

掌握初等几何知識的心理概論

符·伊·孜科娃 著



人民教育出版社

掌握初等几何知識的心理概論

符·伊·孜科娃 著

孙以蓓 譯

人民教育出版社

В. И. ЗЫКОВА
ОЧЕРКИ ПСИХОЛОГИИ
УСВОЕНИЯ НАЧАЛЬНЫХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ
ЗНАНИЙ

УЧПЕДГИЗ * 1955

本书根据俄罗斯苏维埃联邦社会主义共和国教育部教育出版社
1955年莫斯科版译出

掌握初等几何知識的心理概論

[苏联] 符·伊·孜科娃 著

孙以市 译

北京市书刊出版业营业许可出字第2号

人民教育出版社出版(北京景山东街)

新华书店发行

工人出版社印刷厂印装

统一书号: 7012·442 字数: 108千

开本: 787×1092公厘 1/32 印张: 5

1959年4月第一版

1959年7月第一次印刷

北京: 1—10,600册

定价 0.44 元

目 录

緒論	1
第一章 掌握几何概念过程的特点的心理分析	6
語言和图形在講授概念阶段中的联系	6
語言和图形在运用概念阶段中的联系	19
語言和图形在掌握几何类概念时的联系	34
术语的生活意义对掌握几何概念的影响	37
在联系其它概念来观察概念时对概念的掌握	46
掌握作为概念本质特征的关系	53
結論	58
第二章 几何計算题解题过程的心理分析	61
理解习题的条件和作图	61
解题过程的分析	68
在解题过程中重新理解图形的步骤	78
解题过程中对图形的利用	87
解题过程中对图形的观察	100
結論	108
第三章 掌握定理論証的过程的心理分析	111
在掌握定理論証的过程中对图形的理解	111
在証明定理过程中对推理的掌握	133
結論	153

緒 論

中学初等几何課的教学問題許多年來一直受到教师和教学法专家的特別注意。这是因为学生在掌握初等几何知識的过程中会遇到由于几何学本身的特点而发生的許多严重困难。

約·維·斯大林在馬克思主义与語言学問題一书中說到几何这門科学的特征时說,“几何学上的定理是把具体对象加以抽象化,把各种对象看成沒有具体性的物体,并在决定它們之間的相互关系的时候,不当成某些具体对象間的具体关系,而当成一般沒有任何具体性的物体間的相互关系”^①。

初等几何課程要求学生善于把周圍的具体对象加以抽象化和进行抽象的思維。

因此就发生了这样的一些問題:应当怎样組織教学过程来使学生克服抽象上的困难,应当按照怎样合理的原則来編写初等几何課的教科书等等。只有当掌握几何教材过程的特点經過全面的科学調查时,也就是說,只有确定了掌握上的具体特点对具体教学条件的相依关系时,才能把这些問題弄清楚。因此,研究在各种不同教学条件下掌握几何知識的过程就具有特殊的意义。

这本提供中学数学教师参考的“概論”是根据作者在1946—1951年間所进行的系統調查写出来的。調查的目的在于研究六年级学生掌握几何知識的过程的特点。为了实现这个目的,組

① 斯大林:馬克思主义与語言学問題,人民出版社 1950 年版,第 22 頁。

織了几何課堂教學的觀察，并对莫斯科若干學校的學生進行了個別和集體的實驗。在進行工作的各班里，有剛剛開始教學生活的教師、有比較有經驗的教師，也有已經教學多年的教師①。

作為調查對象的主要問題是要明了所利用的幾何直觀方法對知識的掌握過程有些什麼影響，教師的講解和所利用的直觀方法在這種複雜的掌握過程中彼此有些什麼關係，在應用學過的知識來解題和證明定理時有些什麼特點。

主要是注意於發現學生在掌握幾何知識過程中所遇到的困難和確定引起這些困難的原因。因此，分析學生的錯誤回答當然在調查中占了很多地位。不過對掌握得正確的事例也進行了分析的嘗試。

