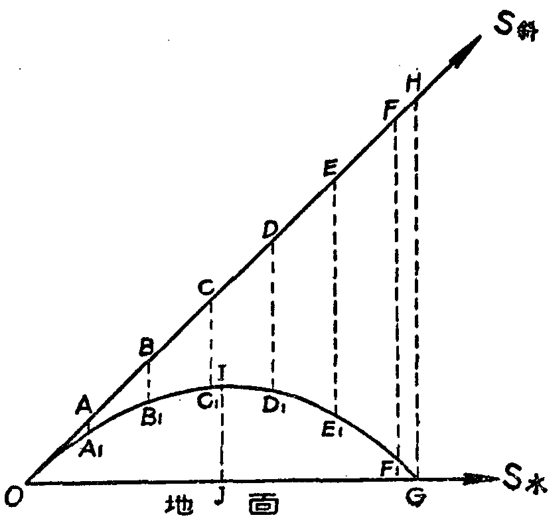

圖 3.

即 $AB=45$ 米，$OB=90$ 米，但同时它又竪直向下走了 20 米，$BB_1=20$ 米，所以第 2 秒末它实际上是在 B_1 点。这样一步一步做下去，就得到第 3 秒末物体在 C_1 点，第 4 秒末在 D_1 点，……。联結这些点，就得到它的运动軌迹。

从圖上也可以求出：（1）物体落地时間。量 $FH=0.35$ 厘米，从圖上知道，1 厘米代表 1 秒（即 $OA, AB\cdots$），所以落地时間是 6.35 秒。（2）出發点到落地处的水平距离，就是 OG，量 $OG=4.5$ 厘米，所以是 $45\times4.5=202.5$ 米。（3）物体到达的最高度，就是 IJ，量 $IJ=1.2$ 厘米，所以是 $45\times1.2=54$ 米。

講了下节之后，我們还要举例說明。

5．标量和矢量 第 1 节里談到路程和位移、速率和速度的时候，我們曾說过位移和速度都有个方向关系在里边。实际上，以后我們談到的許多物理量，有的有方向关系，有的沒有方向关系。有方向关系的物理量叫做矢量，如位移、速度、力等。沒有方向关系的叫做标量，如速率、时間、路程等。所謂有方向关系，就是說这种物理量，我們不但要曉得它的大小，也要曉得它的方向。譬如講風的速度吧，如果你只說今天風很大，每小时有多少公里，那叫人們怎么利用或防备它呢？又如你告訴問路人某地离这里 3 公里，你叫他向西去找，还是向东去找？可見有些物理量，必須要曉得了它的大小和方向，才能算完全曉得，不可缺一。

同性質的标量可以用算术方法加减起来，例如今天你做了 5 小时工作，昨天做了 6 小时，前天做了 4 小时，那你三天里一起做了 $5+6+4=15$ 小时工作。

同性質的矢量，那就不能这样加减，因为它們有方向关系在里边，例如一只船在河里行，水流的速度是 2 米/秒，自西向东，搖船的速度也是 2 米/秒，自南向北。你說这兩个速度可以簡單地加减起来嗎？当然不应該的，讀者可想想看这只船將向什么方向行駛？

矢量的加减在物理学里是一个重要問題，本节要介紹一些初步的概念和方法，希望讀者注意。

先做一个簡單的实驗。用根繩，一端拴一重物，另一端固定在桌面上，如圖 4 中 AA_1。用鉛笔杆扣着繩子沿 $ABCD$ 移过去，看見重物沿 $A_1B_1C_1D_1$ 的方向走。引長 AD 和 A_1D_1 相交于 E，作 A_1F 平行于 AE，EF 平行于 AA_1，我們看見重物走的方向 A_1E 是平行四边形 $AEFA_1$ 的对角綫。重物的移动有兩个方向，一个是 AE 方向，另一个是竪直向上，即 A_1A 方向。这兩个方向上的移动的合成，就成为在 A_1E 方向上的移动。

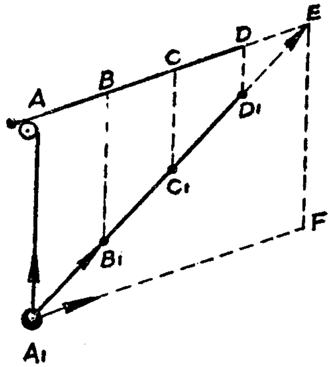

圖 4.

