21世纪复旦大学研究生教学用书

泛函分析教程

童裕孙 编著

复旦大学出版社
www.fudanpress.com.cn

O177
T562

21世纪复旦大学研究生教学用书

泛函分析教程

童裕孙　编著

A1090230

華僑大學圖書館藏書

復旦大學出版社

图书在版编目(CIP)数据

泛函分析教程/童裕孙编著.—上海:复旦大学出版社,2003.10
21世纪复旦大学研究生教学用书
ISBN 7-309-03765-0

Ⅰ.泛… Ⅱ.童… Ⅲ.泛函分析-研究生-教材 Ⅳ.0177

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 079669 号

A1090230

泛函分析教程
童裕孙 编著

出版发行 复旦大学出版社
上海市国权路 579 号 邮编 200433
86-21-65118853(发行部) 86-21-65109143(邮购)
fupnet@fudanpress.com http://www.fudanpress.com

责任编辑 范仁梅
装帧设计 陈 萍
总 编 辑 高若海
出 品 人 贺圣遂

O177
T562

印 刷 崇明裕安印刷厂
开 本 787×960 1/16
印 张 19
字 数 351 千
版 次 2003 年 10 月第一版 2003 年 10 月第一次印刷
印 数 1—3 100

书 号 ISBN 7-309-03765-0/O·314
定 价 29.00 元

如有印装质量问题,请向复旦大学出版社发行部调换。
版权所有 侵权必究

内 容 简 介

本书是研究生泛函分析教材.全书共七章,以概述线性泛函分析的基本理论为入口,分别介绍了 Banach 空间上紧算子和 Fredholm 算子,Banach代数、C^* 代数初步和 Hilbert 空间上正规算子的谱分析,无界算子,算子半群,无限维空间上的微分学,拓扑度理论等.本书既注意以现代数学的观点统率各章节内容,突出泛函分析中重要的基本理论,也精选了在应用中受到普遍关注的若干题材,同时还配备了一定数量的难易不等的习题,以利读者加深理解,启发思考.

本书可作为基础数学、应用数学、计算数学、运筹学与控制论、概率论与数理统计等数学类各专业方向的研究生学位课教材,也可供理工类相关专业的研究生以及自然科学工作者、工程技术人员参考使用.

编辑出版说明

21世纪,随着科学技术的突飞猛进和知识经济的迅速发展,世界将发生深刻变化,国际间的竞争日趋激烈,高层次人才的教育正面临空前的发展机遇与巨大挑战.

研究生教育是教育结构中最高层次的教育,肩负着为国家现代化建设培养高素质、高层次创造性人才的重任,是我国增强综合国力、增强国际竞争力的重要支撑.为了提高研究生的培养质量和研究生教学的整体水平,必须加强研究生的教材建设,更新教学内容,把创新能力和创新精神的培养放到突出位置上,必须建立适应新的教学和科研要求的有复旦特色的研究生教学用书."21世纪复旦大学研究生教学用书"正是为适应这一新形势而编辑出版的.

"21世纪复旦大学研究生教学用书"分文科、理科和医科三大类,主要出版硕士研究生学位基础课和学位专业课的教材,同时酌情出版一些使用面广、质量较高的选修课及博士研究生学位基础课教材.这些教材除可作为相关学科的研究生教学用书外,还可供有关学者和人员参考.

收入"21世纪复旦大学研究生教学用书"的教材,大多是作者在编写成讲义后,经过多年教学实践、反复修改后才定稿的.这些作者大多治学严谨,教学实践经验丰富,教学效果也比较显著.由于我们对编辑工作尚缺乏经验,不足之处,敬请读者指正,以便我们在将来再版时加以更正和提高.

复旦大学研究生院

2001年3月

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

前　　言

泛函分析是从变分法、积分方程、微分方程、逼近论和理论物理的研究中发展起来的一个数学分支.它综合地运用分析、代数和几何的方法,研究无限维线性拓扑空间和这类空间之间各种映射的一般性质.

