圆锥曲线的八个主要问题

周志文 编

福建人民出版社

圆锥曲线的八个主要问题

福 建 人 民 出 版 社

圆锥曲线的八个主要问题

周志文 编

福建人民出版社出版
（福州得贵巷27号）
福建省新华书店发行
福建新华印刷厂印刷
开本787×1092毫米 1/32 7.0625印张 156千字
1981年4月第1版
1982年7月第2次印刷
印数：15,000—22,570
书号：7173·423 定价：0.58元

前　言

在日常生活中，我们常常会见到圆锥曲线或与它近似的图形。例如，盛有茶水的圆柱形玻璃杯倾斜时的茶水面，雨水筒直角弯管的接口，油车上油箱的横断面等，都是椭圆的图形；工厂里自然通风塔的通风筒的轴截面，有灯罩的台灯，映照在墙上的影子等，都是双曲线的图形；桥拱的曲线，拱形薄壳屋顶，抛射体经过的路线等，都是抛物线的图形，这些椭圆、双曲线、抛物线，总称为圆锥曲线。

圆锥曲线在科学技术上已被广泛地应用。例如，圆锥曲线的切线与法线的性质，被称为光学性质，是圆锥曲线在光学仪器、雷达、射电望远镜等方面重要应用的根据。探照灯、汽车前灯和太阳灶的镜面，也是利用这个原理设计的。圆锥曲线在建筑上，如桥梁和隧道的修建也有广泛的应用，特别在拱结构中显得更加突出。在材料力学中，对于有同样厚薄、物质均匀的薄板上的惯性矩的研究，惯性椭圆就起了很大的作用。圆锥曲线在航海、航空中也有应用，无线电导航中的“时差定位法”就是同焦点的双曲线系的应用。而圆锥曲线更重要的应用，是在于研究天体运动的轨道。我们知道，地球和其它行星绕太阳运行的轨道，月球绕地球运行的轨道，都是圆锥曲线。要确定人造地球卫星的轨道，也要涉及圆锥曲线。当人造卫星脱离运载它的火箭时，如果速度等于第一宇宙速度（7.9公里/秒），它就沿着一圆形轨道绕地球运行；如果速度大于第一宇宙速度而小于第二宇宙速度（11.19公里/秒），它就沿着一椭圆轨道绕地球运行。如果

宇宙火箭当燃料用完时的速度等于第二宇宙速度，它就沿着一抛物线轨道飞出地球的引力范围；如果宇宙火箭当燃料用完时的速度超过第二宇宙速度，它就沿着一双曲线轨道飞出地球引力范围．这些都说明，圆锥曲线在科学技术上已被广泛地应用，它对于我国今天四化建设，有着重要的作用．

圆锥曲线的研究，为某些科学的发展奠定了基础．有了希腊数学家阿波罗尼对圆锥曲线作过较详尽的研究，才有十七世纪以后天体力学的发展．如果没有前人对圆锥曲线的研究成果，那刻卜勒就不可能对行星的轨道作出复杂繁重的计算；而牛顿是否能在当时完成对万有引力的规律的研究，也就很难说了；至于当代世界在宇宙航行上的巨大成就，就更难设想了．

由此可见，学习与研究圆锥曲线，非常必要．特别对中学生来说，圆锥曲线是平面解析几何中的重要内容之一，也是今后学习高等数学、物理、力学和其它科学技术不可缺少的基础知识，必须认真学好。

本书是根据中学数学教学大纲及现行教材编写的，内容略有加深和提高，力求写得深入浅出，通俗易懂，可作为中学生的课外读物，也可供知识青年作为科学普及读物．书中配置一定数量的练习题，可用以复习、巩固、提高，也可以供中学数学教师备课参考．在编写过程中，承福建师范大学数学系陈启旭同志和福州市教师进修学院倪木森同志提出宝贵意见，并协助校订，在此谨向他们表示感谢．限于编者水平，加以时间仓促，错误、缺点在所难免，诚挚地希望读者批评指正。

编　　者

于福州师专　　1981.1.

