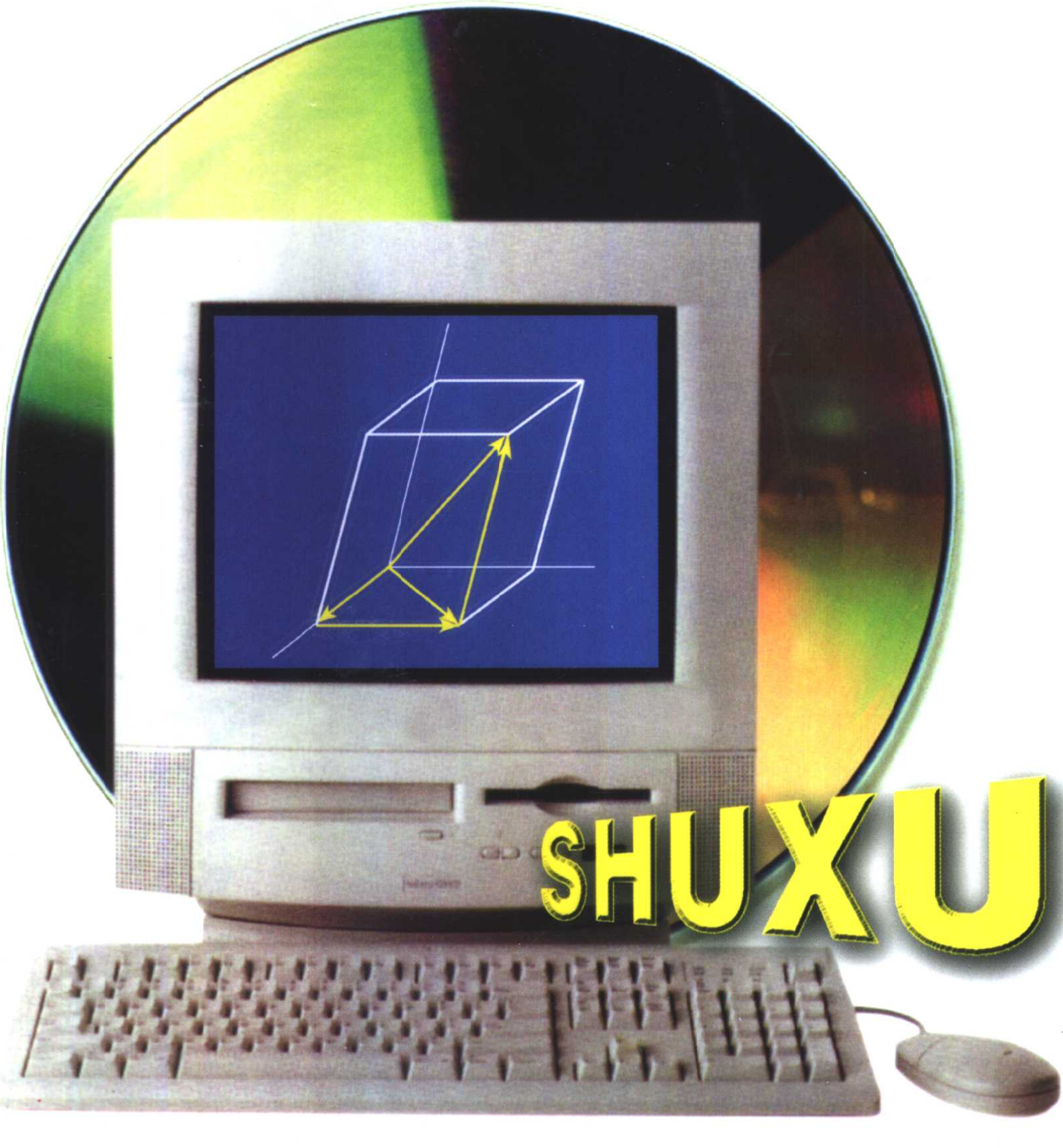
全日制普通高级中学教科书（试验修订本·必修）

数学

第二册（下B）

人民教育出版社中学数学室 编著



SHUXUE

人民教育出版社

全日制普通高级中学教科书（试验修订本·必修）

数　学

第二册（下 B）

人民教育出版社中学数学室　编著

人民教育出版社

全日制普通高级中学教科书(试验修订本·必修)

