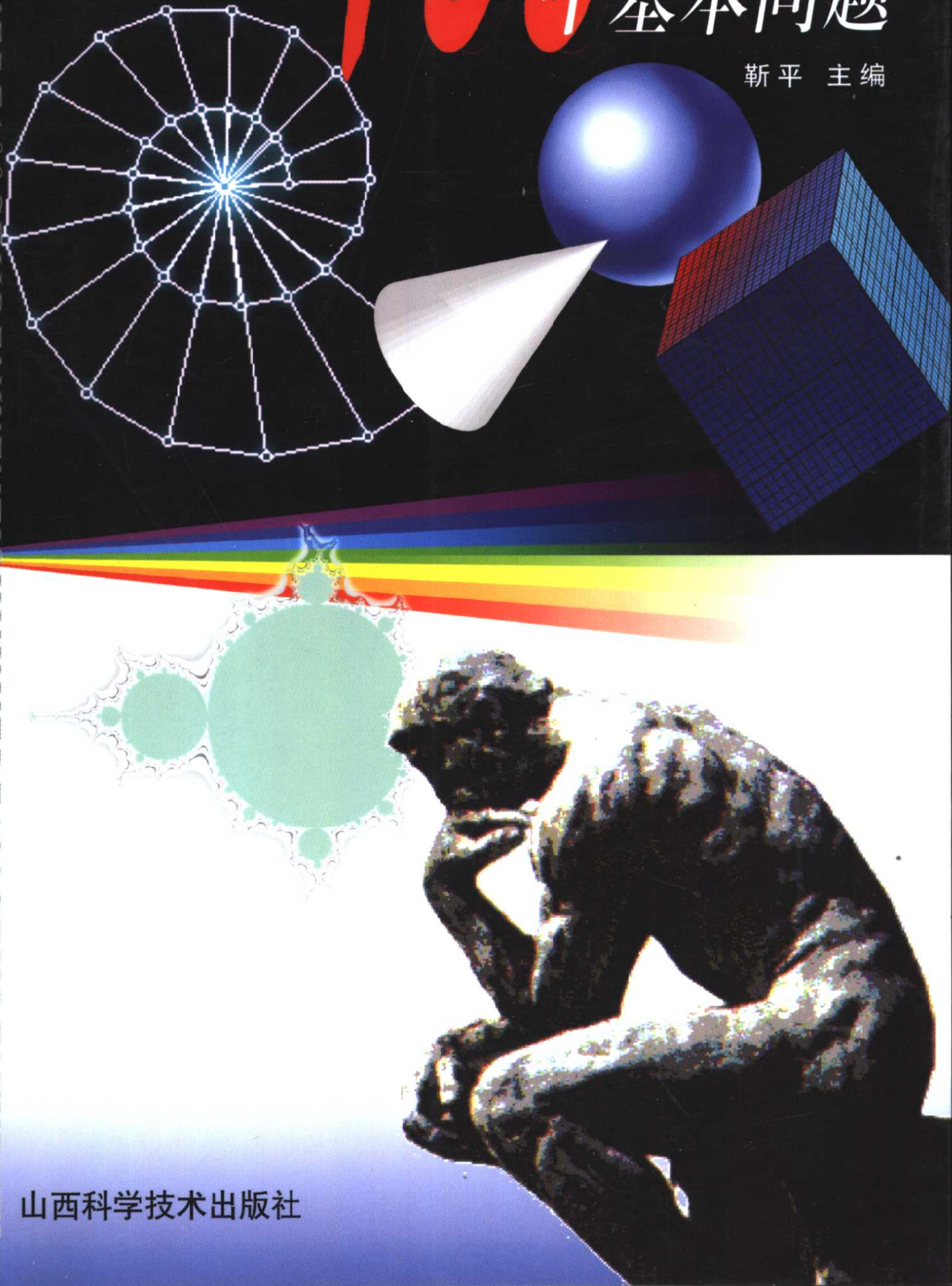
数学的100个基本问题

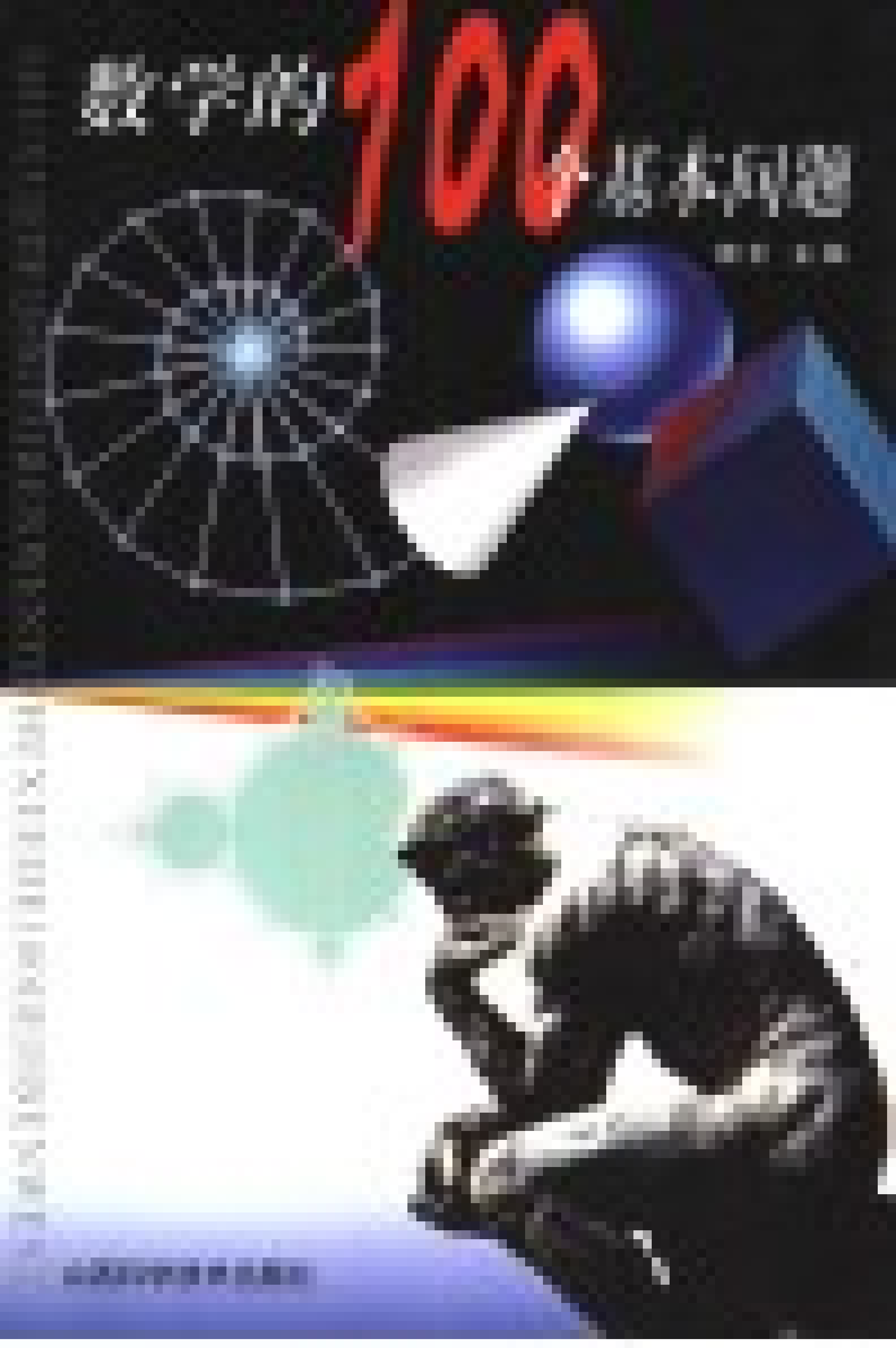
靳平 主编

SHUXUEDE100GEJIBENWENTI

SHUXUEDE100GEJIBENWENTI

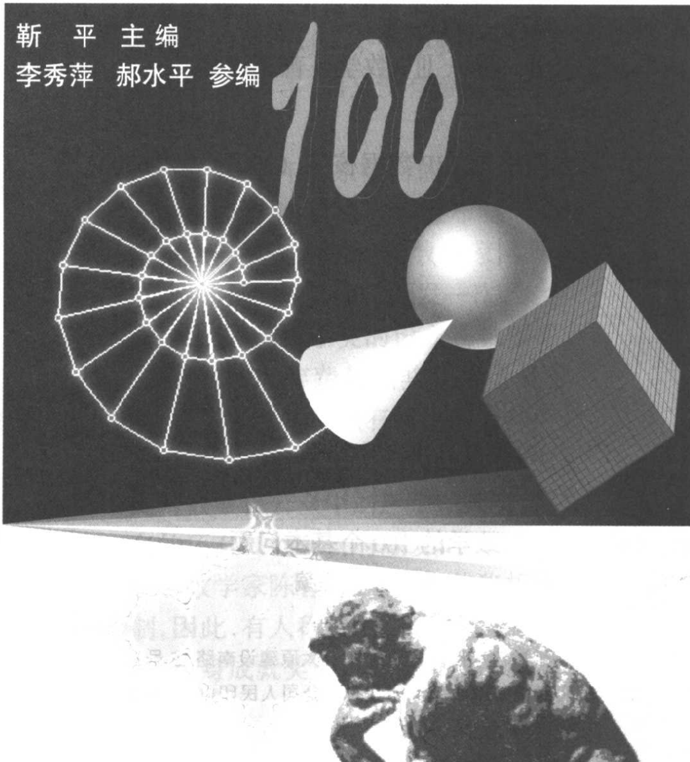


山西科学技术出版社


数学的
100

数学的100个基本问题

靳　平 主编
李秀萍　郝水平 参编



山西科学技术出版社

图书在版编目（CIP）数据

数学的100个基本问题/靳平主编.—太原：山西科学技术出版社，2004.1

ISBN 7-5377-2171-8

Ⅰ.数… Ⅱ.靳… Ⅲ.数学-普及读物
Ⅳ.01-49

中国版本图书馆CIP数据核字（2003）第067037号

数学的100个基本问题

靳　平　主编

*

山西科学技术出版社出版　（太原建设南路15号）

新华书店经销　山西新华印业有限公司人民印刷分公司印刷

*

开本：850×1168　1/32　印张：8.75　字数：211千字

2004年1月第1版　2004年1月山西第1次印刷

印数：1-3 000册

*

ISBN　7-5377-2171-8

O·78　　定价：17.00元

前　言