目　　录

一　圆锥曲线的由来

在解析几何学里，我们把椭圆（圆是它的特殊形式）、双曲线和抛物线总称为圆锥曲线。这是为什么呢？

在立体几何学里，在同一个平面内，如果有一条固定的直线（如图1的a）和一条动线（如图1的l），当这个平面绕着这条固定的直线旋转一周时，这条动线所形成的面叫做旋转面。这条固定的直线叫做旋转面的轴，每一位置的动线都叫做旋转面的母线。

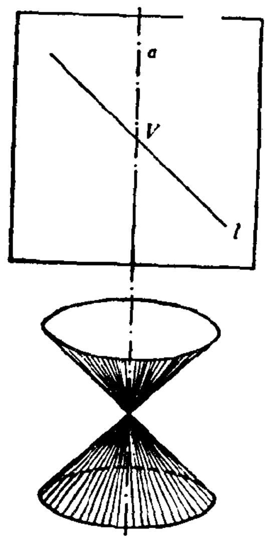

图1

如果母线是和轴相交的一条直线，那么所形成的旋转面叫做圆锥面。母线和轴的交点叫做圆锥面的顶点。由于顶点把每条母线都分成两部分，因此也把圆锥面分成两部分，其中的每一部分都叫做半圆锥面。每个半圆锥面上任意一条半母线与轴所成的角都相等，这个角叫做圆锥面的半顶角。

如果我们用一个不经过圆锥顶点的平面去截这样的圆锥面（两边可以无限延伸的），那么由于截面与轴的夹角的不同，它们的交线就可能是椭圆、双曲线或者是抛物线（如图2）。因此，我们把椭圆、双曲线、抛物线总称为圆锥曲线。

古学者对圆锥曲线早就有了研究，在距今2000余年前，希腊几何学者门尼基摩（Menachmus，公元前375——325）曾用垂直于圆锥某条母线的平面去截圆锥面，由于圆锥面的

顶角是锐角、直角、钝角就得出三种不同的曲线，他把它们分别叫做“锐角曲线”、“直角曲线”和“钝角曲线”，这就是现在的“椭圆”、“抛物线”和“双曲线”。其后欧几里得（Euclid，公元前300左右）、阿基米德（Archimedes，公元前287——212）也都有关于圆锥截线的著作。后来阿波罗尼（Apollonious，公元前260——200）曾著有

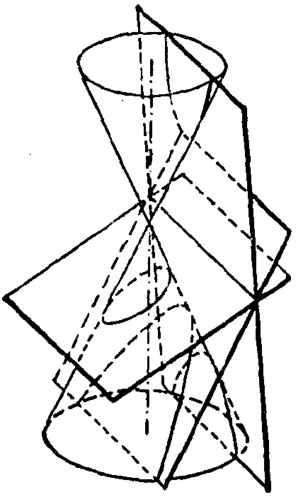

图 2

《圆锥截线论》八卷，除搜集前人的成果外，尚有他自己的一些研究成果。他认为只要改变截面对母线的倾角，就可以由同一个圆锥面截出这三种曲线；并且根据顶点在原点的二次曲线方程所具有的性质，给出了三种常态二次曲线的名称。但他未能用焦点和准线来给出圆锥曲线的定义。到公元340多年，巴卜（Pappus）在他所著的《希腊数学丛书》中对圆锥曲线又有了许多新的创见，他发现了抛物线的焦点和准线；但是他只研究了它们彼此间的孤立性质。关于焦点，到1604年刻卜勒（Kepler）在研究光学性质时才有详细的说明。至于准线，则到牛顿（Neuton）及卜司考威池（Boscovich）才有详细的研究。卜氏于1757年系统地给出了圆锥曲线的统一定义。以后由于坐标的建立、代数的方法、射影的方法代替了初等的方法，更因生产实践的需要，圆锥曲线的理论才逐步完备起来。