数　学

第二册(下B)

人民教育出版社中学数学室　编著

*

人 民 教 育 出 版 社 出 版

(北京沙滩后街55号　邮编:100009)

网址:http://www.pep.com.cn

北 京 出 版 社 重 印

北 京 市 新 华 书 店 发 行

北京北苑印刷有限责任公司印刷

*

890×1194　1/16　印张9.75　字数148 000

2001年10月第2版　2004年1月第1次印刷

印数1－23 600

ISBN 7－107－14960－1 / G·8050(课)　定价:10.20元

如发现印装质量问题影响阅读请与北京出版社书店联系

电话:62050948

说　明

《全日制普通高级中学教科书（试验修订本）·数学》是根据教育部2000年颁布的《全日制普通高级中学课程计划（试验修订稿）》和《全日制普通高级中学数学教学大纲（试验修订版）》的规定，遵照1999年全国教育工作会议的精神，在两省一市进行试验的《全日制普通高级中学教科书（试验本）·数学》的基础上进行修订的．此次修订的指导思想是：遵循“教育要面向现代化，面向世界，面向未来”的战略思想，贯彻教育必须为社会主义现代化建设服务，必须与生产劳动相结合，培养德、智、体、美全面发展的社会主义事业的建设者和接班人的方针，以全面推进素质教育为宗旨，全面提高普通高中教育质量．

普通高中教育，是与九年义务教育相衔接的高一层次的基础教育．高中教材的编写，旨在进一步提高学生的思想道德品质、文化科学知识、审美情趣和身体心理素质，培养学生的创新精神、实践能力、终身学习的能力和适应社会生活的能力，促进学生的全面发展，为高一级学校和社会输送素质良好的合格的毕业生．

《全日制普通高级中学教科书（试验修订本）·数学》（以下简称《数学》）包括三册，其中第一册、第二册是必修课本，分别在高一、高二学习，每周4课时；第三册是选修课本，在高三学习，它又分为选修Ⅰ和选修Ⅱ两种，每周分别为2课时和4课时．

这套书的第二册又分为上、下两个分册，分别供高二上、下两个学期使用．本书是《数学》第二册（下B），内容包括直线、平面、简单几何体（根据大纲“教学内容和教学目标”中的9（B)部分编写），排列、组合和概率两章，供高二下学期使用．

全套书在体例上有下列特点：

1．每章均配有章头图和引言，作为全章内容的导入，初步了解学习这一章的必要性．

2．书中习题共分三类：练习、习题，复习参考题．

练习　以复习相应小节的教学内容为主，供课堂练习用．

习题　每小节后一般配有习题，供课内、外作业选用，少数标有＊号的题在难度上略有提高，仅供学有余力的学生选用．

复习参考题　每章最后配有复习参考题，分 A、B 两组，A 组题是属于基本要求范围的，供复习全章使用；B 组题带有一定的灵活性，难度上略有提高，仅供学有余力的学生选用．

3．每章在内容后面均安排有小结与复习，包括内容提要、学习要求和需要注意的问题、参考例题三部分，供复习全章时参考．

4．每章附有一至两篇不作教学要求的阅读材料，供学生课外阅读，借以扩大知识面、激发学习兴趣、培养应用数学的意识．

本套书由人民教育出版社中学数学室编写，其中《数学》第二册（下B）原试验本由田载今、薛彬主持编写，参加编写的有：高存明、饶汉昌等，责任编辑为蔡上鹤、康合太、李海东，审稿为方明一．

《数学》第二册（下B）原试验本在编写过程中蒙孔令颐、吴之季、刘玉翘、陈捷、朱长盛、戴佳珉等同志提出宝贵意见，在此表示衷心感谢．参加本次修订的有：高存明、饶汉昌，责任编辑为李海东，审稿为方明一．