許多实驗都証明：同性質的兩个矢量的合成，就是以这兩个矢量为边而作的平行四边形的对角綫。

讓我們举个例来說明。小汽艇在靜水里的速度是 12 千米/时，河中水流的速度是 6 千米/时，兩者的方向作 60° 的夾角，求它們合速度的大小和方向。

先来談談圖解法。用 1 厘米代表 2 千米/时。作 $OA=3$ 厘米，代表河水的速度。用量角器作 AOB 角等于 60°。在 OB 上取 6 厘米，代表小汽艇的速度。作平行四边形 $OACB$，則对角綫 OC 就代表合速度的大小和方向了。量 OC 的長，得約 8 厘米，量 AOC 角得約 41°，就是說合速度是 16 千米/时，和河岸作 41° 角（圖 5 圖已縮小）。

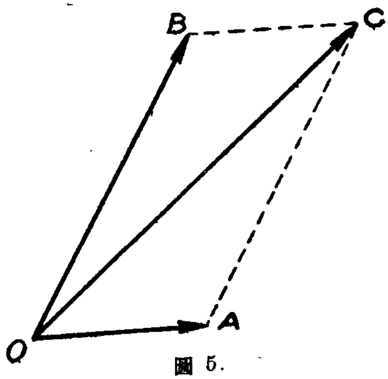

圖 5.

再談談三角法。由于讀者沒有学过三角，先介紹一些簡單的三角知

識。一只直角三角形 ABC 如圖 6，其中角 B 是直角，其余兩角都是銳角。我們把一只銳角的对边和斜边之比，叫做这只角的正弦，用 sin 表示，例如

$$\sin A=\frac{BC}{AC},\quad \sin C=\frac{AB}{AC}。$$

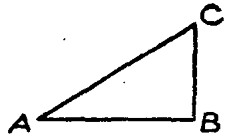

圖 6.

再把它的鄰边和斜边之比，叫做这只角的余弦，用 cos 表示，例如

$$\cos A=\frac{AB}{AC},\quad \cos C=\frac{BC}{AC}。$$

又把它的对边和鄰边之比，叫做这只角的正切，用 tg 表示，例如

$$\operatorname{tg} A=\frac{BC}{AB},\quad \operatorname{tg} C=\frac{AB}{BC}。$$

用这三个概念做基础，我們来推导一些簡單的关系。第一，讀者可以用上面的关系証明：

$$\sin^2 A+\cos^2 A=\left(\frac{BC}{AC}\right)^2+\left(\frac{AB}{AC}\right)^2=\frac{BC^2+AB^2}{AC^2}=\frac{AC^2}{AC^2}=1,$$

同样可証明，$$\sin^2 C+\cos^2 C=1。$$

又 $$\sin A=\cos C,\quad \sin C=\cos A,$$

$$\operatorname{tg} A=\frac{\sin A}{\cos A},\quad \operatorname{tg} C=\frac{\sin C}{\cos C}。$$

第二，做一只直角三角形如圖 7。$\angle A=30$，$\angle C=60°$；讓 $BC=1$ $AC=2$，則 $AB=\sqrt{3}$，所以，

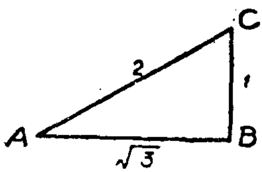

圖 7.

$$\sin 30°=\cos 60°=\frac{1}{2},$$

$$\cos 30°=\sin 60°=\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\operatorname{tg} 30°=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\operatorname{tg} 60°=\frac{\sqrt{3}}{1}=\sqrt{3}$$

再做一只直角三角形，兩边相等，設都等于1，則 $AC=\sqrt{2}$，