圆锥曲线学说是在明末随着天文历算传入我国的。《测

量全义》（1631）、《恒星历指》（1631）、《交食历指》（1632）、《测天约说》（1633）里都介绍了圆锥曲线，但因这些都是历算书籍，只能是一些片断的知识。对于圆锥曲线的论说既不详细，也不完备。直到清乾隆七年（1742），才由明安图等人编成《历象考成后编》，其中载有椭圆作图法及许多性质，并证明了椭圆切线定理及其面积。清中叶，研究西算者略有增加，如董祐诚（1791——1823）、徐有壬（1800——1860）、项名达（1789——1850）、戴煦（1805——1860）等，对于椭圆的周长都有一定的研究。其中最著名的项名达；在他的《椭圆求周术》（1848年写成，1875年出版）中，论证了椭圆的周长，是中算家在圆锥曲线方面的第一部独立著作。虽然是用初等数学方法求得椭圆的周长，但与近代算式相符合。在他之后，又有中算家李善兰（1811——1882）与伟烈亚力（Alexender Wylie,1815—1887）合译了罗密士（Loomis, 1811——1899）《代微积拾级》（1859）18卷。同治五年（1866）又与艾约瑟（Joseph Edkin, 1825——1727）合译了《圆锥曲线说》3卷。他又著了《椭圆拾遗》3卷，用几何方法论证了椭圆的一些性质。到清末，华蘅芳（1833——1902）译了华里司《代数术》（1873）25卷，其中卷23“方程界线”介绍了圆锥曲线的一些概念和性质。光绪十六年（1890）江衡与付兰雅合译了哈司韦《算式集要》4卷，书中记载了圆锥曲线的一些计算公式。因为上述书籍流传不广，所以解析几何及圆锥曲线学说的研究在我国发展比较迟缓。直到清末废科举立学堂，解析几何列为学校必修科目后，圆锥曲线的研究在我国才比较广泛地流传开来。

二 圆锥曲线的定义

从前节图 2 我们知道，用一个不经过圆锥面顶点的平面去截圆锥面，由于截面的位置不同，所形成的交线也不同。究竟截面在什么位置时，它所形成的交线分别是椭圆、双曲线或抛物线呢？又应该怎样给出它们的定义呢？这就是本节要阐明的问题。

设圆锥面的半顶角为α（$0°<\alpha<90°$），截面与轴的夹角为θ（$0°<\theta\leqslant 90°$），则有下列三种可能。

（一）$\alpha<\theta$

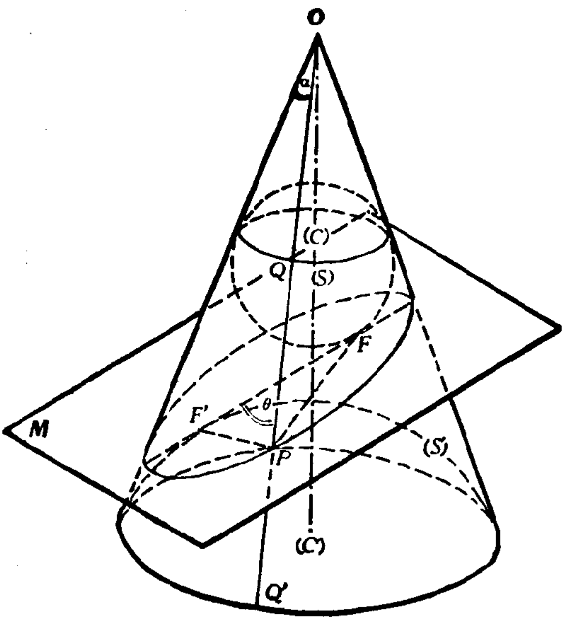

图 3

这时一个半圆锥面上的半母线都和这个截面相交，因而

它的交线是一条封闭的曲线。现在让我们来探讨这条曲线有些什么性质。

如图3，我们在圆锥内作与圆锥面及截面都相切的两个球（S）和（S'），由立体几何可知，圆锥面与这两个球的交线分别是圆（C）和（C'），并且圆（C）与（C'）所在的平面互相平行，把圆锥的母线截出定长的线段。而球与截面的切点分别设为F和F'，则F和F'是两个定点。

