

郝雨淋 主编

51.23
LJL

507878

几何 解析 平面

智能
训练



平面解析几何智能训练

刘金玲 蔡玲 许炽雄 彭玉兰 编
常克峰 段剑虹 翟淑英 郝雨淋

农村读物出版社

平面解析几何智能训练

主编 郝雨淋

责任编辑 王炜昆

农村读物出版社 出版

北京日报印刷分厂印刷

新华书店北京发行所 发行

*

787×1092毫米 1/32 13.2 印张247千字

1989年1月第一版 1989年1月北京第一次印刷

印数：1—16300 定价：3.10元

ISBN 7—5048—0531—9 / C·183

目 录

第一章 直角坐标系、曲线与方程..... (1)

甲组题..... (1)

一、坐标概念..... (1)

二、基本公式..... (3)

三、曲线与方程..... (8)

乙组题..... (12)

提示或答案..... (18)

第二章 直线..... (55)

甲组题..... (55)

一、直线的方程..... (55)

二、直线间的关系..... (61)

乙组题..... (67)

提示或答案..... (74)

第三章 圆锥曲线..... (128)

甲组题..... (128)

一、圆..... (128)

二、椭圆..... (136)

三、双曲线..... (145)

四、抛物线..... (152)

五、圆锥曲线的切线..... (160)

乙组题.....	(165)
提示或答案.....	(176)
第四章 坐标变换	(298)
甲组题.....	(298)
一、坐标轴的平移.....	(298)
二、坐标轴的旋转.....	(303)
乙组题.....	(307)
提示或答案.....	(309)
第五章 极坐标与参数方程	(344)
甲组题.....	(344)
一、极坐标.....	(344)
二、参数方程.....	(350)
乙组题.....	(362)
提示或答案.....	(370)

第一章 直角坐标系、曲线与方程

甲 组 题

一、坐标概念

1. 选择题*

(1) 设 A 、 B 、 C 是同一直线上的三个点，那么不论它们的位置怎样，恒成立的是 ()

(A) $AB + BC = 0$; (B) $AB + BC = AC$;

(C) $AB + BC = CA$; (D) $BC + CA = AB$.

(2) 在 x 轴上 A 点的横坐标为 -3 ， B 点也在 x 轴上，且 $AB = -2$ ，则 B 点的横坐标是 ()

(A) -2 ; (B) 2 ;

(C) -5 ; (D) 1 .

(3) 在 y 轴上 A 点的纵坐标为 -3 ， B 点也在 y 轴上，且 $BA = 5$ ，则 B 点的纵坐标是 ()

(A) 5 ; (B) -8 ;

(C) 8 ; (D) 2 .

(4) 设 P_1 、 P_2 、 P_3 、 P_4 是直线上的任意四点，则

$P_1 P_2 \cdot P_3 P_4 + P_1 P_3 \cdot P_4 P_2 + P_1 P_4 \cdot P_2 P_3 = ()$

• 本书的选择题都是给出字母代号为 (A)、(B)、(C)、(D) 的四个答案，其中只有一个答案是正确的，试把正确答案的字母代号填入括号内。

(A) $P_1 P_4$; (B) $P_1 P_3$;

(C) $P_2 P_4$; (D) 0 .

(5) 已知矩形 $ABCD$ 的中心与原点重合, 且对角线 AC 与 x 轴重合, 点 D 在第二象限, $|AB| = \sqrt{6}$, $|BC| = \sqrt{3}$, 则 D 点的坐标为 ()

(A) $(-\frac{3}{2}, 3\sqrt{2})$; (B) $(-\frac{1}{2}, \sqrt{2})$;

(C) $(-\sqrt{2}, \frac{1}{2})$; (D) $(-3\sqrt{2}, \frac{3}{2})$.

(6) $A(a, b)$ 关于原点的对称点是 ()

(A) (b, a) ; (B) $(-b, -a)$;

(C) $(-a, -b)$; (D) $(-a, b)$.

