平面几何解题思路

——辅助线

北京四中　赵惠民

海洋出版社

封面设计：宝克孝

统一书号：7193 · 0823

定　　价：0.80 元

平面几何解题思路

——辅 助 线

北京四中 赵惠民 编著

海 洋 出 版 社

1986年·北京

内 容 简 介

北京四中赵惠民老师，把自己多年的平面几何教学经验荟萃于此书。在书中，他归纳了辅助线的类型，介绍了添加辅助线的规律和方法，讲思路，讲训练，并结合重要内容选配了练习题，以使学生举一反三，触类旁通，掌握一套行之有效的学习和解题方法。可以说，本书为学习平面几何提供了一把金钥匙，是全国广大中学生和自学青年的良师益友。

责任编辑：齐庆芝
责任校对：刘兴昌

平面几何解题思路
——辅助线
北京四中　赵惠民　编著

海洋出版社出版（北京市复兴门外大街1号）
新华书店北京发行所发行　　昌平振兴胶印厂印刷
开本：787×1092 1/32　印张：5　字数：100千字
1986年11月第一版　　1986年11月第一次印刷
印数：1—2[illegible],000

统一书号：7193·0823　　定价：0.80元

告 读 者

这本书是讲加辅助线的思考方法的，是讲解题思路的书。

书中分三种情况说明添加辅助线时我们是怎么想的：

一、学习现成的方法；

二、按照自己的需要去做；

三、试探、摸索着前进。

辅助线是很不好讲的，尤其是很不容易讲好的，但又是教与学中迫切需要解决的，所以不揣孤陋，愿将想到的问题举例说一说，希望得到各方面的指导。

赵意民

1985.6

目　　录

第一章　学习现成的方法

平面几何这门学科相当古老了，其中的辅助线也是这样。前人有许多现成的经验，我们还是先把它拿过来，“详细地占有资料”，一方面用以证一部分题，另一方面丰富见闻，作为自己研究辅助线的基础。

现行课本在第三章开头讲到三角形内角和为180°时，提出“为了证明的需要，在原来图形上添画的线叫做辅助线”，还说：“在平面几何里，辅助线通常画成虚线”。并在全等三角形和等腰三角形之后讲“基本作图”。

一、必须应用公法和基本作图

这里首先要强调的是，学习添加辅助线最基本最重要的事情是准确无误地应用下述公法和基本作图。

公法指的是：

1．过两个已知点作一条直线。

2．把一条已知线段延长到任意长。

3．在一条已知直线上截取一条线段等于一条已知的线段。

4．以已知的点为圆心，已知的长为半径作一个圆。

基本作图指的是：

1．作一个角等于已知角。

2. 作已知角的平分线。

3. 过已知直线上的一点作这条直线的垂线。

4. 过已知直线外的一点作这条直线的垂线。

5. 作线段的垂直平分线。

6. 过已知直线外的一点作这条直线的平行线。

正是因为有的学生不注意这些作图，导致添加辅助线时产生错误，所以必须强调这一点。说"准确无误"，主要指的是作什么线就是什么线，不要附加另外的内容。

例如，在图 1-1 中，已知 D 是$\triangle ABC$ 的 AB 边中点，想作一条辅助线，说"作 $DE \parallel BC$ 且使 $AE=EC$"，这就不对了。一切辅助线都必须严格按照基本作图的方法去作。只能说"作 $DE \parallel BC$，交 AC 于 E"，至于 E 点是否平分 AC，这条辅助线就管不了啦。接下来可以证明，在$\triangle ABC$ 中 $AD=DB$，$DE \parallel BC$，所以$AE=EC$，根据是"过三角形一边中点，平行于另一边的直线，必平分第三边"。这个"平分"是证出来的，不是辅助线做出来的。

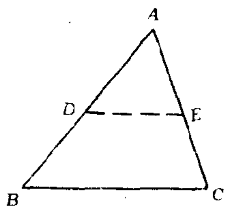

图 1-1

再如在图 1-2 中，已知梯形 $ABCD$ 中 $AB \parallel CD$，想作一条辅助线，说"作 $CE \perp DB$"可以，但不能说"在$\triangle AEC$中"。因为还没证A、B、E三点共线；若说"作$CE \perp DB$，使E点在 AB 的延

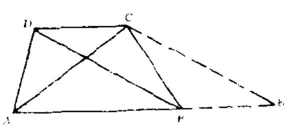

图 1-2

长线上"，就更不对了。基本作图中只有：（1）过DB外一点C，作DB的平行线，(2)在所作的这条直线上截取$CE=DB$，不能另附条件，说这个E点还恰好在AB的延长线上。