人民教育出版社中学数学室

2001年6月

目 录

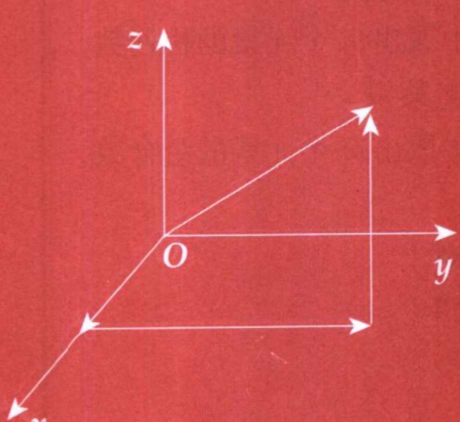
第九章 直线、平面、简单几何体

第十章 排列、组合和概率

本书部分常用符号

$A \in a$	点 A 在直线 a 上
$A \notin a$	点 A 不在直线 a 上
$A \in \alpha$	点 A 在平面 α 内
$A \notin \alpha$	点 A 在平面 α 外
$\alpha \cap \beta = a$	平面 α 和平面 β 的交线是 a
$a \subset \alpha$ 或 $a \subsetneqq \alpha$	直线 a 在平面 α 内
$a \not\subset \alpha$ 或 $a \nsubseteq \alpha$	直线 a 不在平面 α 内
$a \cap b = A$	直线 a 和直线 b 相交于点 A
$a \cap \alpha = A$	直线 a 和平面 α 相交于点 A
$a /\!/ \alpha$	直线 a 和平面 α 互相平行
$\alpha /\!/ \beta$	平面 α 和平面 β 互相平行
$a \perp \alpha$	直线 a 和平面 α 互相垂直
$\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle$	向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角
$\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$	空间的一个基底
$\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$	单位正交基底
$O-xyz$	空间直角坐标系
α-AB-β（或 α-l-β）	棱为 AB，面为 α、β 的二面角 （或棱为 l，面为 α、β 的二面角）
$\alpha \perp \beta$	平面 α 和平面 β 互相垂直
A_n^m	从 n 个不同元素中取出 m 个元素的排列数
$n!$	正整数 1 到 n 的连乘积
C_n^m	从 n 个不同元素中取出 m 个元素的组合数
$P(A)$	事件 A 的概率
$\overline{A}$	事件 A 的对立事件
$A \cdot B$	事件 A、B 同时发生

第九章　直线、平面、简单几何体



在初中，我们主要学习了平面图形的性质．平面图形就是由同一平面内的点、线所构成的图形．平面图形以及我们学过的长方体、圆柱、圆锥等都是空间图形，空间图形就是由空间的点、线、面所构成的图形．

当我们把研究的范围由平面扩大到空间后，一些平面图形的基本性质，在空间仍然成立．例如三角形全等、相似的充要条件，平行线的传递性等．有些性质在研究范围扩大到空间后，是否仍然成立呢？例如，过直线外一点作直线的垂线是否仅有一条？到两定点距离相等的点的集合是否仅是连结两定点的线段的一条垂直平分线？在这一章，我们要把平面内直线的平行、垂直和图形对称的性质推广到空间．另外我们还要学习用平面图形表示空间图形的方法，例如章头图中的照片是一个平面图形，它实际上表示的是桥与它的倒影关于水面的空间镜面对称图形．

在高中数学第一册中，我们已学习了平面向量，把平面图形的一些基本性质转化为向量运算及其运算律．并且知道，平面内任一点相对于一定点的位置，都可由平面内两个不平行的向量来表示（平面向量基本定理）．据此定理，我们就把对平面图形性质的研究代数化，用向量代数方法进一步研究了平面图形的一些性质．在这一章，我们要把平面向量推广到空间向量，把平面向量基本定理推广为空间向量基本定理，并得到，任一个空间向量都可用三个不在同一平面内的向量来表示（章头图的左下图），从而把对空间图形性质的研究代数化，用向量代数方法研究空间图形的性质．