2002年8月,在我国数学界发生了一件历史性的大事:我国成功地举办了2002年国际数学家大会,这次大会将以新世纪的第一次国际数学家大会和历史上第一次在发展中国家举办而载入史册.它不仅标志着我国的数学发展水平和国际地位得到了国际数学界的认可,而且将对我国的数学教育和数学普及工作产生巨大的影响.逢此数学发展的大好形势,向广大的数学爱好者(特别是高中生和大学低年级学生)献上《数学的100个基本问题》,为传播数学知识、弘扬数学之美略尽微薄之力.

德国大数学家希尔伯特(D. Hilbert)于1900年在巴黎举行的国际数学家大会上提出了23个数学问题,对20世纪的数学发展产生了深刻的影响。美国当代著名数学家哈尔莫斯(P. Halmos)曾说:“问题是数学的心脏。”事实的确如此,一个好的数学问题不仅蕴含着深刻的数学思想和精妙的思维技巧,而且在解决该问题的过程中能产生新的观念和理论,促进数学的发展。因此,为了进一步拓宽广大中学生和大学低年级学生的数学视野,丰富他们的数学史知识,激发他们学习和探索数学的热情,我们精心选择了这100个基本的数学问题供读者赏析。需要说明的是,这些数学问题其实并不“基本”,它们大多是一些数学中的名题和难题,在历史上受到许多大数学家的青睐,堪称数学中的宝石和明珠,其“基本性”主要表现在叙述上的简明易懂或证明方法之初等巧妙。我们期望通过对这些数学问题的鉴赏,能使读者领略到数学家独特的思维方式,他们的数学观点和思想,以及他们对数学的挚爱。同