2. (1) $ABCDEF$ 是边长为 a 的正六边形, 按下列三种不同的位置(图 1-1), 分别求出各顶点的坐标和中心的坐标;

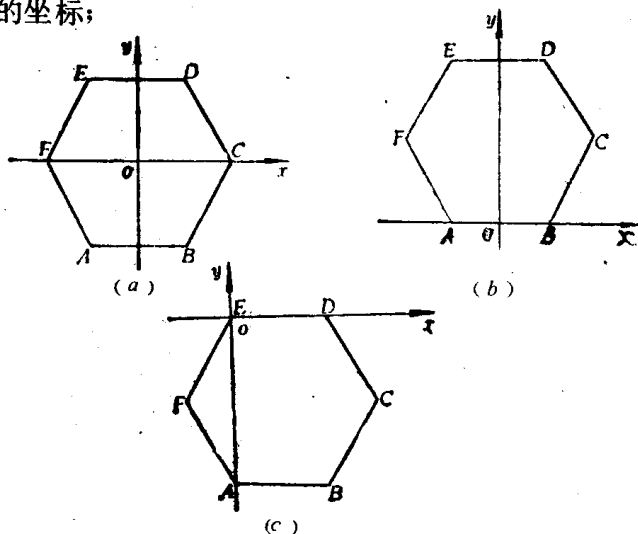


图 1-1

(2)如图 1-2, A 、 B 、 C 是某零件上的三个孔, 它们在半径为 32 的圆周的三等分点上, 试选取适当直角坐标系, 求 A 、 B 、 C 的坐标 (精确到 0.1)。

3. 两圆相交于点 A 和点 B , 若 A 的坐标是 $(5, -\sqrt{5})$, 根据下列条件求另一交点 B 的坐标。

(1) 二圆心都在 x 轴上; (2) 二圆心都在 y 轴上;

(3) 二圆心都在直线 $y = -2$ 上。

4. (1) 如图 1-3, A 、 B 的坐标分别是 $(5, 2)$ 和 $(-3, 4)$, 有向线段 AB 在 x 轴和 y 轴上的射影分别是

$A_x B_x$ 和 $A_y B_y$, 求有向线段 $A_x B_x$ 和 $A_y B_y$ 的数量;

(2) 若 A 、 B 的坐标分别是 (x_1, y_1) 、 (x_2, y_2) , AB 在 x 轴和 y 轴上的射影分别是 $A_x B_x$ 和 $A_y B_y$. 求证:

$$A_x B_x = x_2 - x_1, \quad A_y B_y = y_2 - y_1.$$

二、基本公式。

5. 选择题:

(1) $A(\sin \theta, \cos \theta)$ 、 $B(\cos \theta, -\sin \theta)$ 两点间的距离是 ()

(A) $2\sqrt{\sin \theta \cos \theta}$;

(B) $2 \sin \theta \cos \theta$;

(C) $\sqrt{2}$;

(D) 2.

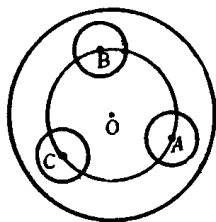


图 1-2

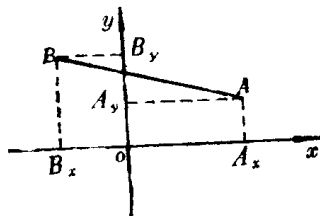


图 1-3

(2) 设 $P_0(1, 2)$, 在 x 轴上求一点 P , 使得 $|P_0P| = 5$, 则 P 点坐标为 ()

- (A) $(2, 0), (0, 0)$; (B) $(1 - \sqrt{21}, 0)$;
(C) $(1 + \sqrt{21}, 0)$; (D) $(1 + \sqrt{21}, 0), (1 - \sqrt{21}, 0)$.

(3) 已知点 A 到点 $B(2, 3)$ 的距离等于 5, 且 AB 与 y 轴平行, 则 A 点的坐标为 ()

- (A) $(3, 7)$ 或 $(3, -3)$; (B) $(3, -7)$ 或 $(3, 3)$;
(C) $(2, -8)$ 或 $(2, 2)$; (D) $(2, 8)$ 或 $(2, -2)$.

(4) 有一条线段的长度是 5, 它的一个端点是 $A(2, 1)$, 另一个端点 B 的横坐标是 -1 , 则这个端点的纵坐标是 ()

- (A) 5; (B) 5 或 -3 ; (C) -3 ; (D) 3 或 -5 .

(5) 以 $A(-3, 4)$ 、 $B(4, 3)$ 、 $C(3, -4)$ 为顶点的三角形是 ()

- (A) 等腰三角形; (B) 等边三角形;
(C) 直角三角形; (D) 等腰直角三角形.