泛函分析在20世纪的产生和发展,主要受到两个因素的影响.一方面,19世纪以来数学的进一步抽象化与公理化为泛函分析的产生提供了理论基础.当时,用统一的观点来理解数学各分支所积累的大量材料,不仅是必要的,而且是可能的.由于吸收了几何与代数的方法,数学家们把许多早期只是在特殊的数学分支里被孤立地讨论过的分析问题从本质上联系起来,促使了泛函分析抽象理论的形成与提升.对泛函分析发展起重要作用的另一个因素是量子物理学的要求.量子物理对泛函分析的意义,如同Newton力学对微积分在18世纪从萌芽到发展所起的作用相仿.例如, Hilbert空间上自伴算子的谱分析,正是20世纪30年代适应量子力学的需要发展起来的.

简略地说,泛函分析中一些最基本的概念大致出现于20世纪之初;到30年代,它开始显现了一门独立学科的雏形;40年代至50年代期间,已经相对成熟,确立起作为一个重要数学分支的地位.其后,它与数学其他分支相互渗透,相互影响,同时,不断接受来自各方面的新思想的浸润.一方面,泛函分析在理论上日渐深化.诸如算子谱论、算子代数、拓扑线性空间、拓扑度、非线性算子等理论逐一崛起,精彩纷呈.另一方面,在应用中也获得了更为广阔的活动舞台.现代泛函分析在几何、拓扑、微分方程、函数论、概率论、群表示论乃至计算数学、最优化理论、控制理论等数学分支都有重要的应用;它也成为研究具有无限个自由度的物理系统的重要工具,其方法大量地使用于连续介质力学、电磁场理论、量子场论等学科;此外,泛函分析的观念和方法还广泛地渗入许多工程技术学科,泛函分析的概念、术语和符号作为科学的语言被各方面的专家频频应用于许多技术问题的表述之中.凡此种种客观背景,使泛函分析自然地成为数学类各专业研究生必修的一门学位基础课,同时,它也引起了许多其他专业方向科学工作者的浓厚兴趣.

正因为泛函分析来源于厚实凝重的经典分析和丰富多彩的数学物理,它又灵活地吸纳了代数结构和几何拓扑的框架和方法,其理论和应用均在广阔的前

沿获得引人瞩目的进展，所以泛函分析的学科领域十分宽广. 近 20 年来，即使作为泛函分析的基础教材，也出现了由于作者学术兴趣的不同，从内容、体系到风格都截然不同的出版物，其中不乏大师的名著. 作者多年来为复旦大学数学研究所的硕士生讲授泛函分析课程，虽然从国内外相关教材中获得不少有益的启迪，却仍深感需要一本起点恰当、篇幅适中，既能反映现代泛函分析的主要思想和主要方法，又能切合于目前硕士学位基础课教学实践的教科书. 这本教材应能基本满足数学类各专业学生对泛函分析的共同需要，为他们顺利进入各专业方向的深造提供重要的基本工具和方法；在内容处理上，还应有利于学生数学素养的熏陶，即通过本课程的教学过程，能有意识地进一步提高抽象思维能力和逻辑推理能力. 鉴于近年来我校研究生来源于国内众多的院校，数学基础不尽一致，有的在本科期间打下了泛函分析基础，有的则完全未曾触及这门课程，如何使不同程度的学生在修读同一门课程时都有所获，就得在素材的选取与叙述方式上作审慎的推敲. 在历年教学实践的演化过程中，作者讲授这门课程的内容和体系逐渐成形，在此基础上，着手编写了这本教材. 在编写教材时，作者特别注意了以下几点：首先，根据课程的定位，这本教材以较高的观点介绍线性泛函分析基本理论为入口，其目的是兼顾不同基础学生的修读要求；其次，教材既注意突出重要的基本理论，也精选了在应用中备受关注的若干题材，有利于学生学到泛函方法的实质，也为教师提供一定的选择余地；再次，教材在展开基本材料的同时，恰当地介绍某些较深刻的更高层次的结果，以开阔学生的学术眼界，提高认识水准；同时，本教材还配备了一定数量的难易不同的习题，以帮助学生加深对教材的理解，并促使进一步的思考.