时,我们也想让读者体会到数学难题的深刻程度,不要试图用初等的方法去直接攻克诸如“哥德巴赫猜想”、“孪生素数问题”、“黎曼猜想”以及“四色问题”等非常著名的超级数学难题,以免白白地浪费宝贵的时间。

本书是在三位作者分工协作下共同完成的。其中第一部分“算术问题”由山西大学数学系靳平撰写;山西财经大学应用数学系李秀萍负责编写第二部分“代数与组合问题”、第四部分“分析问题”以及第五部分“集合论与数学史问题”;山西财经大学应用数学系郝水平承担了第三部分“几何与拓扑问题”的写作。另外,书中100个数学问题的选取以及全书的统筹工作由靳平完成。

需要指出的是,这100个数学问题的选取完全是根据作者个人的兴趣和爱好做出的,因此它们并不能被认为是最为恰当而合理的选择。另外,由于时间仓促及水平所限,书中定会有许多不足之处,敬请大家批评指正。

在本书的编写过程中,我们参考了大量国内外有关的数学书籍,特别是中国科学院主办的《数学译林》季刊杂志中许多精美的数学译作,由于数量较多,恕不一一列举了,在此一并向相关文章的作者和译者表示诚挚的谢意。

最后,本书的完成还得益于山西大学数学系王明生教授的热情鼓励和悉心帮助,在此也向他表示衷心的感谢。

目　　录

一、算术问题

算术基本定理

每个大于1的正整数均可惟一地写为素数的乘积.