本書共三章。第一章是講掌握幾何概念的心理。對於利用標準圖形來掌握概念的過程和廣泛變化所給圖形的形狀和平面位置來掌握概念的過程都進行了研究②。

變化幾何圖形的形狀和位置的問題在心理學刊物和教學法刊物上都討論過。心理學的論文研究了用書本上的圖形和變化過的圖形證明定理的過程③。其中指出在教學定理的過程中必須教會學生在圖上“看到”本質的一般關係和非本質的個別關係，並把它們區別開來。為了這個目的，書中主張在口頭上扼要說明圖中的哪些要素可以變更和怎樣變更而不致於破壞本質的關係。

教學法專家格·阿·弗拉基米爾斯基也在論文中談到變更幾何圖形特征的重要意義。“一方面變更所學的圖上的幾何圖形的形狀和位置，同時概括出幾何圖形所含的幾何關係，這種方法是重要的”④。他還擬了一套在變更某些幾何圖形的形狀和

位置的条件下來認識這些圖形的練習⑥。

我們對課堂教學的觀察表明，只利用標準幾何圖形會使學生的幾何觀念貧乏，會使他們在解題和證明定理的過程中發生看圖的困難。但在幾何的教學實踐中，教師往往僅限於利用標準圖形。因此，對於利用標準圖形來掌握幾何知識這種方法的特點和變化圖形的特征來掌握幾何知識這種方法的特點進行實驗的研究就具有重要的意義。

為了進行實驗的教學，列寧格勒區第 150 男校的女教師伊·伊·果洛維娜實行了變化圖形的方法。在她所教的各班中，從第一節幾何課起就廣泛地變化所示幾何圖形的形狀和平面位置。同時還進行認識幾何圖形的系統練習。在黑板上畫出圖來，讓學生說出這個圖上所有的或某些指定的幾何圖形的名稱。

第 164 女校的教師克·姆·利朴金也從第二季度開始在他

① 上述工作是在基洛夫區第 528 女校，第 626 女校和第 518 男校，列寧格勒區第 150 男校和第 164 女校以及基輔區第 103 男校的姆·伊·古德維洛維奇，克·克·烏瓦羅娃，奧·符·科茹霍娃，阿·符·維利亞耶夫斯卡婭，恩·符·科薩廖娃，恩·格·斯托勃洛夫斯基，伊·伊·果洛維娜，德·克·彼爾菲洛娃，克·姆·利朴金，奧·斯·沃朗指娃和阿·恩·索科洛娃各位教師班上進行的。作者謹對上述各位同志協助和參加所進行的調查表示深刻的謝意。

② 我們所謂的标准图形就是几何图形的形状和位置跟六年级几何课本（吉西略夫所編）上的几何图形完全一致的图。这种图有时也被称为书本上的图。至于几何图形的变化，我們是指變更要素間的关系說的，例如，在三角形所允許的範圍內變更它的边长。

③ 耶·恩·卡巴諾娃—美耳列尔，“图形在应用几何定理时的作用”，“苏俄教育科学院学报”，1950 年第 28 期。

④ 格·阿·弗拉基米爾斯基，“發展空間想象力的體系和方法的實驗基礎”，“苏俄教育科学院学报”，1949 年第 21 期。

⑤ 格·阿·弗拉基米爾斯基，“論在几何教學中怎樣利用圖形的方法”，“教學教學”雜誌，1946 年第 4 期。

所教各班实行了变化几何图形特征的方法。

第二章是分析计算题的解题过程。计算题所以引起作者的注意是因为在六年级里计算题比证明题和作图题讲得早，又因为它容易领会，所以通常对它的利用也比后两种题多些。在研究解题过程时，注意力不是集中于计算，而是集中于解法的几何部分。但是毫无疑问，反映着解法几何部分的思维过程的一般特点在某种程度上也就说明了作图题和证明题解题过程的特点。

第三章是分析掌握定理证法的过程。

大家知道，六年级学生是很难掌握定理证法的。但他们都感到哪些具体困难，产生这些困难的原因是什么，应该怎样克服这些困难——这些问题还没有十分弄清。弄清这些问题是有普遍意义的，因为无论在六年级里用什么方法教学定理，教学生会逻辑论证的任务总是不会取消的。解决这个问题可以利用各式各样的方法。恩·恩·尼基丁在他的六年级几何课本中主张对最初的一些定理进行实验的学习^①。但是，这位作者很正确地认为这种学习只是使教师有可能引导学生学会逻辑论证的一个阶段。