本书内容共分七章. 第一章线性泛函分析基础，作为全书的引论. 在这一章中，引入为理解全书内容所必须的线性拓扑空间的基本概念和相应性质，并在较为一般的框架下介绍线性泛函分析的基本定理. 第二、第三两章介绍在现代数学多个方面有着重要应用的几类算子的谱分析. 第二章在 Banach 代数中元素的谱和线性算子谱的分类等概念的基础上，着重介绍了在微分方程和积分方程理论中经常使用的紧算子的 Riesz-Schauder 理论和 Fredholm 算子的指标定理. 第三章从 Banach 代数的 Gelfand 表示出发，建立了 Hilbert 空间上正规算子的抽象谱定理，并引入谱测度的概念，导出了谱积分形式的谱定理. 这一章最后还特别介绍了 C^* 代数的 GNS 构造和 von Neumann 代数的二次换位定理. 第四章无界算子理论主要介绍 Hilbert 空间上对称算子的自伴扩张，自伴算子的扰动以及无界算子列的收敛性. 在第五章算子半群理论中，首先引入 Bochner 积分和 Pettis 积分的概念作预备知识，重点介绍了 C_0 类算子半群的表示定理、关于无穷小母元特征的 Hille-Yosida 定理、单参数酉算子群的 Stone 定理，并介绍了关于遍

历理论的基本知识. 本书最后两章用于介绍非线性泛函分析的基础. 第六章无限维空间微分学在引入了关于导数和微分等基本概念后,建立了隐函数存在性和可微性定理,讨论了泛函极值. 第七章拓扑度理论介绍了 Brouwer 度和 Leray-Schauder 度的基本概念和性质,并在此基础上建立起一些重要的不动点定理. 简言之,前三章可以作为研究生泛函分析课程中必修的内容. 其后,第四、五、六、七各章则可作为学生的选学材料. 其中第四、五两章论及线性泛函分析中两个专门课题. 第六、七两章则为研究非线性映射提供了最基本的工具和方法. 在后四章中,除第七章涉及第六章所引入的可微映射概念外,各章内容基本上是独立的. 读者可根据不同的专业兴趣选择使用.

本书在编写过程中得到了复旦大学研究生院的支持;复旦大学数学研究所的张荫南教授和陈晓漫教授在本书酝酿阶段给作者不少很好的建议;郭坤宇教授、徐胜芝副教授、黄昭波副教授和作者就有关内容进行过有益的讨论;洪家兴教授十分支持本书的编写;复旦大学出版社的范仁梅女士为本书的顺利出版提供了热情的帮助. 对以上诸位作者在此一并致以诚挚的谢意.

限于水平,作者一些良好的主观设想未必能如愿忠实地反映于教材之中,全书的缺陷与错误亦在所难免,殷切地期望各位读者不吝指正.

童裕孙

2003 年 6 月于复旦大学

目　录

第一章　线性泛函分析基础 …… 1
§1.1　拓扑空间 …… 1
1.1.1　拓扑空间的概念 …… 1
1.1.2　网 …… 4
1.1.3　连续映射 …… 5
1.1.4　距离空间 …… 6
1.1.5　距离空间的完备性 …… 7
§1.2　拓扑线性空间 …… 8
1.2.1　拓扑线性空间的概念 …… 8
1.2.2　赋准范线性空间 …… 12
1.2.3　赋范线性空间 …… 13
1.2.4　内积空间 …… 14
§1.3　紧性 …… 16
1.3.1　紧集的概念 …… 16
1.3.2　紧集上的连续映射 …… 17
1.3.3　Zorn 引理 …… 18
1.3.4　紧空间的乘积空间 …… 18
1.3.5　Stone-Weierstrass 定理 …… 19
1.3.6　距离空间中的列紧集与完全有界集 …… 22
1.3.7　有限维赋范线性空间的特征 …… 24
1.3.8　Banach-Alaoglu 定理 …… 25
1.3.9　Hilbert 空间单位球的弱紧性 …… 28
§1.4　Hahn-Banach 定理及其几何形式 …… 29
1.4.1　线性空间上线性泛函的延拓 …… 29
1.4.2　赋范线性空间上连续线性泛函的延拓 …… 30
1.4.3　自反空间 …… 31
1.4.4　凸集的分离性 …… 33
1.4.5　端点、Krein-Milman 定理 …… 35

§1.5 线性算子基本定理……………………………………………… 36
1.5.1 开映射定理……………………………………………… 36
1.5.2 逆算子定理和范数等价定理……………………………… 38
1.5.3 闭图像定理……………………………………………… 39
1.5.4 共鸣定理……………………………………………… 39
1.5.5 应用……………………………………………… 40
1.5.6 点列的收敛性……………………………………………… 43
习题 ……………………………………………… 46