大数学家高斯(Gauss,1777－1855)曾说:"数学是科学的王后,而数论则是数学的王后."这句话虽然流露出高斯对数论的过分偏爱,但也说明了数论在数学家们心目中的崇高地位.事实上,从古希腊的欧几里得(Euclid,公元前330－前275)开始,几千年来许多数学家都对数论产生过浓厚的兴趣,并进行了大量深刻的研究.时至今日,尽管数学已经发展成为一门内容庞大、应用广泛的学科,但还有很多在叙述上简明易懂的关于正整数的问题仍未得到完全解决,这真令人感到不可思议.特别是其中的一些数论问题(如哥德巴赫猜想)几乎是家喻户晓,几百年来它们像谜一样吸引着数学家以及无数的数学爱好者.

在正整数或正整数的理论中,有一类称为素数的数扮演着非常重要的角色.事实上,素数在整数理论中的地位就像元素在化学中或基本粒子在物理学中的地位一样.我们知道,素数是指那些大于1的,且除了1和它自身外再没有其他因子的正整数.例如,2,3,5,7,11,13,等等.如果一个正整数具有除了自身和1以外的其他因子,则称为合数.这样,可以把所有的正整数分成三类:1,素数与合数.

素数的重要性首先表现在数的乘法分解方面.因为每个大于1的正整数 a,如果本身不是素数,则存在不等于 a 和1的因子 b,

此时可令 $a=bc$，其中 b,c 都大于1.如果 b（或 c）不是素数的话，则重复这种分解过程，又可分解出 $b=b_1b_2$（或 $c=c_1c_2$），显然 $a>b>b_1>1$（或 $a>c>c_1>1$）.这个分解过程不能无限地重复下去，换句话说，有限步后就可以把 a 分解成一些素数的乘积.我们得到的结论是：每个大于1的正整数均可写成若干素数的乘积.从这个意义上讲，素数是构成正整数的基本元素.因此，在整数理论中遇到的许多命题大多能归结为有关素数的研究，也就不足为奇了.

算术基本定理的内容由两部分构成：1.分解的存在性，指的是每个大于1的正整数均可分解成一些素数的乘积；2.分解的惟一性，即不考虑诸素数的排列顺序的话，则把正整数分解成素数乘积的方式还是惟一的.例如，21的素数分解只有 $21=3\times7$ 和 $21=7\times3$，但本质上属于同一种分解.算术基本定理是整数理论中最为基本的一个命题，也是许多其他命题的逻辑支撑点和出发点.上面已经证明了分解的存在性部分，其惟一性部分看起来似乎是显而易见的，但要严格地证明它却绝非易事.虽然它的证明较为初等，却需要精细的推理过程，充分反映了数学这门学科所特有的思维风格.

先介绍公元前300年的欧几里得在其巨著《几何原本》中所给的证明.下面只考虑正整数.如果 d 既是 a 的一个因子，又是 b 的一个因子，则称 d 为 a 和 b 的一个公因子.在 a 和 b 的所有公因子中的最大者称为最大公因子，记为 (a,b).欧几里得发明了一种"辗转相除法"去求两个正整数的最大公因子，从此导出了一个十分重要的结论：如果 d 是 a 和 b 的最大公因子，则存在整数 x 和 y 满足 $d=ax+by$.这个结论从现代的观点也是非常基本的，如果读者熟悉近世代数的话，它相当于说全体整数构成的集合 $\mathbb{Z}$ 不仅是一个环，而且是一个主理想整环.现在当然不会使用这个近代的结论，但要从欧几里得发现的这个最大公因子的表示公式出发去证

明素数的一个基本性质：设 p 为素数，如果 p 整除两个正整数 a 和 b 的乘积，则 p 必整除其一，即 p 整除 a 或者 p 整除 b.

事实上，如果 p 不整除 a，则 p 和 a 的最大公因子不是 p，但 p 为素数，表明 p 和 a 的最大公因子只能为 1. 根据上述欧几里得导出的结论，存在整数 x 和 y 使得 $1 = px + ay$. 两边用 b 去乘，有 $b = bpx + bay$. 因为等式右边的两项分别能被 p 整除，从而等式左边的 b 也能被 p 整除. 由此即证所述结论.