应当强调指出，本书绝非强求对掌握六年级几何教学大纲所包括的全部教材进行心理学的分析。教学工作中的许多重要部分暂时还有待于阐明，所以书中没有分析作图题和证明题的解题过程。

现在我们苏联学校正在普遍实现综合技术教育的思想。我们正在解决如下的任务：把几何教学跟周围生活，跟苏维埃人民的生产劳动联系起来，应当培养学生在解决具有实际价值的问

題時運用所學知識的技能和技巧。

因此，必須註六年級學生對周圍物體的空間形狀進行廣泛的觀察，使他們積累豐富的現實的幾何觀念和學會實用的技巧，這已經是公認的。主張在五年級里講授實驗的初步幾何課程以保證學生有很好的準備來掌握系統的幾何課程的人越來越多了。

上面列舉的這些任務向教師、教學法專家和心理學家提出了許多需要科學地解決的迫切問題。現在必須研究聯繫幾何知識和周圍現實的具體方式，培養實用的技巧和技能的过程，實地測量的組織工作等等。

本書是根據 1946—1951 年間的調查寫成的，當然不能直接回答與在六年級里實現幾何教學的綜合技術化直接有關的問題。但它在解決上述問題時並不喪失自己的意義，因為它的內容是以消除學生知識中的形式主義為目的的。本書是號召數學教師要使学生獲得牢固、透徹和實際有用的知識，要闡明各種幾何概念間所存在的關係，要使學生的知識系統化，要在教學中運用變化圖形的思想和發展概念的思想，要在教學中更好地運用語言和直觀性。

① 恩·恩·尼基丁，七年制學校初等幾何教程。六年級教材，莫斯科 1952 年版。

第一章 掌握几何概念过程的特点的心理分析。

語言和图形在講授概念阶段中的联系

前面已經指出，教师在利用几何图形时往往限于标准图形。因此在第 150 学校(在第 164 学校也有一部分)所进行的实验教学就給研究在本質不同的条件下掌握几何概念的过程提供了可能性。在被考察的某些班上講新概念时只让学生看一种图形，以后再看也还是原来的形状和位置。在另一些班上，就画几个形状和位置不同的图形，同时指出图形的哪些特征有了变化，而且总是着重指出并没有改变本質的，即图形定义(概念)所含的特征。

首先我們发现，图形特征的变更如果是从第一节几何課就实行的話，学生便认为这是一种完全自然的情形。譬如，他們很容易認識任何位置的角，同样也很容易画出頂点朝上或朝下，或任何其它位置的角。但在第二季度才开始变更图形特征的学校里，与平常不同的图形位置最初就引起了学生的惊奇甚至不同意。“現在画一条直綫”——教师一边說一边在黑板上斜着画一条直綫。“为什么这样？这不是直綫！”——学生紛紛地說。教师問：“那末这是什么綫呢？”学生回答：“曲綫！直綫不是这样的！”

这些事实說明，学生很容易习惯于認識和所画出标准形状

和位置相同的几何图形，反之，同样也很容易习惯于认识和所画出不同形状和位置的几何图形。但是，学生习惯了标准图形以后，在遇到非标准图形时就要感到困难。显然，学生所掌握的概念会跟一定形状的图形很容易和很迅速地联系起来（联想作用）。因此感知和认识图形的过程就具有一定的系统性，也就是说，这个过程是根据存在着的联系而进行的。当教师说他画一条直线时，学生就由于“直线”这个名词和一定形状的直线间的联系的表现而期待着看到某一种直线。画出了与寻常的位置不同的直线，当然就与他们的期待不合。联系所表现出来与平常不同，学生就迷失了方向。由于他们的天真，学生对教师的“错误”就发生了猛烈的反应。不过在进行了适当的解释以后，学生便很快改变过来。他们所掌握的概念和有关图形之间的联系也就变得更广泛，更正确了。

现在我们再来阐明上面所指出的教学过程中的差别对掌握概念的过程都有哪些影响的问题。

在只利用标准几何图形的学校里，我们观察到学生在学习新概念的那一课上就把所示图形的个别特征当作这个概念的一项内容（当作它的一项特征）。

举两个具体的事实。

某学校里讲授“对顶角”的概念。这两个角是按照标准形状画的（参看图1）。女教师解释说，如果一个角的两边是另一个角

① 这个论题的考察和实验是1949—1950学年在第626，第164，第103，第150各学校和1950—1951学年在第518学校进行的。在主要的实验中考察了36个学生（12个几何成绩优良的，12个几何成绩中等的和12个几何成绩较差的学生）。在补充的实验中考察了12个学生（4个优良的，4个中等的和4个较差的）。