(6) 设线段 $|P_1P_2| = 1 \text{ cm}$, 点 P 在 P_1P_2 的延长线上, $|P_2P| = 2 \text{ cm}$, 则点 P 分 P_1P_2 所成的比是 ()

- (A) $-\frac{1}{2}$; (B) $-\frac{2}{3}$; (C) $-\frac{3}{2}$; (D) $\frac{3}{2}$.

(7) 已知点 P 分线段 AB 的定比为 $\lambda = \frac{AP}{PB}$, 如果 P 在 BA 的延长线上, 则 λ 所在的区间为 ()

- (A) $(-\infty, -1)$; (B) $(-1, 0)$;
(C) $(-\infty, 0)$; (D) $[-1, 0)$.

(8) 已知 C 点外分 AB , 且 $\lambda = \frac{AC}{CB} = -3$. 如果把 B 点

看成 AC 的内分点, 那么 $\lambda = \frac{AB}{BC} = ()$

(A) 2; (B) $\frac{1}{2}$; (C) $\frac{1}{3}$; (D) 3.

(9) 点 P 分 $P_1 P_2$ 的比为 λ_1 , 点 P 分 $P_2 R$ 的比为 λ_2 , 则下面哪个答案对? ()

(A) λ_1 、 λ_2 互为相反数; (B) λ_1 、 λ_2 互为倒数;
(C) λ_1 、 λ_2 相等; (D) λ_1 、 λ_2 互为负倒数;

(10) 三角形 ABC 的三个顶点为 $A(0, 0)$ 、 $B(4\sqrt{2}, 4\sqrt{2})$ 、 $C(-3\sqrt{2}, 3\sqrt{2})$, 则 $P(0, 2\sqrt{2})$ 是 $\triangle ABC$ 的 ()

(A) 重心; (B) 内心; (C) 外心; (D) 垂心.

(11) 如果三点 $A(1, -5)$ 、 $B(a, -2)$ 、 $C(-2, -1)$ 在一条直线上, 则 a 的值为 ()

(A) 1; (B) 0; (C) $-\frac{5}{4}$; (D) $\frac{5}{4}$.

(12) 动点在 xoy 平面上沿一直线作匀速直线运动, 开始的第一秒内它从点 $A(1, 1)$ 移动到点 $B(3, 2)$, 那么 t 秒后动点 (x, y) 的位置是 ()

(A) $(2t+4, t+3)$; (B) $(\frac{3t-1}{t-1}, \frac{2t-1}{t-1})$;

(C) $(1+2t, 1+t)$; (D) $(\frac{3t+2}{t}, \frac{2t+1}{t})$.

6. 以我军某海岛观察站为原点, 以向东和向北的方向分别作为 x 轴和 y 轴的正方向. 今测得欲窜扰我沿海的敌舰, 位于海岛东 10 海里, 北 12 海里. 而我军炮艇在海岛西 1 海里, 北 3 海里. 试求敌舰与我炮艇间的距离 (精

确到0.1海里)。

7. (1) 点 M 和点 $A(-1, -1)$ 的距离是 5, 和 x 轴的距离是 3, 求点 M 的坐标;

(2) 点 M 到 y 轴的距离与到点 $A(-4, 2)$ 的距离都等于 10, 求点 M 的坐标;

(3) 点 $A(1, 1)$ 到点 B 的距离是 5, AB 中点的横坐标是 3, 求点 B 的坐标.

8. $\triangle ABC$ 的顶点是 $A(2, -3)$ 、 $B(1, 3)$ 、 $C(-6, -4)$, 求:

(1) 与 A 点关于直线 BC 的对称点 A_1 的坐标;

(2) $\triangle ABC$ 的周长.

9. (1) 点 $C(2, 3)$ 把线段 AB 分成比 $\lambda = \frac{1}{2}$ 的两部分,

已知 A 点的坐标是 $(1, 2)$, 求 B 点的坐标;

(2) 线段 AB 的端点为 $A(x, 5)$ 、 $B(-2, y)$, 在 AB 所在的直线上取一点 $C(1, 1)$, 使 $|AC| = 2|BC|$, 求 A 、 B 的坐标.