有了以上的准备工作，就可以证明算术基本定理中的惟一性部分了. 设大于 1 的正整数 n 有两种素数分解

$$n = p_1p_2\cdots p_r = q_1q_2\cdots q_s$$

要证明的是 $r = s$，且适当排列顺序后，可使每个 $p_i = q_i$. 事实上，反复应用上述关于素数的整除性质，从 p_1 整除 $n = q_1q_2\cdots q_s$ 可知 p_1 整除某个 q_j. 但 q_j 也是素数，只有 $p_1 = q_j$. 重新对诸 q_i 的足标编号，不妨设 $p_1 = q_1$. 此时在 n 的两个素数分解式中消去 p_1 即得 $p_2\cdots p_r = q_2\cdots q_s$. 重复论证上述过程又得到 $p_2 = q_2$. 同理可知 $p_3 = q_3, \cdots, p_r = q_s$. 由此得出 $r = s$，且 $p_1, p_2, \cdots, p_r$ 恰为 $q_1, q_2, \cdots, q_s$ 的一个排列，惟一性得证.

当然，不使用辗转相除法也能直接证明算术基本定理. 下面再介绍一个具有现代风格的证明，它比欧几里得的上述证明既简短又巧妙. 我们的目标仍然是证明算术基本定理中惟一性部分. 假设存在一个正整数 n 能以两种不同的方式分解为素数的乘积，则不妨选取 n 是这类数中最小的一个. 如果据此能得到一个矛盾，则表明这样的正整数并不存在，亦即每个正整数都能以惟一的方式写成素数之积，从而就反证了算术基本定理成立. 现在令

$$n = p_1p_2\cdots p_r = q_1q_2\cdots q_s \tag{1}$$

为两种不同的素数分解，其中的 p_i 和 q_j 均为素数. 经过适当的排列，不妨假设

$$p_1 \leqslant p_2 \leqslant \cdots \leqslant p_r,\quad q_1 \leqslant q_2 \leqslant \cdots \leqslant q_s.$$

显然 p_1 不能等于 q_1，否则的话，在等式(1)的两边同时约去第一个因子得到

$$p_2p_3\cdots p_r = q_2q_3\cdots q_s \tag{2}$$

这是一个比 n 小的正整数，而且从(1)为两种不同的素数分解可知(2)也如此，但这与 n 的最小选择相矛盾. 所以 $p_1 \neq q_1$，不妨设 $p_1 < q_1$，此时令 $n' = n - (p_1q_2q_3\cdots q_s)$，则 n' 为正整数. 现在把等式(1)中 n 的两种表示法分别代入到 n' 中得到

$$\begin{aligned} n' &= (p_1p_2\cdots p_r) - (p_1q_2\cdots q_s) \\ &= p_1(p_2p_3\cdots p_r - q_2\cdots q_s); \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} n' &= (q_1q_2\cdots q_s) - (p_1q_2\cdots q_s) \\ &= (q_1 - p_1)(q_2q_3\cdots q_s). \end{aligned} \tag{4}$$

因为 n' 是比 n 小的正整数，根据 n 的选取可知 n' 具有惟一的素数分解. 所以从(3)推出 p_1 是 n' 一个素因子，再由(4)可知 p_1 是 $q_1 - p_1$ 或者是 $q_2q_3\cdots q_s$ 的素因子. 注意到每个素数 q_j 都比 p_1 大，这表明 p_1 只能是 $q_1 - p_1$ 的素因子. 于是存在正整数 m 使得 $q_1 - p_1 = p_1m$，但从此又可推出 p_1 整除 q_1，最后的这个矛盾就证明了算术基本定理的正确性.

002 中国剩余问题

今有物不知其数，三三数之剩二，五五数之剩三，七七数之剩二，问物几何？

这是我国古代数学名著《孙子算经》下卷中的第26题，即著名的“物不知数”问题，通常也称为“孙子问题”. 虽然《孙子算经》一书的作者与成书年代已难以精确地考证，但其中的“物不知数”问题千百年来在数学界甚至在民间广泛流传，被国际数学界誉为中国剩余定理. 该问题相当于说求一个正整数 x，使得 x 被3去除余数为2，被5去除余数为3，而被7去除余数为2. 从问题的类型上看，它属于初等数论中的一次同余方程组的求解问题. 为此，先介绍同

余的概念.