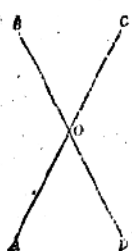


图 1 地回答说：“我画过了，我想它们的边是相等的。”

在另一学校里，教师讲授“半径”和“直径”的概念。他在圆里画了两条半径（参看图 2），说明了什么是半径。后来问：“一个圆里可以引多少条半径？”一个女生回答：“一个圆里可以引两

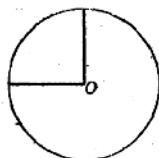


图 2

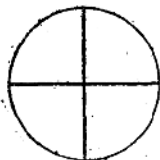


图 3

条半径。”第二个说：“随便多少条都行。”过了一会，教师在黑板上画了两条直径（参看图 3）。应当注意，半径和直径的位置是很整齐的。说明了什么是直径以后，除了其它问题以外，并提出如下的问题：“一个圆里可以引几条直径？”一个女生回答：“随便多

少条都行。”第二个回答：“一个圆里可引两条直径。”

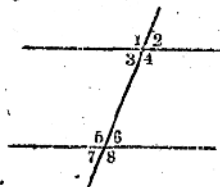


图 4

在第三个学校里，学生认识了两条直线与第三条直线相交所成各个角的位置和名称。黑板上所画的各个角是标注了数目字的（参看图 4）。下一课在黑板

上标注各角的数目字时把数字 7 和 8 的位置調換了。K 生被叫起来指出哪些是外錯角。K 生說：“第二和第七，第一和第八是外錯角。”女教師註他注意他所說的兩角的位置不是交錯的，而是位于割綫一边的。学生解釋說：“我学过的不是这样，我学过的是第二和第七，第一和第八。”

上述种种情况可以繼續列举下去，这就是說，学生把所示图形的个别特征当做了所講概念的本質特征，也就是說，他們不仅把教师所講的特征，而且把他們自己在图上辨别出来的特征都認為与所掌握的概念有关。总之，他們沒有把图形的本質特征跟仅属于所示图形的个别特征区别开来。

在講授概念时，所有仅仅指看一个图形或者虽然指看几个图形但形状和位置都是一样的学校里，都观察到类似的情形。

在从学年初就变化图形的形状和位置的班上，作者沒有遇到过学生把所示图形的个别特征当作概念所含本質特征的情况。第 164 学校的教师在第一学季里只利用标准图形，这个时期学生对图形的“粘性”就特別大。后来一开始变化图形的特征，上面所說的情况就越来越少見了。

这种教学的结果是完全符合規律的。在变化图形特征的条件下，学生不会把所講的概念跟图形的个别特征联系起来。例如，他們不会把两边“相等”理解作“对頂角”这个概念的内容之一，因为給他們看的对頂角有时是两边“相等的”，有时是两边“不等的”^①。关于两条直綫与第三条直綫相交所构成的各角，也

① 我們在这里以及后面虽然使用了学生所使用的角的“等”边和“不等”边这两个名詞，但我們当然明了这样說是錯誤的，因为角的边是射綫，所以我們要提醒教師們，在教学中利用它們是不正确的。

不会根据它们的标记的特征来辨别，因为这些标记是用各种不同的符号来标注的。例如，在第150学校的课堂教学中，一个图上的角是用数字标注的，另一个图上是字母标注的，第三个图上画了两条割线，各角是数字和字母并用来标注的。

可见，变化图形的特征可以帮助学生把概念所含的本质特征跟所示图形的个别特征区别开来，但图形的标准性却使这种区别发生了困难。

为了解困难的原因，重要的是要考虑到学生往往不能想象所示图形会有与原来不同的形状；不理解可能在自己的观念中改变图形，纵然能够改变也是很不够的。作者在课堂上也遇到了学生在自己的观念中把所示图形改变得很不够的情况。

例如，在某个学校里，女教师在讲授“直径”的概念时在黑板上画了一条垂直位置的直径。一个女生在回答圆内直径的数目问题时说：“圆内可以画两条直径。”原来她只想象到另一条水平位置的直径。