在这条封闭的曲线上任取一点P，过点P的母线OP分别交圆（C）和（C'）于点Q和Q'。

因为PF和PQ是从点P向球（S）所引的两条切线，所以它们的切线长：

$$|PF| = |PQ|.$$

同理，从点P向球（S'）所引两条切线的切线长：

$$|PF'| = |PQ'|.$$

把这两个等式两边分别相加，得

$$|PF| + |PF'| = |PQ| + |PQ'| = |QQ'|.$$

但$|QQ'|$与点P在曲线上的位置无关，它是一个定长。因此，我们得到这条曲线的一个性质如下：

曲线上任意一点P到两个定点F和F'的距离之和是一个定长$|QQ'|$。

它的逆命题也成立。也就是说：

在截面上，如果一点P与两个定点F和F'距离之和等于定长$|QQ'|$，那么，点P在这条曲线上。

为此，我们规定：

如果平面内一个动点到两个定点的距离之和等于定长，那么动点的轨迹叫做椭圆。这两个定点叫做焦点。

我们还可以利用截面M与两个圆（C）和（C'）所在的

平面N和N'的交线l和l'再来探讨这条曲线的另一性质。

如图4所示，因为平面N和平面N'都垂直于圆锥面的轴，所以

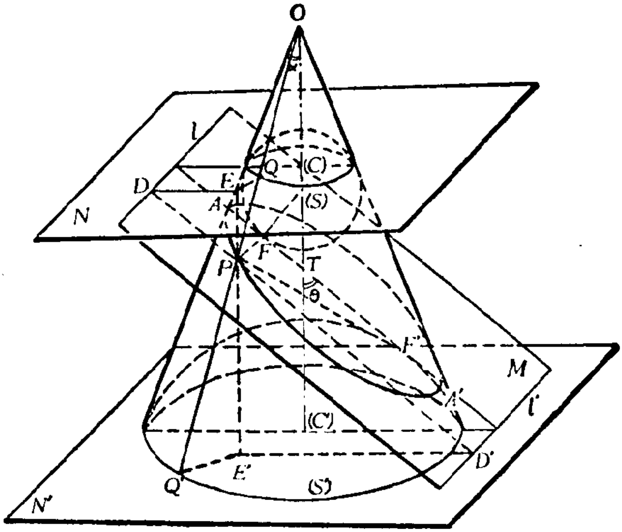

图 4

平面$N \parallel$ 平面N'.

∵直线l与l'是平行平面N与N'和平面M的交线，

∴ $l \parallel l'$.

∵球（S）与平面M相切于F，

∴$SF \perp$平面M，从而$SF \perp l$.

但$OS \perp l$，故$l \perp$平面OSF.

同理， $l' \perp$平面$OS'F'$.

而平面OSF与平面$OS'F'$是同一个平面，

所以$FF' \perp l$，$FF' \perp l'$.

在曲线上任取一点P，过点P引圆锥的母线分别交圆(C)

和（C'）于Q和Q'。再过点P引平面N与平面N'的垂线，垂足分别为E和E'，则EE'平行于圆锥面的轴。又过点P再引l和l'的垂线，垂足为D和D'，则$DD' \parallel FF'$。

根据一个角的两边和另一个角的两边分别平行并且方向相同，这两个角相等的性质，可得

$$\angle QPE = \angle Q'PE' = \alpha,$$

$$\angle DPE = \angle D'PE' = \theta.$$

$$\therefore \frac{|PF|}{|PD|} = \frac{|PQ|}{|PD|} = \frac{|PE|\sec\alpha}{|PE|\sec\theta} = \frac{\cos\theta}{\cos\alpha},$$

$$\frac{|PF'|}{|PD'|} = \frac{|PQ'|}{|PD'|} = \frac{|PE'|\sec\alpha}{|PE'|\sec\theta} = \frac{\cos\theta}{\cos\alpha}.$$