一　空间的直线与平面

9.1　平面的基本性质

在平面内，基本图形是点、直线、射线和线段．在空间，除以上图形外，还有一个基本图形——平面．因此，首先要学习平面的表示方法和平面的基本性质．

1．平面的表示方法

几何里的平面和直线一样，是无限延展的，常见的桌面、黑板面、平静的水面都是平面的局部形象．

我们不能把一个无限延展的平面在纸上表示出来，通常用平面的一部分表示平面．例如，常用平行四边形表示平面（图 9-1），不过要把它想象成无限延展的．

平面一般用一个希腊字母 α、β、γ…来表示，还可以用表示平行四边形的对角顶点的字母来表示．例如图 9-1 中的平面 α，平面 β，平面 AC 等．

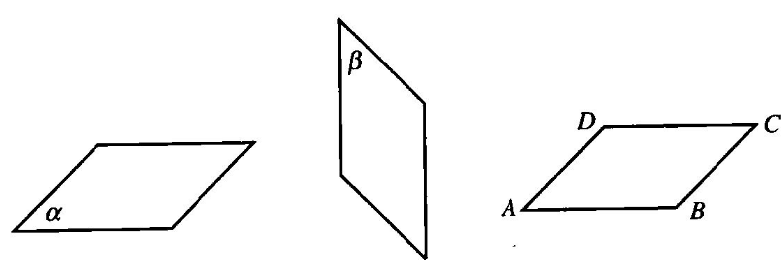


图 9-1

2．平面的基本性质

在日常生活中，我们对平直和弯曲这两种状态都有了直观的认识，很容易区分物体的表面是平直的还是弯曲的．下面我们来学习平面的基本性质．

公理 1　如果一条直线的两点在一个平面内，那么这条直线上的所有点都在这个平面内（图 9-2）．

这时我们说直线在平面内或平面经过直线．

利用这个性质，可以判断一条直线是否在一个平面内．

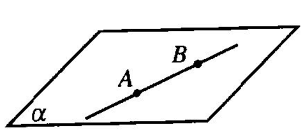


图 9-2

公理 2　如果两个平面有一个公共点，那么它们还有其他公共点，这些公共点的集合是一条直线（图 9-3）．

以后说到两个平面，如不特别说明，都是指两个不重合的平面.

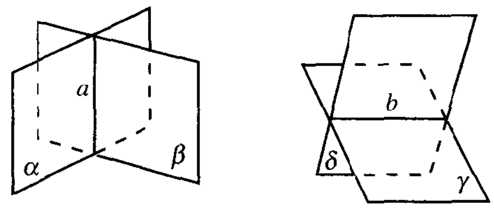


图 9-3

如果两个平面有一条公共直线，则称这两个平面相交，这条公共直线叫做这两个平面的**交线**. 如图 9-3，平面 α 与 β 相交，交线是直线 a；平面 γ 与 δ 相交，交线是直线 b.

画两个平面相交，当其中一个平面被另一个平面遮住时，应把被遮住的部分画成虚线或不画（图 9-3).

公理 3　经过不在同一条直线上的三点有且只有一个平面（图 9-4).

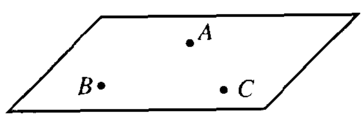


图 9-4

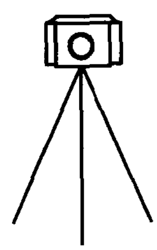


图 9-5

例如照相机可用三条腿的架子支撑在地面上，就是基于这个性质（图 9-5).

公理 3 也可简单地说成，**不共线的三点确定一平面.**

过不共线三点 A、B、C 的平面通常记作平面 ABC.