那么，怎样做才好呢？最好是"作$CE \parallel DB$交AB的延长线于E"，至于CE与DB是否相等，可以另证。由于$CE \parallel DB$，$AB \parallel DC$，四边形$DBEC$是平行四边形，所以$CE=DB$。

因此，要谈辅助线，先谈基本作图并不是"莫名其妙"，而是"理所当然"。

二、十八种辅助线

下面想结合课本教学进度，谈一谈一个学生学到哪一阶段，应该会用哪一种辅助线。

1．四边形连结对角线

学过三角形全等以后，习题中有一道题：

已知：如图1-3，$AB=AE$，$\angle B=\angle E$，$BC=ED$，F是CD的中点。

求证：$AF \perp CD$。

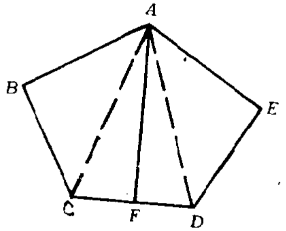

图 1-3

分析：$ABCDE$是五边形，$ABCF$与$AFDE$都是四边形，不但当时没学四边形和五边形性质，就是学完两册平面几何，也只是能求内角和的度数与对角线的条数，并无其他性质。所以要连结四边形对角线化为两个三角形来解决。

在四边形$ABCF$与$AFDE$中分别连结对角线AC、AD，可

证$\triangle ABC \cong \triangle AED$；$\triangle ACF \cong \triangle ADF$。于是问题得到解决。

这个用法延续到平行四边形，从定义推出性质时，就是连结对角线证明三角形全等，才得到平行四边形对边相等，对角相等。

在任意四边形问题中，连结对角线成为常用的辅助线，如果记住、会用，那么习题中已知如图1-4，AD边最大，BC边最小，求证：$\angle B > \angle D$，这就容易想了。连结DB，在$\triangle ABD$中$AD > AB$（因为在四边形$ABCD$的四条边中AD最大，即AD比AB大），所以$\angle 1 > \angle 2$；在$\triangle BCD$中，$DC > BC$（因为BC最小，亦即BC比DC小），所以$\angle 3 > \angle 4$，两式加起来就可以了。

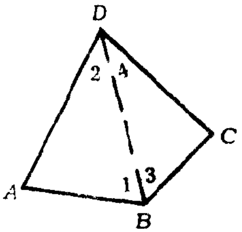

图 1-4

2. 等腰三角形加顶角平分线

现行课本是全等三角形在前，等腰三角形在后，在讲等腰三角形性质与判定时，都要加顶角平分线把等腰三角形与全等三角形联系起来，用边、角、边与角、角、边进行证明。若等腰三角形在前就要借助轴对称，用翻转重合的办法推出等腰三角形两底角相等，以及顶角平分线垂直平分底边。总之，都需要这条辅助线。

3. 两边不等的三角形，长边截、短边接

学了等腰三角形性质之后，证明一个三角形中大边对大角时，就用到长边截这种辅助线，制造等腰三角形，用二底角相等及三角形外角定理。

若采用短边接的办法也一样：延长AC到D，使$AD = AB$，有$\angle ABD = \angle D$，仍用三角形外角，得$\angle ACB > \angle D$，

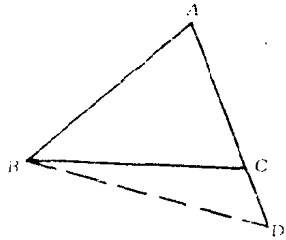

图 1-5

而$\angle D=\angle ABD$，$\angle ACB>\angle ABC$。

4．在较大的角内作一个较小的角

学了等腰三角形判定之后，证明一个三角形中大角对大边时就用了这种辅助线，但用这种辅助线的时候不多，想记牢、能用得格外下功夫，熟悉托勒密定理的目的之一就是学习这种辅助线的用法。

5．从三角形内心（或两外角平分线的交点）向边引垂线

作出这种辅助线就能用“角平分线上的点到角两边距离相等”这条性质。证明三角形三条角平分线交于一点就是使用了这种辅助线。若有了这种认识，遇到下面习题就好办了。已知：如图 1-6，在$\triangle ABC$中，外角$\angle CBD$和$\angle BCE$的平分线BF、CF交于点F，求证：点F在$\angle DAE$的平分线上。能立即作出$FM\perp AD$于M，$FN\perp BC$于N，$FP\perp AE$于P，再证三线共点就与例题相同了。