因为$\alpha<\theta\leqslant 90°$，所以$\cos\alpha>\cos\theta\geqslant 0$，

从而 $$\frac{|PF|}{|PD|} = \frac{|PF'|}{|PD'|} = \frac{\cos\theta}{\cos\alpha}<1.$$

这样，我们得到这条曲线的另一性质如下：

曲线上任意一点P到定点F（或F'）的距离与到一条定直线l（或l'）的距离之比等于$\frac{\cos\theta}{\cos\alpha}$。

它的逆命题也成立，也就是说：

在截面上，如果一点P到定点F（或F'）的距离与到一条定直线l（或l'）的距离之比等于$\frac{\cos\theta}{\cos\alpha}$，那么点$P$在曲线上。

为此，我们也规定：

如果平面内一个动点到一个定点的距离与到一条定直线的距离之比是一个小于1的常数，那么这个动点的轨迹叫做椭圆。这个定点叫做椭圆的焦点，这条定直线叫做椭圆的准线，而这个常数叫做椭圆的离心率。

我们将在下一节里证明椭圆的这两种定义是等价的。

（二）$\theta<\alpha$

这时圆锥面上除了与截面平行的两条母线与这个截面不相交外，其余的母线都和这个截面相交，因此交线有两支，分别在两个半圆锥面上，方向相反且无限伸长。

我们同样可以用初等几何的知识研究得出与椭圆相类似的性质：

1．曲线上任意一点P到两个定点F和F'的距离之差是一个定长$|QQ'|$；反之，在截面上，如果一点P与两个定点F和F'距离之差等于定长$|QQ'|$，那么点P在这条曲线上。

2．曲线上任意一点P到定点F（或F'）的距离与到一条定直线l（或l'）的距离之比等于$\frac{\cos\theta}{\cos\alpha}$；反之，在截面上，如果一点$P$到定点$F$（或$F'$）的距离与到一条定直线$l$（或$l'$）的距离之比等于$\frac{\cos\theta}{\cos\alpha}$，那么点$P$在曲线上。

读者可根据下面图5和图6，证明曲线的这两个性质。

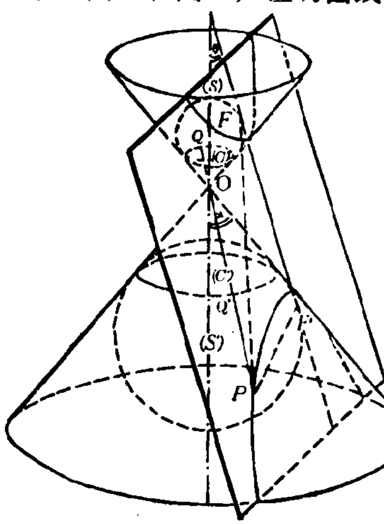

图 5

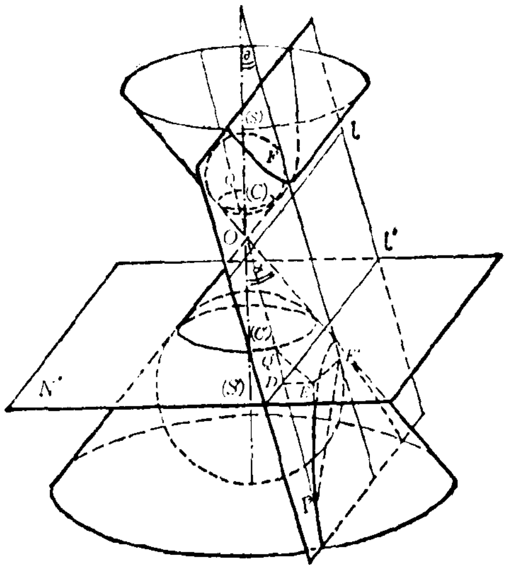

图 6

（为了使图形清晰，在图6中未画出经过圆（C）的平面N，但不影响证明。因为另一个与它同理。）

为此，我们规定：

1.如果平面内一个动点到两个定点的距离之差等于定长，那么这个动点的轨迹叫做双曲线.这两个定点叫做焦点。

2.如果平面内一个动点到一个定点的距离与到一条定直线的距离之比是一个大于1的常数，那么这个动点的轨迹叫做双曲线。这个定点叫做焦点，这条定直线叫做准线，而这个常数叫做离心率。