练　　习

1. 能不能说一个平面有边界?
2. 画三个平行四边形表示不同位置的平面.
3. 当线段 AB 在平面 α 内时，直线 AB 是否在平面 α 内? 为什么?
4. 当直线 l 不在平面 α 内时，l 与平面 α 的公共点最多有几个?
5. 画相交的两个平面.
6. 判断下列命题的真假：

   (1) 如果平面 α 与平面 β 相交，那么它们只有有限个公共点；

(2) 过一条直线的平面有无数多个；

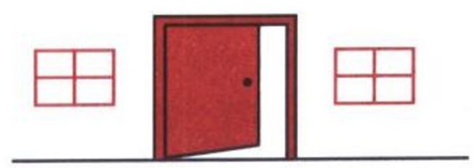
(3) 两个平面的交线可能是一条线段；

(4) 两个相交平面有不在同一条直线上的三个公共点；

(5) 经过空间任意三点有且只有一个平面；

(6) 如果两个平面有三个不共线的公共点，那么这两个平面就重合为一个平面.

7. 一扇门可以想象为平面的一部分，通常用两个合页把它固定在门框的一边. 当门不锁上时，可以自由转动；如果门锁上，则门就固定在墙面上. 这个事实说明平面具有哪条基本性质？



(第 7 题)

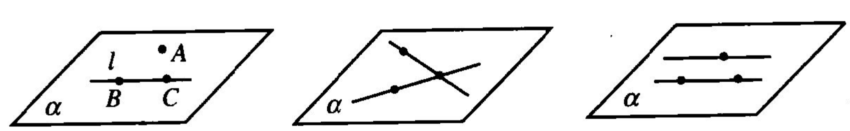
3. 公理的推论

由上面的公理，可以得到下面的推论：

推论 1　经过一条直线和直线外的一点有且只有一个平面(图 9-6 (1)).

推论 2　经过两条相交直线有且只有一个平面（图 9-6 (2)).

推论 3　经过两条平行直线有且只有一个平面（图 9-6 (3)).



(1)　(2)　(3)

图 9-6

下面证明推论 1.

已知：直线 l，点 A 是直线 l 外一点.

求证：过直线 l 和点 A 有且只有一个平面.

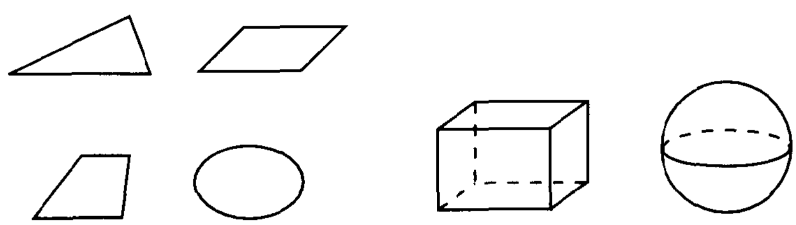
证明： 点 A 是直线 l 外一点，在 l 上任取两点 B、C，根据公理 3，经过不共线的三点 A、B、C 有一个平面 α. 因为点 B、C 在平面 α 内，所以根据公理 1，直线 l 在平面 α 内，即平面 α 是经过直线 l 和点 A 的平面. 又因为 B、C 在 l 上，所以任何经过点 A 和 l 的平

面一定经过点 A、B、C. 于是再根据公理 3，经过不共线的三点 A、B、C 的平面只有一个，所以经过 l 和点 A 的平面只有一个.

仿照推论 1 的证明，你能自己证明推论 2 和推论 3 吗？

如果空间几个点或几条直线都在同一平面内，那么我们就说它们共面.

如果构成图形的所有点都在同一平面内，这个图形叫做**平面图形**（图 9-7(1)）. 例如我们学过的三角形、平行四边形、梯形和椭圆等都是平面图形. 如果构成图形的点不都在同一平面内，这种图形叫做**立体图形**. 例如我们学过的长方体，球等都是立体图形（图 9-7（2））.



(1) (2)

图 9-7

我们在初中学过的平面图形的某些性质，例如全等、平行、相似等，对空间里的平面图形仍然成立.