第二章 谱论Ⅰ:Banach 空间上的紧算子及 Fredholm 算子 ……………… 49
§2.1 Banach 代数中元素的谱 ……………………………………… 49
2.1.1 代数和理想……………………………………………… 49
2.1.2 赋范代数……………………………………………… 50
2.1.3 Banach 代数中元素的谱 ……………………………… 52
§2.2 线性算子的谱……………………………………………… 57
2.2.1 线性算子谱的概念……………………………………… 57
2.2.2 线性算子谱的分类……………………………………… 58
2.2.3 近似谱点……………………………………………… 61
2.2.4 共轭算子及共轭算子的谱……………………………… 63
§2.3 紧算子……………………………………………… 65
2.3.1 有限秩算子……………………………………………… 65
2.3.2 紧算子的概念……………………………………………… 66
2.3.3 紧算子的 Riesz-Schauder 理论…………………………… 70
2.3.4 Banach 空间的直和分解 ……………………………… 72
2.3.5 紧算子的 Riesz-Schauder 理论(续)……………………… 74
§2.4 Fredholm 算子 ……………………………………………… 75
2.4.1 Fredholm 算子的概念 ………………………………… 75
2.4.2 Fredholm 算子的性质 ………………………………… 76
习题 ……………………………………………… 80

第三章 谱论Ⅱ:Hilbert 空间上的正规算子 ……………………………… 82
§3.1 Banach 代数的 Gelfand 表示 ……………………………… 82
3.1.1 可乘线性泛函……………………………………………… 82
3.1.2 Gelfand 表示 ……………………………………………… 84

3.1.3 极大理想空间 …… 85
§3.2 C^* 代数 …… 87
3.2.1 C^* 代数的概念 …… 87
3.2.2 C^* 代数中的正规元 …… 88
3.2.3 Gelfand-Naimark 定理 …… 89
3.2.4 GNS 构造 …… 90
§3.3 谱测度和谱积分 …… 92
3.3.1 投影算子 …… 93
3.3.2 谱测度与谱积分 …… 94
3.3.3 谱系 …… 99
§3.4 Hilbert 空间上正规算子的谱分解 …… 99
3.4.1 谱定理与函数演算 …… 100
3.4.2 函数演算的扩充 …… 101
3.4.3 正规算子的谱分解定理 …… 102
3.4.4 正规算子的谱 …… 104
3.4.5 von Neumann 代数 …… 106
习题 …… 108

第四章　无界算子 …… 111
§4.1 对称算子和自伴算子 …… 111
4.1.1 稠定算子的共轭算子 …… 111
4.1.2 对称算子与自伴算子的概念 …… 112
4.1.3 算子的图像 …… 114
4.1.4 对称算子为自伴算子的条件 …… 115
4.1.5 Cayley 变换 …… 117
4.1.6 无界函数的谱积分 …… 120
4.1.7 自伴算子的谱分解定理 …… 124
§4.2 对称算子的自伴扩张 …… 125
4.2.1 闭对称算子的亏指数 …… 125
4.2.2 正定双线性泛函 …… 127
4.2.3 半有界算子的 Friedrichs 扩张定理 …… 130
§4.3 自伴算子的扰动 …… 131
4.3.1 可闭算子的扰动 …… 132
4.3.2 自伴算子的扰动 …… 135

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

4.3.3 自伴算子在扰动下的谱 …… 138
§4.4 无界算子序列的收敛性 …… 140
4.4.1 预解意义下的收敛性 …… 141
4.4.2 图意义下的收敛性 …… 148
习题 …… 150