10. (1) 利用线段的定比分点公式, 求连结 $A(4, 1)$ 和 $B(-2, 4)$ 的直线与 x 轴、 y 轴交点的坐标;

(2) 若三角形二顶点 $A(3, 7)$ 、 $B(-2, 5)$, 求第三个顶点 C , 使 AC 的中点在 x 轴上, BC 的中点在 y 轴上;

(3) 在 $\square ABCD$ 中, 已知两个顶点 $A(-4\frac{1}{2}, -7)$, $B(2, 6)$ 及对角线交点 $O(3, 1\frac{1}{2})$, 求点 C 和点 D 的坐标.

11. 已知 $A(3, -2)$ 、 $B(5, 2)$ 、 $C(-1, 4)$.

(1) 以 AB 和 BC 为边作 $\square ABCD$, 求顶点 D 的坐标;

(2) 以 A 、 B 、 C 、 D 为顶点作 $\square ABCD$, 求顶点 D 的坐标.

12. (1) 已知三角形的三个顶点 $A(1, 0)$ 、 $B(4, -1)$ 、

$C(3, 3)$, 求它的重心的坐标;

(2) 已知三角形三个顶点为 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$, 求它的重心的坐标;

(3) 在点 $P_1(x_1, y_1)$ 、 $P_2(x_2, y_2)$ 上分别放置重量是 m_1 、 m_2 的两个质点, 求它们的重心坐标;

(4) 两条均匀的细棒各长 6 厘米和 8 厘米, 连结成直角, 求它们的重心的位置.

13. $\triangle ABC$ 的三个顶点是 $A(4, 1)$ 、 $B(7, 5)$ 、 $C(-4, 7)$. 求 $\angle A$ 的平分线和 BC 边交点的坐标.

14. (1) 若直线经过 $(a, 0)$, 并且与 x 轴垂直, 那么倾斜角 $\alpha = ?$ 斜率 $k = ?$

(2) 若直线经过 $(0, b)$, 并且与 y 轴垂直, 那么倾斜角 $\alpha = ?$ 斜率 $k = ?$

(3) 若直线方程是 $y = \sin \frac{\pi}{2} \cdot x + 3$, 那么 $\sin \frac{\pi}{2}$ 是否该

直线的斜率? $\frac{\pi}{2}$ 是否该直线的倾斜角?

15. (1) 在 y 轴上求一点 M , 使它与点 $(-\sqrt{3}, 1)$ 的连线的倾斜角为 120° ;

(2) 已知点 $M(2, 2)$ 和 $N(5, -2)$, 在 x 轴上求一点 A , 使 $\angle MAN$ 为直角.

16. (1) 设直线 AB 的倾斜角等于由 $C(3, -5)$ 、 $D(0, -9)$ 两点所确定的直线的倾斜角的 2 倍, 求直线 AB 的斜率;

(2) 设 A 、 B 的坐标分别是 (x_1, y_1) 和 (x_2, y_2) , 直线 AB 的倾斜角是 α , 求证:

$$|x_2 - x_1| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \cdot |\cos \alpha|.$$

17. 一条光线从 $A(-2, 3)$ 射入, 经 x 轴反射后经过 B

(5, 7)点, 求光线在 x 轴上哪一点反射?

18. 用解析法证明:

(1) 平行四边形各边的平方和等于对角线的平方和;

(2) $A(0, -2)$ 、 $B(4, 2)$ 、 $C(0, 6)$ 、 $D(-4, 2)$ 是矩形的四个顶点;

(3) 若三角形的三边有关系式: $a^2 + b^2 = c^2$, 则为直角三角形;

(4) 以直角三角形的每边为边向外作正方形, 则连结直角边上正方形中心的线段与连接斜边上的正方形中心与直角顶点的线段互相垂直并且相等.

三、曲线与方程

19. 选择题:

(1) 方程 $y^2 + Ax + By + C = 0$ 的曲线经过原点, 那么必然有 ()

(A) $A = 0$; (B) $B = 0$;

(C) $C = 0$; (D) 不能确定.

(2) 已知曲线 $x^2 - 3y^2 + (a^2 - 1)x = 0$ 关于 y 轴对称, 则 a 的值为 ()

(A) 1; (B) 0; (C) ± 1 ; (D) 任何实数.

(3) 如果方程 $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ ($D^2 + E^2 - 4F > 0$) 所表示的曲线关于直线 $y = x$ 对称, 那么必有 ()

(A) $D = E$; (B) $D = F$; (C) $E = F$;

(D) $D = E = F$.

(4) 曲线 $x^2 + 2xy + y^2 - 2x - 3 = 0$ 在 x 轴上的截距是 ()

(A) -1 和 -3; (B) 3 和 -1;

(C) $\pm \sqrt{3}$; (D) $\sqrt{3}$.