我们把空间看作点的集合. 这就是说，点是空间的基本元素，直线、平面都是空间的子集；直线是平面的子集. 于是我们可用集合语言来描述点、直线、平面之间的关系. 例如：

点 A 在直线 a 上，记作 $A\in a$，点 A 不在直线 a 上，记作 $A\notin a$；

点 A 在平面 α 内，记作 $A\in\alpha$，点 A 不在 α 内，记作 $A\notin\alpha$；

直线 l 在平面 α 内，记作 $l\subset\alpha$，直线 l 不在 α 内，记作 $l\not\subset\alpha$；

直线 l 和直线 m 相交于点 A，记作 $l\cap m=A$（这里 A 是 $\{A\}$ 的简记），直线 l 和平面 α 相交于点 A，记作 $l\cap\alpha=A$；

平面 α 与平面 β 相交于直线 a，记作 $\alpha\cap\beta=a$；等等.

练　习

1. 下面的说法正确吗？

   (1) 已知直线 l 和 l 外一点 A，那么连结 A 和 l 上任一点的直线都在点 A 和 l 确定的平面内；

   (2) 一个角一定是平面图形.

2. 为什么说平行四边形和梯形是平面图形？

3. 用集合符号表示下列语句：

（1）点 A 在平面 α 内，点 B 不在平面 α 内；

（2）直线 l 在平面 α 内；

（3）平面 α 与平面 β 相交于直线 l.

4. 证明推论 2 和推论 3.

4. 空间图形在平面内的表示方法

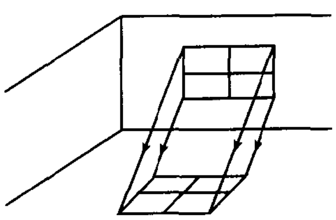


图 9-8

观察图 9-8，太阳光线（假定太阳光线是平行的）把一个长方形形状的窗框投射到地板上，变成了平行四边形的形状．框边的长度、框边之间的夹角有所改变，但框边的平行性没有改变．另外我们还可看到，平行直线段或同一条直线上的两条线段的比也没有改变．例如，一条线段的中点投射的影子，仍是这条线段影子的中点．正是这些不变性质，使我们能够用平面图形来表示空间图形.

表示空间图形的平面图形，叫做空间图形的**直观图**.

画空间图形的直观图，一般都遵守统一的规则．下面举例说明空间图形直观图的画法.

例 1　画水平放置的正六边形的直观图.

画法：（1）在已知正六边形 $ABCDEF$（图 9-9）中，取对角线 AD 所在的直线为 x 轴，取对称轴 GH 为 y 轴，x 轴、y 轴相交于点 O；任取点 O'，画出对应的 x'轴、y'轴，使$\angle x'O'y'=45°$.

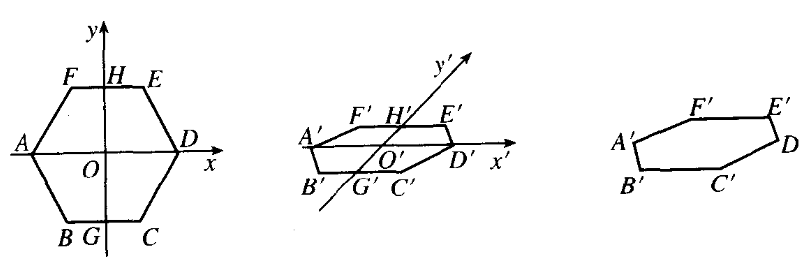


图 9-9

（2）以点 O' 为中点，在 x' 轴上取 $A'D'=AD$，在 y' 轴上取 $G'H'=\frac{1}{2}GH$，以点 H'为中点画 $F'E'\,/\!/\,x'$轴，并使 $F'E'=FE$；再以 G'为中点画 $B'C'\,/\!/\,x'$轴，并使 $B'C'=BC$.

（3）顺次连结 $A'B'$、$C'D'$、$D'E'$、$F'A'$，所得到的六边形

$A'B'C'D'E'F'$就是水平放置的正六边形$ABCDEF$的直观图.