第五章 算子半群 …… 153
§5.1 向量值函数 …… 153
5.1.1 向量值函数的连续性 …… 153
5.1.2 向量值函数的可导性 …… 154
5.1.3 向量值函数的 Riemann 积分 …… 156
5.1.4 向量值函数的可测性 …… 157
5.1.5 强可测与弱可测的关系 …… 157
5.1.6 算子值可测函数 …… 160
§5.2 Bochner 积分和 Pettis 积分 …… 161
5.2.1 Pettis 积分 …… 161
5.2.2 Bochner 积分 …… 164
5.2.3 Bochner 积分的性质 …… 168
§5.3 算子半群的概念 …… 171
5.3.1 算子半群概念的由来 …… 171
5.3.2 C_0 类算子半群 …… 173
5.3.3 算子半群的一些例子 …… 174
§5.4 C_0 类算子半群的表示 …… 176
5.4.1 C_0 类算子半群无穷小母元的概念 …… 176
5.4.2 无穷小母元的预解式 …… 178
5.4.3 C_0 类算子半群的表示 …… 181
§5.5 无穷小母元的特征 …… 185
5.5.1 C_0 类算子半群无穷小母元的特征 …… 185
5.5.2 标准型 C_0 类算子半群母元的特征 …… 188
5.5.3 C_0 类压缩半群母元的特征 …… 189
5.5.4 Hilbert 空间上 C_0 类压缩半群母元的特征 …… 189
§5.6 单参数酉算子群、Stone 定理 …… 190
5.6.1 单参数算子群的无穷小母元 …… 191
5.6.2 Stone 定理 …… 192

5.6.3　Stone 定理的应用:Bochner 定理 …… 195
§5.7　遍历定理 …… 198
5.7.1　相空间上的保测变换 …… 198
5.7.2　Boltzmann 遍历假设 …… 201
5.7.3　不可压缩稳定流 …… 201
5.7.4　遍历定理 …… 203
5.7.5　变换群的遍历性 …… 205
习题 …… 207

第六章　无穷维空间的微分学 …… 210
§6.1　映射的微分 …… 210
6.1.1　Gâteaux 微分 …… 210
6.1.2　Frèchet 微分 …… 213
6.1.3　高阶导数 …… 219
6.1.4　Taylor 公式 …… 222
6.1.5　幂级数 …… 224
§6.2　隐函数定理 …… 226
6.2.1　C^p 映射与微分同胚 …… 226
6.2.2　隐函数的存在性 …… 227
6.2.3　隐函数的可微性 …… 229
§6.3　泛函极值 …… 232
6.3.1　线性方程的解与二次泛函的极小问题 …… 232
6.3.2　泛函极值的必要条件 …… 235
6.3.3　泛函极值的存在性:下半弱连续条件 …… 236
6.3.4　最速下降法 …… 239
6.3.5　泛函极值的存在性:Palais-Smale 条件 …… 243
习题 …… 246

第七章　拓扑度 …… 248
§7.1　Brouwer 度 …… 248
7.1.1　C^1 类映射的拓扑度(非临界点情形) …… 248
7.1.2　3 个引理 …… 252
7.1.3　C^1 类映射的拓扑度(一般情形) …… 255
7.1.4　Brouwer 度 …… 258

7.1.5 Brouwer 度的性质 …… 259
§7.2 Leray-Schauder 度 …… 265
7.2.1 一个例子 …… 266
7.2.2 全连续映射 …… 267
7.2.3 Leray-Schauder 度的定义 …… 268
7.2.4 Leray-Schauder 度的性质 …… 270
§7.3 不动点定理及其应用 …… 275
7.3.1 Brouwer 不动点定理 …… 275
7.3.2 Schauder 不动点定理 …… 276
7.3.3 非紧性测度 …… 279
7.3.4 集压缩映射的不动点 …… 282
7.3.5 Kakutani 不动点定理 …… 283
7.3.6 应用:代数学基本定理 …… 285
7.3.7 应用:不变子空间 …… 285
7.3.8 应用:对策论基本定理 …… 287
习题 …… 288

参考文献 …… 289

第一章　线性泛函分析基础

本章作为全书的基础，介绍线性泛函分析中一些最基本的概念和理论.

拓扑线性空间是现代数学中一个基本的数学结构. 在拓扑线性空间中，元素之间既能进行线性运算，也能考察收敛过程，而且线性运算关于相应的极限是连续的. 虽然本书主要讨论赋范线性空间和内积空间上的线性泛函、线性算子、算子半群和非线性映射，但由于在大量的理论和应用问题中种种条件的限制，人们往往需要在较弱的意义下讨论收敛过程，因而必然涉及到在多种拓扑下进行数学运算. 本章中我们将介绍拓扑线性空间中最基本的一些概念，并主要在赋范线性空间和内积空间的框架下，介绍线性泛函分析的一些基本定理：Hahn-Banach 定理、开映射定理、闭图像定理、逆算子定理和共鸣定理. 这些定理在数学基础理论和数学应用问题中体现出重要的价值.