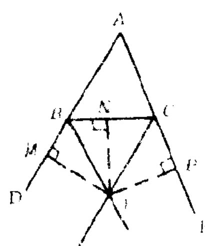

图 1-6

利用三角形两边的垂直平分线的交点作辅助线也与此类似，只要将这交点与三角形三顶点分别连结起来就行了。

6．延长三角形中线等于它本身

制造全等三角形常用这种辅助线。如图 1-7，已知 D 是 BC 中点，延长 AD 到 E，使 $DE=AD$，得到 $\triangle BED \cong \triangle CAD$，就有对应边相等，对应角相等。经过等量代换，达到移动线段和角的位置的目的。连结 EC，得到平行四边形，还有平行线可用。

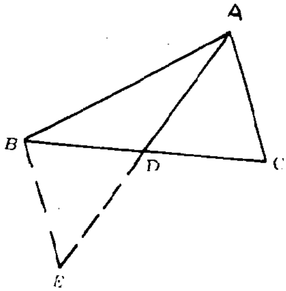

图 1-7

学过三角形这一章后，复习参考题中有这个内容，有的题还要用这种方法，以后在四边形和圆中特别是综合题中有时也要用。

7．平行四边形添齐两条对角线，即已有一条对角线，就再连结一条对角线

学习平行四边形性质判定的综合题时，有的题不涉及对角线，有的题提出有关对角线的条件，例如在▱$ABCD$ 的对角线 AC 上取 E、F 两点，使 $AE=CF$，常将另一条对角线 BD 连结起来作为辅助线。平行四边形对角线互相平分，指的是两条对角线之间的大小、位置关系，不画出第二条对角线就无法应用这条性质。连结起来，用对角线证题，往往比其他办法（例如利用对边相等为条件证两个三角形全等）要简便。

8．梯形常用辅助线

梯形常用的辅助线有平移腰、平移对角线、作一条或两条高、延长两腰交于一点、作出梯形中位线这么几种．其目的是把不熟悉的图形化为熟悉的图形。平移腰出现平行四边形与三角形，同时得两底差；平移对角线，出现平行四边形与三角形，同时得两底和；作高得直角三角形，尤其是等腰

梯形常常同时作两条高得到全等的两个直角三角形与矩形；延长两腰化为三角形问题，因为有平行线，于是有同位角和相似形、比例线段可用。平行截割定理的证明过程中所引用的辅助线一般与梯形平移腰相同。若已知有一腰中点，可取另一腰中点连结得到梯形中位线.

9．定中点和用中点

过三角形中位线以后，为了应用这个性质，若是一个三角形有两边中点，就连结起来用中位线性质；若是有两边中点连线而无第三边，就连起第三边来。例如“求证：顺次连结等腰梯形各边中点得到一个菱形”，若是三角形有一边中点，可以再取另一边中点，连结中位线；或是过一边中点到另一边的平行线也可以证出第三边中点接着再用中位线性质。

10．引平行线作等积变形

这种辅助线多用在保持面积不变、减少边数或面积计算中的变化。如图 1-8，在任意四边形 $ABCD$ 中，连结对角

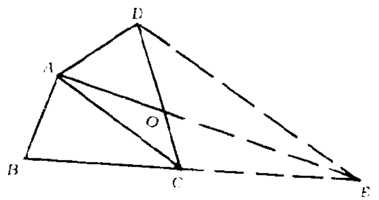

图 1-8

线 AC，作 $DE\parallel AC$ 交 BC 的延长线于 E，再连结 AE，交 DC 于 O，这时 $S_{\triangle ADC}=S_{\triangle AEC}$，于是 $S_{ABCD}=S_{\triangle ABE}$，这就是等积变形。还可以证明 $S_{\triangle AOD}=S_{\triangle EOC}$，因而 $S_{\triangle ADE}=S_{\triangle CDE}$。

11．作出平行线制造相似形，得比例线段

直线形中比例线段问题多数靠添加平行线，用平行截割

定理和相似三角形。

12．作出弦心距

如图 1-9 中作 $OE\perp AB$ 于 E，或连接弦 CD 的中点 F 与圆心 O，得到 $OF\perp DC$，这两种辅助线多用在比较弦的大小或需要平分弦、垂直弦的时候。

13．连接圆上点，得圆内接四边形

连接圆点，得圆内接四边形之后再连结两条对角线，找出四组同弧上的圆周角，它们分别相等。如图 1-10，$\odot O$ 中弦 AB、CD 相交于 E，若将 AD、DB、BC、AC 分别连结以后，得到$\angle 1=\angle 2$，$\angle 3=\angle 4$，$\angle 5=\angle 6$，$\angle 7=\angle 8$，这是经常要用的。有时候给的是已知$\triangle ABC$ 的外接圆，另外过 C 点引一条直线例如$\angle C$ 的平分线和圆交于 D 点，实际上仍是相交弦，无非 AC、BC 已连结，再连 AD、BD，还是要找到四组相等的角。