(5) 曲线 $3x^2 + 4y^2 - 6x + 16y + 7 = 0$ 的范围是()

(A) $x \in [1, -3]$, $y \in [2 - \sqrt{3}, 2 + \sqrt{3}]$;

(B) $x \in (1, -3)$, $y \in (2 - \sqrt{3}, 2 + \sqrt{3})$;

(C) $x \in (-1, 3)$, $y \in (-2 + \sqrt{3}, -2 - \sqrt{3})$;

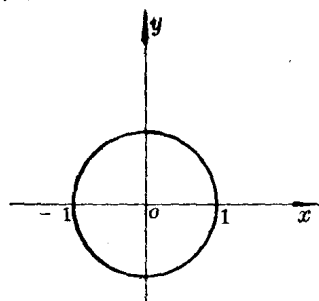
(D) $x \in [-1, 3]$, $y \in [-2 - \sqrt{3}, -2 + \sqrt{3}]$.

(6) 下面哪一组中的两个方程表示的曲线相同? ()

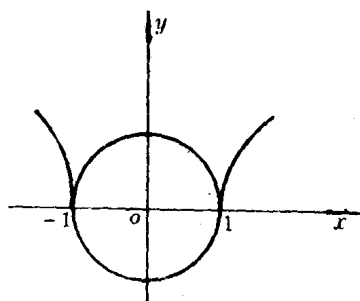
(A) $y = |x|$ 与 $y = \sqrt[3]{x^3}$; (B) $y = |x|$ 与 $y^2 = x^2$;

(C) $y = |x|$ 与 $y = \sqrt{x^2}$; (D) $x^2 + y^2 = 0$ 与 $xy = 0$.

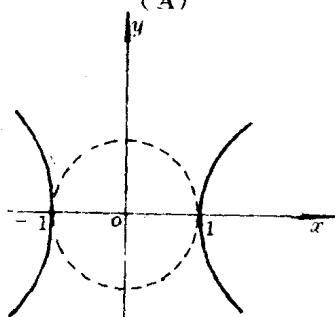
(7) 曲线 $y = \sqrt{|1 - x^2|}$ 的图形是图 1-4 中的哪一个? ()



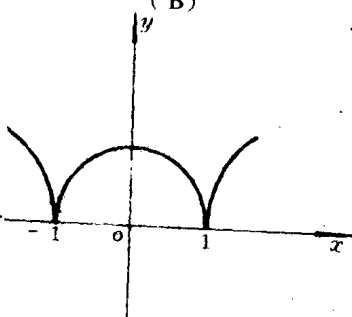
(A)



(B)



(C)



(D)

图 1-4

(8) 方程 $x = \sqrt{y-1} + 2$ 表示的曲线是图 1-5 中的哪一个? ()

(9) 方程 $|x| - 1 = \sqrt{1 - (y-1)^2}$ 表示的曲线是 ()

(A) 一个圆; (B) 一个椭圆;

(C) 两个半圆; (D) 两条抛物线.

(10) 若命题“曲线 C 上点的坐标满足方程 $f(x, y) = 0$ ”是正确的, 则下列命题哪一个是正确的? ()

(A) 方程 $f(x, y) = 0$ 所表示的曲线是 C ;

(B) 满足方程 $f(x, y) = 0$ 的点均在曲线 C 上;

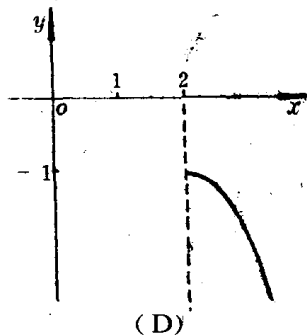
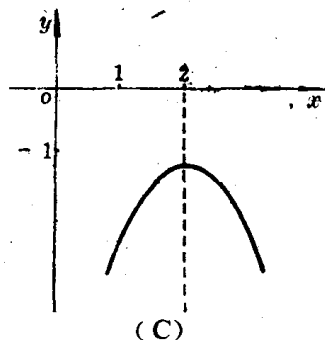
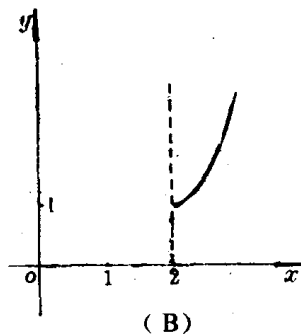
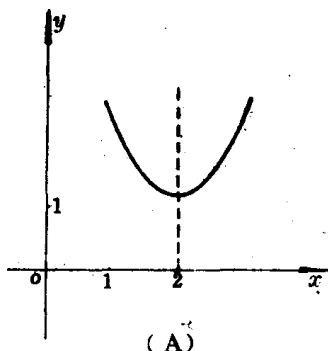