§1.1　拓 扑 空 间

分析数学中常常出现各种不同的收敛性，它们都可以统一地用拓扑空间的语言来刻画.

1.1.1　拓扑空间的概念

定义 1.1.1　设 X 是非空集合，$\mathscr{T}$ 是由 X 的某些子集所组成的集类，如果

(1) $\varnothing \in \mathscr{T}$, $X \in \mathscr{T}$;

(2) $\mathscr{T}$ 中任意个集合的和集属于 $\mathscr{T}$;

(3) $\mathscr{T}$ 中任意两个集合的交集属于 $\mathscr{T}$;

则称 $(X, \mathscr{T})$ 为拓扑空间，称 $\mathscr{T}$ 为 X 上的拓扑，称 $\mathscr{T}$ 中的集合为 $(X, \mathscr{T})$ 中的开集，称开集的余集为闭集.

在拓扑 $\mathscr{T}$ 明确的情况下，常简称 X 为拓扑空间.

例 1.1.1　设 E^n 为 n 维 Euclid 空间，对 $x, y \in E^n$, $x = \{x_i\}$, $y = \{y_i\}$，规定 $\rho(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$. E^n 中的子集族

$$\mathscr{T}=\{U \mid \forall x \in U,\ \exists \delta>0,\ \{y \mid \rho(x, y)<\delta\} \subset U\},$$

即 $\mathscr{T}$ 是 E^n 中按通常意义的开集全体,则 $\mathscr{T}$ 是 E^n 上的一个拓扑.

例 1.1.2 设 $X=\{a, b\}$,

$$\mathscr{T}_1=\{X, \{a\}, \{b\}, \varnothing\},\ \mathscr{T}_2=\{X, \varnothing\},$$

则 $(X, \mathscr{T}_1)$ 和 $(X, \mathscr{T}_2)$ 均为拓扑空间.

根据开集的定义及集合运算的和通关系式即得下述定理.

定理 1.1.1 在拓扑空间 X 中,

(1) $\varnothing$ 和 X 均为闭集;

(2) 任意个闭集的交集是闭集;

(3) 有限个闭集的和集是闭集.

定义 1.1.2 设 X 为拓扑空间,对 $x_0 \in X$,称包含 x_0 的任何开集为 x_0 的邻域;若 $\mathscr{S}$ 为 x_0 的一族邻域,且对 x_0 的每个邻域 U,存在 $V \in \mathscr{S}$, 使得 $V \subset U$, 则称 $\mathscr{S}$ 为 x_0 的一个邻域基.

在例 1.1.1 中,取 $V_n=\left\{y \mid \rho(y, x_0)<\dfrac{1}{n}\right\}$, 则 $\{V_n\}$ 是 x_0 的一个邻域基.

定义 1.1.3 设 X 为拓扑空间, $x_0 \in X$, $A \subset X$, 若存在 x_0 的邻域 U, 使得 $U \subset A$, 则称 x_0 为 A 的内点.

根据定义容易证明下述定理.

定理 1.1.2 A 为开集的充要条件是 A 中每一点均为 A 的内点.

定义 1.1.4 设 X 为拓扑空间, $x_0 \in X$, $A \subset X$, 如果 x_0 的任何邻域中均有 A 中不同于 x_0 的点,则称 x_0 为 A 的聚点,其全体记为 A';称包含 A 的最小闭集为 A 的闭包,记作 $\overline{A}$.

定理 1.1.3 A 是闭集的充要条件是 $A=\overline{A}$.

定理 1.1.4 对任何集合 A, $\overline{A}=A \cup A'$.

证 因 $(\overline{A})^c$ 是开集, $(\overline{A})^c \cap A=\varnothing$, 故 $(\overline{A})^c \cap A'=\varnothing$, 得 $\overline{A} \supset A \cup A'$. 又对 $x \in (A \cup A')^c$, $\exists x$ 的邻域 U, $U \cap A=\varnothing$, 故 $U \cap A'=\varnothing$, 得 $U \subset (A \cup A')^c$, 故 $A \cup A'$ 是闭集. 证毕.