我们同样可以证明双曲线的这两种定义是等价的。

（三）$\theta=\alpha$

这时半圆锥面上除了与截面平行的一条母线与这个截面不相交外，其余的半母线都和这个截面相交，因此交线仅有

一支，且无限伸长。

在圆锥内作与圆锥面和截面都相切的一个球（S），设这球与圆锥面的交线是圆（C），而与截面的切点为F，圆（C）所在平面N与截面M的交线为l（图7）。

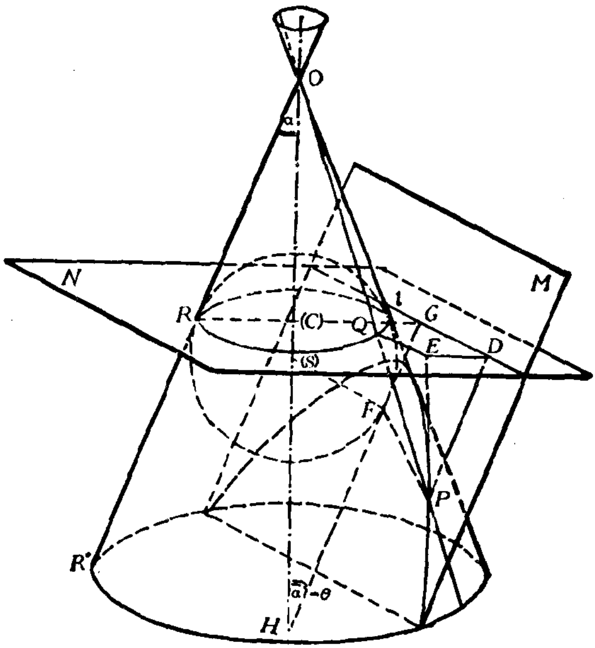

图 7

因为$OS\perp$平面N，所以$OS\perp l$。

又球（S）与平面M相切于F，

故$SF\perp$平面M。从而$SF\perp l$。

则$l\perp$平面OSF。

设平面OSF与圆锥面相交于OR和OR'，而与平面M相交于FG。则$FG\parallel OR$，于是FG与圆锥面的轴相交成α角，且$FG\perp l$。

在平面M与圆锥面的交线上任取一点P，过点P作母线OP交圆(C)于Q，在平面M内过点P作$PD\perp l$，则$PD \parallel FG$。再过点P作平面N的垂线、垂足为E，则PE平行于圆锥的轴OS，于是

$$\angle DPE = \angle GHO = \theta,$$
$$\angle QPE = \angle POH = \alpha.$$

$$\therefore \quad \frac{|PF|}{|PD|} = \frac{|PQ|}{|PD|} = \frac{|PE|\sec\alpha}{|PE|\sec\theta} = \frac{\cos\theta}{\cos\alpha}.$$

因为$\theta = \alpha$，所以$\frac{\cos\theta}{\cos\alpha} = 1$，

故 $$|PF| = |PD|.$$

这样我们得到这条曲线的一个性质如下：

曲线上任意一点P到定点F的距离与到一条定直线l的距离相等。

它的逆命题也成立，也就是说：

在截面上，如果一点P到定点F的距离与到一条定直线l的距离相等，那么点P在曲线上。

为此，我们规定：

如果平面内的一个动点到一个定点和一条定直线的距离相等，那么动点的轨迹叫做抛物线。这个定点叫做焦点，这条定直线叫做准线。

这个定义也可以改述为：

如果平面内的一个动点到一个定点的距离与到一条定直线的距离之比等于1，那么动点的轨迹叫做抛物线。

综合上面的三种情况，我们可以给圆锥曲线的定义规定如下：

如果平面内的一个动点到一个定点和一条定直线的距离