注：图画好后，要擦去辅助线.

例 2 画水平放置的正五边形的直观图.

画法：(1) 在已知正五边形$ABCDE$（图 9-10）中，取中心O为原点，对称轴FA为y轴，过点O与y轴垂直的直线为x轴，分别过B、E作$GB\parallel y$轴、$HE\parallel y$轴，与x轴分别交于G、H. 画对应的轴$O'x'$、$O'y'$，使$\angle x'O'y'=45°$.

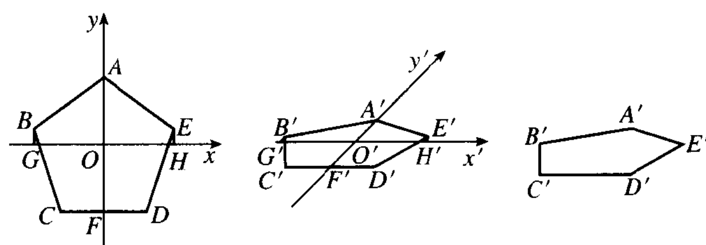


图 9-10

(2) 以点O'为中点，在x'轴上取$G'H'=GH$，分别过G'、H'，在x'轴的上方，作$G'B'\parallel y'$轴，$H'E'\parallel y'$轴，使$G'B'=\dfrac{1}{2}GB$，$H'E'=\dfrac{1}{2}HE$；在y'轴的点O'上方取$O'A'=\dfrac{1}{2}OA$，在点O'下方取$O'F'=\dfrac{1}{2}OF$，并且以点F'为中心，画$C'D'\parallel x'$轴，且使$C'D'=CD$.

(3) 连结$A'B'$、$B'C'$、$D'E'$、$E'A'$，所得五边形$A'B'C'D'E'$就是正五边形$ABCDE$的直观图.

例 3 画棱长为 2 cm 的正方体的直观图.

画法：(1) 作水平放置的正方形的直观图$ABCD$（图 9-11 (1)），使$\angle BAD=45°$，$AB=2$ cm，$AD=1$ cm.

(2) 过A作z'轴使$\angle BAz'=90°$，分别过点A、B、C、D，沿z'轴的正方向取$AA'=BB'=CC'=DD'=2$ cm.

(3) 连结$A'B'$、$B'C'$、$C'D'$、$D'A'$，得到的图形就是所求的正方体直观图（图 9-11 (2)）.

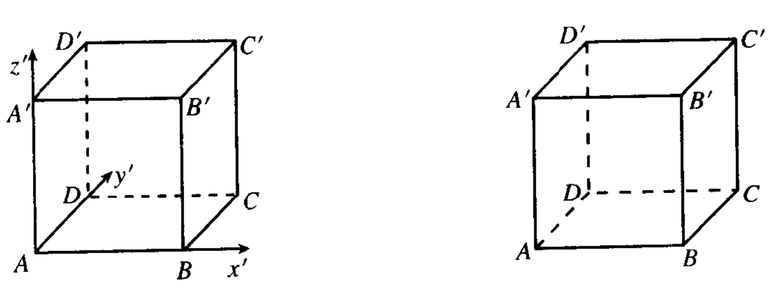


图 9-11

上面画直观图的方法叫做**斜二测画法**. 这种画法的规则是：

(1) 在已知图形中取水平平面，取互相垂直的轴 Ox、Oy，再取 Oz 轴，使 $\angle xOz=90^\circ$，且 $\angle yOz=90^\circ$；

(2) 画直观图时，把它们画成对应的轴 $O'x'$、$O'y'$、$O'z'$，使 $\angle x'O'y'=45^\circ$（或 135°），$\angle x'O'z'=90^\circ$. $x'O'y'$ 所确定的平面表示水平平面；

(3) 已知图形中平行于 x 轴、y 轴或 z 轴的线段，在直观图中分别画成平行于 x' 轴、y' 轴或 z' 轴的线段；

(4) 已知图形中平行于 x 轴和 z 轴的线段，在直观图中保持长度不变；平行于 y 轴的线段，长度为原来的一半.