所观察到的这些事实，使我们有可能进行一套专门实验，以明了如果只给学生看标准图形，那时他们所掌握的几何概念的范围怎样^①，他们怎样才能在自己的想象中走出所示图形的范围。

被实验的学生的几何成绩是不等的，也就是说，被研究的学生有优等的，有中等的，有劣等的。所用的两个概念是“直径”和“直角”。目的是明了学生怎样想象圆内直径的数量和位置，他们所想象的直角位置是怎样的。为了使学生充分理解我们关于直径位置和直角位置所提的问题，我们利用了最初几课上所讲过的“线段”概念，并且努力使学生理解到直线的线段不仅可

以有长短的不同,而且可以有平面位置的不同。

結果,五个学生(十二个之中)确实理解了圓內随便引多少条直徑都行。其余成績較差学生的直徑观念就仅限于給他們看过的那个数目,縱然多了些,也是很有限的。有些学生只画了一条直徑,而且永远除了垂直位置就是水平位置。另外一些学生画了两条他們所看到过的那种位置的直徑,說圓里只能画两条直徑。有些学生画了四条直徑,但位置仍然是摆得整整齐齐的(參看图5)。值得注意的是,有一个学生画了四条直徑,停了一会儿又画上了第五条,于是他說圓里随便引多少条直徑都行。

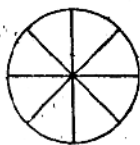


图 5

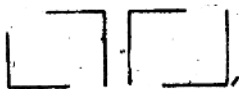


图 6

在关于直角的实验中,也得到类似的结果。三个学生(十二个之中)立刻說直角可以画任何的位置,并且确实給它画了任何的位置。另一些学生只会給直角画四种位置(參看图6),相当于正方形的四个角,各边画得跟练习簿或黑板的各边平行,虽然其中有几个人也說直角可以占有任何的位置。在个别情况下,有些学生只能給直角画一种位置(參看图6左方的角),不能給它再画另一种位置^①。

上述的材料說明許多学生的几何观念仅限于图形的对称的

① 所謂某个学生具有的概念的范围,就是他認為属于某一概念的图形的总数。

② 以后我們把这种直角位置叫做标准位置。

和方正的位置。我們現在來談談怎樣依靠實驗者(教師)的幫助實現擴大大學生上述這種概念的範圍的過程。

D是個中等生。

實驗者說：你畫一個圓，并在其中把直徑畫出來①。

D畫了一個圓和兩條直徑，一條是垂直位置的，一條是水平位置的。

實驗者說：一個圓里可以引多少條直徑？

D說：兩條。

實驗者說：還能再引嗎？

D說：不能了。

實驗者拿一個圓和畫得跟圖紙底邊成 45° 角的直徑給他看。

并說道：這是什麼？

D說：直徑。

實驗者說：那末可以再畫幾條直徑？

D說：可以再畫兩條(引直徑如圖5)。

實驗者又拿另一張圖紙給他看，上面畫着與紙邊大約成 60° 角的直徑。

D說：隨便多少條都行，剛才我說錯了，我原想只有兩條。

實驗者說：為什麼剛才你這樣想呢？

D說：我弄錯了；因為原來給我看的就是兩條。

C是個成績較差的学生。

實驗者說：你畫個直角。

C畫了個標準位置的直角。

實驗者說：可以畫出其它位置的直角來嗎？

C說：不能。

实验者让他看左起第三个(图6)那种位置的直角。

并說道：这是什么？

C說：直角。

实验者說：直角可以有多少种位置？

C說：两种(停了一会儿)。不，多少种都行。

实验者說：你把角的各种位置画一画。

C想了很久，最后画了图6上面第四个角那种位置的角。后来又停了較长的时间，画出了第二个角那种位置的角。

实验者說：再画。

C說：不能再画了，只有四个。



图 7



图 8

实验者让他看又一种位置的直角(参看图7左面的角)。

并說道：这是什么？

C說：直角，原来有八个(画了图7所示那些位置的四个角)。

实验者又让他看另外一种位置的角(参看图8)。

① 为了簡捷起见，在这里和后面都把纪录中学生述說概念定义的部分略去。如果学生述說的定义不正确，談話中就在把錯誤弄清后加以改正了。