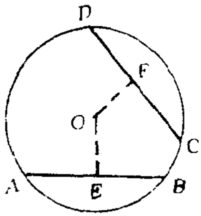

图 1-9

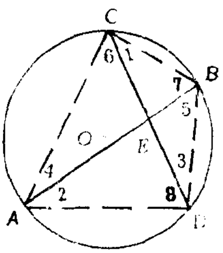

图 1-10

14．连接圆上点，得直径上的圆周角

这是在有了圆的直径时常用的方法。如图 1-11，$\odot O$ 是$\triangle ABC$ 的外接圆，AD 是$\odot O$ 的直径，这时无论连结 BD 还是连结 DC，都可以得到直径 AD 上的圆周角$\angle ABD$ 或$\angle ACD$ 等于直角。

15. 连接圆心和切点

根据圆的切线的定义如图 1-12，MN 切$\odot O$ 于 A，就是直线 MN 和$\odot O$ 有唯一的公共点 A，这个点即切点，辅助线是连结 OA，得到 $OA \perp MN$，切线长定理和弦切角定理都是用这条辅助线推导出来的。

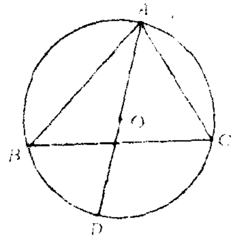

图 1-11

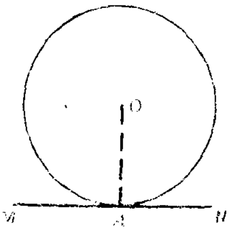

图 1-12

16. 有了弦切角，找到相等的圆周角

有了弦切角之后，找到相等的圆周角，再连结圆上两点，制造弦切角两边所夹弧上的圆周角

如图 1-13，在$\odot O$ 中 AB 是弦，AC 是切线，那么$\angle BAC$是弦切角，这时无论连结优弧 $\overset{\frown}{AmB}$ 上除 A、B外的哪一点（例如 D 点），都可以得到与$\angle BAC$ 相等的圆周角（例如$\angle ADB$）。

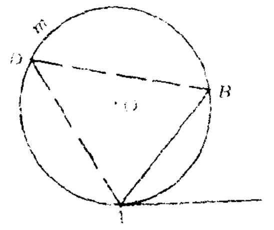

图 1-13

17. 两圆公共弦和内、外公切线

两圆相交往往连结公共弦；两圆外切，往往添内公切线；两圆内切，往往添外公切线。目的都是为了出现与两圆都有关系的角，以便形成联系两圆间的元素。

18. 作两圆公切线的平行线

两圆外离、外切或相交时，从小圆圆心作外公切线的平行线得到矩形和直角三角形以便推理计算；两圆外离时可以用同样方法作内公切线的平行线。

随着教材进度，一个初中学生应该会作哪种辅助线，已如上述。假如懂了、记住了，就算做到第一步："已知道"。

第二步还得："能想到"。即自己证题时该用哪条能想得起来。"知道"是知识，"想到"就是训练了。

"还会用"是第三步，也就是学习辅助线的目的。"辅助线不在于添，而在于添了以后得到什么"。无的放矢，只能添乱。只有得到了新的图形性质，联系其他条件，继续推理，问题才可望解决。

三、例　　题

下面举几个例题，看看这十八种辅助线的应用。

例 1. 求证： 四边形任意一边小于其他三边和.

分析： 如图 1-14，连结 BD，有 $AB<AD+DB$，而 $DB<DC+CB$，所以 $AB<AD+DC+CB$。

例 2. 已知： 如图 1-15，$\triangle ABC$ 中 $AB=AC$，$CD\perp BA$的延长线于 D。

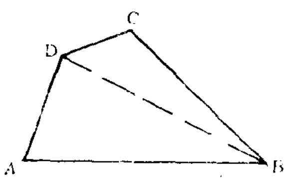

图 1-14

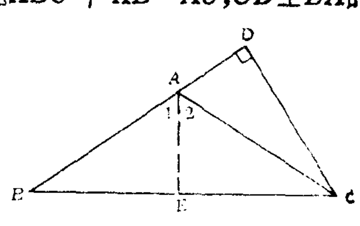

图 1-15

E：$\angle BAC=2\angle BCD$。