设 a,b 均为整数且 $b\neq 0$,如果 a 是 b 的整数倍,即存在整数 m 使得 $a=mb$,则称 b 整除 a,也称 b 是 a 的一个因子.对任意整数 c 而言,如果 b 整除 $a-c$,亦即 a 除以 b 所得的余数等于 c 除以 b 所得的余数,则称 a 和 c 模 b 同余,记为

$$a\equiv c(\bmod b).$$

值得一提的是,同余的概念和符号是有"数学家之王"美称的德国数学家高斯在其24岁出版的划时代巨著《算术研究》中首先引进的.

使用同余的符号,物不知数问题就转化为下述同余方程组的求解问题:

$$\begin{cases}x\equiv 2(\bmod 3)\\ x\equiv 3(\bmod 5)\\ x\equiv 2(\bmod 7)\end{cases}$$

不难看出,上述同余方程组的解并不惟一,因为如果 x 是一个解,则 $x+3\times 5\times 7\times k=x+105k$ 也是该同余方程组的一个解,其中的 k 可以取任意整数.事实上,从 3,5,7 两两互素(指没有大于 1 的公因数)可知上述同余方程组的任意两个解相差一个 105 的倍数.所以,一旦求出"最小正整数解" x_0,则每个解均可表示为 $x=x_0+105k$.

如何求出上述同余方程组的一个解呢?我们的祖先聪明地把问题转化为以下三个非常特殊的同余方程组的求解:

$$\begin{cases}a\equiv 1(\bmod 3)\\ a\equiv 0(\bmod 5)\\ a\equiv 0(\bmod 7)\end{cases}\quad\begin{cases}b\equiv 0(\bmod 3)\\ b\equiv 1(\bmod 5)\\ b\equiv 0(\bmod 7)\end{cases}\quad\begin{cases}c\equiv 0(\bmod 3)\\ c\equiv 0(\bmod 5)\\ c\equiv 1(\bmod 7)\end{cases}$$

显然,如果求出了 a,b,c 的一组值,则 $2a+3b+2c$ 就是原同余方程组的一个解,再把这一个解除以 105,则相应的余数即为所求的最小正整数解.

先求 a,b,c.因为 a 被5和7整除,故 a 为 $5\times7=35$ 的倍数,简单的计算可知当 a 取70时即满足 $a\equiv1(\mathrm{mod}3)$.同理,b 既是 $3\times7=21$ 的倍数,又被5除余1,取 $b=21$ 即可.类似地,c 可取为15.所以 $2a+3b+2c=2\times70+3\times21+2\times15=233$,除以105后得余数为23,这就是所求的最小正整数解.

由此不难看出,求解原同余方程组的关键是先从上述三个分别被3,5和7对应的特殊同余方程组依次求出 $a=70$,$b=21$ 和 $c=15$,然后再除以105得到余数即为最小正整数解.为了便于记忆,我国明代的数学家程大位(1533－1606)在其60岁时完成的数学杰作《算法统宗》一书里,把上述“物不知数”问题的解法编写成以下四句口诀:“三人同行七十稀,五树梅花廿一枝,七子团圆整半月,除百零五便得知.”其中第一句暗示3对应的数为70,第二句指的是5对应的数为21,第三句里的整半月表示数15,暗含着7对应的数为15;至此就能得到同余方程组的一个解 $2\times70+3\times21+2\times15=233$;最后一句意为把所得到的一个解233除以105(即百零五),所得的余数23即为所求的最小正整数解.

上述“物不知数”问题的解法实际上也给出了求解一般同余方程组的方法.在初等数论书中提到的中国剩余定理为:设 $m_1,\cdots,m_k$ 为两两互素的正整数,$a_1,\cdots,a_k$ 为任意整数,则同余方程组

$$\begin{cases}x\equiv a_1(\mathrm{mod}\,m_1)\\x\equiv a_2(\mathrm{mod}\,m_2)\\\cdots\cdots\\x\equiv a_k(\mathrm{mod}\,m_k)\end{cases}$$

总有整数解,并且它的全部解可模仿上述方法得到.为了便于表述,对任意正整数 i,j,介绍一个常用的函数 δ_{ij},称为Kronecker符号,它是由德国数学家克罗内克(L. Kronecker,1823－1891)首先引入的.Kronecker符号的定义很简单:如果 $i=j$,则 $\delta_{ij}=1$;而如果 $i\neq j$,则 $\delta_{ij}=0$.使用该符号,即可给出上述一般同余方程组的求解