定义 1.1.5 设 X 为拓扑空间,若 X 中任意两个不同的点有互不相交的邻域,则称 X 满足 T_2 分离公理,也称 X 为 Hausdorff 空间.

例 1.1.1 中的 $(E^n, \mathscr{T})$ 和例 1.1.2 中的 $(X, \mathscr{T}_1)$ 均为 Hausdorff 空间,而 $(X, \mathscr{T}_2)$ 并非 Hausdorff 空间.

定义 1.1.6 设 X 是非空集合, $\mathscr{T}_1$, $\mathscr{T}_2$ 是 X 上的两个拓扑,如果 $\mathscr{T}_1 \subset \mathscr{T}_2$, 则称 $\mathscr{T}_2$ 强于 $\mathscr{T}_1$,也称 $\mathscr{T}_1$ 弱于 $\mathscr{T}_2$.

集合 X 的子集全体显然是 X 上的最强拓扑，称之为离散拓扑；由空集和 X 自身这两个集合组成的集类则是 X 上最弱的拓扑.

因为集合 X 的任何一族拓扑的交仍是 X 上的拓扑，因而对 X 中的任何一个集类 $\mathscr{S}$，必定存在包含 $\mathscr{S}$ 的最弱拓扑.

定义 1.1.7 设 X 是非空集合，$\mathscr{S}$ 是 X 的子集组成的集类，称包含 $\mathscr{S}$ 的 X 的最弱拓扑为由 $\mathscr{S}$ 所生成的拓扑.

定义 1.1.8 设 $(X, \mathscr{T})$ 为拓扑空间，$\mathscr{S}\subset\mathscr{T}$，如果 X 中任何非空开集均为 $\mathscr{S}$ 中一族集合的和集，则称 $\mathscr{S}$ 是拓扑 $\mathscr{T}$ 的一个基.

例如，在 E^n 中所有形为

$$\left\{y \mid \rho(y, x)<\frac{1}{m}\right\}, \ x\in E^n, \ m\in N^+$$

的集合全体便是通常拓扑 $\mathscr{T}$ 的一个基.

又如设空间 X 的拓扑 $\mathscr{T}$ 由 $\mathscr{S}$ 生成，且 $\bigcup\limits_{A\in\mathscr{S}} A = X$，那么 $\mathscr{S}$ 中任意有限个集的交集全体就是 $\mathscr{T}$ 的一个基. 这就是下述定理.

定理 1.1.5 设 $\bigcup\limits_{A\in\mathscr{S}} A = X$，$X$ 上的拓扑 $\mathscr{T}$ 由 $\mathscr{S}$ 生成的充要条件是对任何 $U \in \mathscr{T}$，$x \in U$，存在 $S_1, \cdots, S_n\in\mathscr{S}$，使得

$$x \in S_1 \cap \cdots \cap S_n \subset U.$$

实际上，具有上述性质的 U 的全体显然是一个包含 $\mathscr{S}$ 的拓扑，而由 $\mathscr{S}$ 生成的拓扑又必定包含一切形如 $S_1\cap\cdots\cap S_n$ 的集，其中 $S_1, \cdots, S_n \in \mathscr{S}$，从而包含具有上述性质的 U.

为了下面讨论的需要，我们再引入乘积拓扑的概念.

设 $(X_\alpha, \mathscr{T}_\alpha)$，$\alpha \in \Lambda$ 是一族拓扑空间，记乘积空间

$$\prod_\alpha X_\alpha = \{\varphi \mid D(\varphi) = \Lambda, \ \varphi(\alpha) \in X_\alpha, \ \alpha \in \Lambda\},$$

称映射

$$p_\alpha : \varphi \mapsto \varphi(\alpha)$$

为 $\prod\limits_\alpha X_\alpha$ 到 X_α 上的投影.

定义 1.1.9 $\prod\limits_\alpha X_\alpha$ 上的乘积拓扑即是由一切形如

$$p_\alpha^{-1}(O_\alpha), \ O_\alpha \in \mathscr{T}_\alpha, \ \alpha \in \Lambda$$

的集合生成的拓扑.

由定义可知，乘积拓扑的基可取为形如

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com