上面，我们介绍了空间图形直观图的斜二测画法. 为了简便，如果要求不太严格，那么长度和角度可"适当地"选取，只要有一定的立体感就可以了. 例如，三角形的直观图可"适当地"画成三角形，长方形的直观图可"适当地"画成平行四边形（图 9-12）. 但下面的习题中要求按斜二测画的，还应该按要求画.

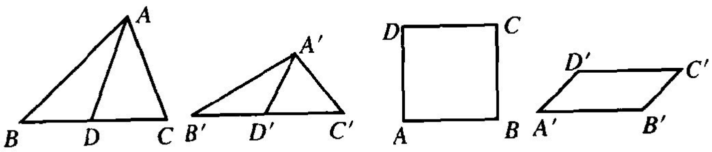


图 9-12

练习

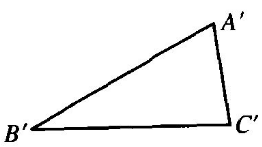
1. 下面的说法正确吗？

(1) 水平放置的正方形的直观图可能是梯形；

(2) 两条相交直线的直观图可能平行；

(3) 互相垂直的两条直线的直观图仍然互相垂直.

2. 如图，已知 $\triangle ABC$ 在一个平面内的直观图是 $\triangle A'B'C'$，如何画 $\triangle ABC$ 的 BC 边上中线在这个平面内的直观图 $A'M'$.



（第 2 题）

3. 用斜二测画法画下列图形：

(1) 边长为 4 cm 的正方形；

(2) 棱长为 3 cm 的正方体；

(3) 长、宽、高分别为 5 cm、4 cm、3 cm 的长方体.

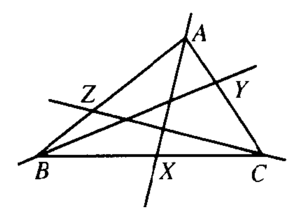
习 题 9.1

1. 一条直线经过平面内一点和平面外一点，它和这个平面有几个公共点？为什么？
2. 填空：

   (1) 经过____和直线外____有且只有一个平面；

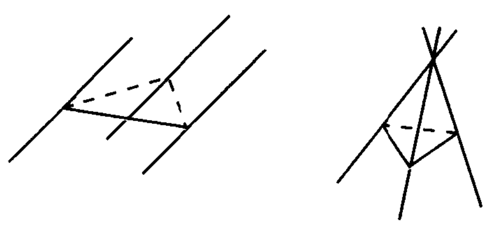
   (2) 两条____或____的直线确定一个平面；

   (3) 有一个公共点的两个平面相交于__________一条直线.
3. 已知 A、B、C 是空间不共线的三点，画直线 AB、BC、CA，设 X、Y、Z 分别表示直线 BC、CA、AB 上的任意一点，那么三组直线 $\{AX\}$、$\{BY\}$、$\{CZ\}$ 是否都在平面 ABC 内？为什么？



（第 3 题）

4. 四条线段首尾连结，所得的图形一定是平面图形吗？为什么？
5. 一条直线和两条平行直线都相交，这三条直线是否共面？
6. 如图，三条直线两两平行且不共面，每两条确定一个平面，一共可以确定几个平面？如果三条直线相交于一点，它们最多可以确定几个平面？



（第 6 题）

7. 怎样检查一张桌子的四条腿的下端是否在同一平面内？
8. 画水平放置的等腰梯形和正方形的直观图.
9. 画长、宽、高分别等于 4 cm、3 cm、2 cm 的长方体的直观图.

9.2 空间的平行直线与异面直线

1. 空间的平行直线

在初中几何中，我们学过平行公理：

过直线外一点有且只有一条直线和这条直线平行.

另外，我们还学过平行线的另一条重要性质：

在同一平面内，如果两条直线都和第三条直线平行，那么这两条直线也互相平行.

这条性质同样可以推广到空间.

公理 4　平行于同一条直线的两条直线互相平行.