图 1-5

(C) 曲线 C 是方程 $f(x, y) = 0$ 的轨迹;

(D) 方程 $f(x, y) = 0$ 所表示的曲线不一定是 C .

20. 讨论并描绘下列各方程的曲线:

(1) $y = x^2 - 2$;

(2) $x^2 - 4y^2 + 8y + 12 = 0$;

(3) $x^3 + xy^2 - 4x = 0$;

(4) $(x^2 - 4)^2 + (y^2 - 64)^2 = 0$.

21. 对下列方程进行讨论, 并且画出图形:

(1) $y = \frac{1}{|x| + 1}$; (2) $xy = 2$.

22. 求适合下列条件的动点 M 的轨迹方程.

(1) 与 y 轴的距离等于 2;

(2) 与定直线 $x - 2 = 0$ 的距离等于 3;

(3) 与定直线 $y + 3 = 0$ 的距离等于 6;

(4) 与原点的距离等于 5.

23. (1) 动点 M 到 x 轴的距离是它到 y 轴距离的两倍, 求 M 的轨迹方程;

(2) 动点 M 与 x 轴和 y 轴的距离的比等于常数 $k (k \neq 0)$, 求 M 的轨迹方程.

24. 等腰三角形一腰的两端是 $A(4, 2)$ 、 $B(3, 5)$, 求这个三角形第三个顶点 C 的轨迹方程.

25. 已知线段 AB 等于定长, 动点 M 到 A 的距离是到 B 的距离的 2 倍, 求 M 点的轨迹方程.

26. 已知 $\triangle ABC$ 的底边 AB 的长度和位置是确定的, 并且 $\angle B = 2\angle A$, 求顶点 C 的轨迹方程.

27. 有一条动直线, 和两坐标轴分别交于 A 、 B , $\triangle OAB$ 的面积为 k^2 , $P(x, y)$ 点分线段 AB 成 $m:n$, 求 P

点的轨迹。

28. 求下列各组中方程的曲线的交点，并且画出图形：

$$(1) \begin{cases} x^2 + y^2 + 6x - 16 = 0, \\ y = 4; \end{cases} \quad (2) \begin{cases} x^2 + y^2 = 5, \\ xy = 2. \end{cases}$$

29. 下面各题中的两个方程，当 k 是什么数时，它们的曲线有两个交点？只有一个交点？没有交点？

$$(1) y = x + k, \quad y = x^2 - 3x;$$

$$(2) y = 2x - 5, \quad x^2 + y^2 = k.$$

30. k 为何值时，方程 $y = x^2 + 2kx + 9$ 的曲线与 x 轴：

(1) 相交？(2) 相切？(3) 相离？

31. (1) 已知 A 是直线 $3x + 4y = 5$ 和 $3x - 4y = 7$ 的交点，那么第三条直线 $2x + 4y - 3 = 0$ 是否通过 A 点？

(2) 已知三条直线： $l_1: x - 2y + 3 = 0$ ， $l_2: 3x + 4y - 21 = 0$ ， $l_3: 3x + 2y - k = 0$ 共点，求 k 的值；

(3) 若直线 $2x - y + k = 0$ 与圆 $x^2 + y^2 = 5$ 相切，求 k 的值。

乙 组 题

1. 求下列两点间的距离：

$$(1) (\sqrt{3 + 2\sqrt{2}}, \sqrt{3 - 2\sqrt{2}}),$$

$$(\sqrt{4 + 2\sqrt{3}}, \sqrt{4 - 2\sqrt{3}});$$

$$(2) (\cos \alpha, \sin \alpha), (\cos \beta, \sin \beta).$$

2. 求一点 $M(x, y)$ ，使它到已知的三点 $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$ 、 $C(x_3, y_3)$ 的距离的平方之和为最小。

3. 已知正方形相邻的两个顶点是 $A(2, 3)$ 、 $B(6, 6)$ 。