

分析力学原理与方法

刘焕堂 编著

厦门大学出版社

分析力学原理与方法

刘焕堂 编著

◆

厦门大学出版社出版 发行

厦 门 大 学 印 刷 厂 印 刷

◆

开本787×1092 1/16 18.875 印张 450 千字

1989年3月 第1版 1989年3月 第1次印刷

印数: 1—1000册

ISBN 7-5615-0179-x/O·10

定 价: 3.85 元

前 言

以考虑力、速度和加速度为基本物理量并以牛顿定律为基础的牛顿力学，在处理力学问题的过程中，靠直观、选坐标系、进行受力分析、列出运动方程，进而解微分方程。可是，遇到约束力较多的系统时，解这些微分方程就变成是非常复杂和十分困难的事了。特别在十八、十九世纪，随着工业革命的迅速发展，在工程技术上迫切需要解决的也正好是这类问题。因此，迫切需要寻求另外的方法来处理这一类的问题。不少的科学家都致力于这一工作，从而建立起分析力学这一重要分支。

分析力学的杰出代表是拉格朗日(Lagrange 1736—1813)，他比较系统地研究了这一方法，并在1788年完成了一部巨著《分析力学》(Mécanique Analytique)。它完全用数学分析的方法来解决所有的力学问题(静力学、动力学、流体静力学和流体动力学)。他引进了广义坐标的概念，通过一个机械系统，推导出拉格朗日形式的动力学方程。这在理论和应用方面，对十九世纪力学的发展产生了很大的影响。以拉格朗日方程为基础的力学简称为拉格朗日力学。

分析力学的另一代表人物是哈密顿(Hamilton 1805—1865)。他在1834年，引入了广义动量的概念，建立起哈密顿形式的动力学方程——正则方程(Canonic equation)。同时，他又提出了可以作为力学基本原理的哈密顿原理。以哈密顿正则方程和哈密顿原理为基础的力学简称为哈密顿力学。

在以拉格朗日力学和哈密顿力学为核心的分析力学的创立与发展的过程中，曾经有过贡献的还有高斯(Gauss)、泊松(Poisson)、雅可俾(Jacobi)、阿佩尔(Appell)、莫培督(Maupertuis)等科学家。

分析力学与牛顿力学尽管有各自的特点，但它们均属于经典力学的范畴。它们的基本原理以及理论结果都相互联系着。

由于分析力学所注重的不是力和加速度，而是具有更广泛意义的能量。同时又采用了广义坐标、广义力、广义动量等，因而使分析力学的方法与结论所适用的范围可以超出力学的领域。因此，分析力学一直是工程技术、天体力学、理论物理工作者所感兴趣的。也正因为分析力学所涉及的理论内容和应用方面均很广，限于作者的水平和篇幅的关系，本书只结合多年的教学实践，着重介绍分析力学的一些基本原理和方法。

厦门大学物理系陈英昭付教授对本书原稿进行了详细的审阅，并提出了很多宝贵的意见，作者借此机会表示衷心的感谢。

由于水平有限，时间匆忙，书中难免有缺点与错误，欢迎读者批评指正。

刘 焕 堂

1987年12月于厦门大学物理系

目 录

第一章 虚功原理与达朗伯原理

§1-1 约束、自由度和广义坐标	(1)
§1-2 实位移、可能位移和虚位移	(3)
§1-3 虚功原理、拉格朗日不定乘子和约束力	(5)
§1-4 达朗伯原理与动力学的普遍方程	(41)
习题	(51)

第二章 拉格朗日方程

§2-1 第一类拉格朗日方程	(60)
§2-2 第二类拉格朗日方程	(62)
§2-3 能量积分	(102)
§2-4 质点组在其稳定平衡位置附近的小振动	(109)
习题	(138)

第三章 哈密顿正则方程

§3-1 正则变量、哈密顿函数	(148)
§3-2 哈密顿正则方程	(148)
§3-3 哈密顿正则方程的能量积分	(150)
习题	(175)

第四章 力学的变分原理

§4-1 变分法简介	(180)
§4-2 微分原理	(189)
一、高斯最小约束原理	(189)
二、赫兹最小曲率原理	(192)
§4-3 积分原理	(194)
一、哈密顿原理	(194)
二、莫培督—拉格朗日最小作用量原理	(229)
习题	(238)

第五章 正则变换与哈密顿——雅可俾方程

§5-1 泊松括号和泊松定理	(241)
§5-2 正则变换	(250)
§5-3 哈密顿——雅可俾方程	(260)
习题	(292)

第一章 虚功原理与达朗伯原理

§ 1—1 约束、自由度和广义坐标

一、约束及其分类

质点组是指这样的一个质点的集合，其中每一个质点的运动都与组中其他质点的位置和运动有关。这样的质点组有时也称为力学组或系统。因此，凡是限制质点组中质点运动的条件均称为约束。如刚体绕定轴转动（限制其位置）、刚性球在粗糙平面上作无滑动的滚动（限制其运动的速度）。

用数学解析式子来表示约束的方程称为约束方程。若质点组是由 N 个质点所组成，那么约束方程可写为

$$f_s(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots, x_N, y_N, z_N, \dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1, \dot{x}_2, \dot{y}_2, \dot{z}_2, \dots, \dot{x}_N, \dot{y}_N, \dot{z}_N; t) = 0 \text{ 或缩写为}$$

$$f_s(x_k, y_k, z_k, \dot{x}_k, \dot{y}_k, \dot{z}_k; t) = 0 \quad (k=1, 2, 3, \dots, N)$$

独立的约束方程可以有好几个，这里可以有

$$s=1, 2, 3, \dots, m,$$

而 $m < 3N$

1. 稳定约束与非稳定约束

若约束方程中，不显含时间变量 t ，则它称为稳定约束。相应的约束方程为

$$f_s(x_k, y_k, z_k, \dot{x}_k, \dot{y}_k, \dot{z}_k) = 0$$

若约束方程中，显含时间变量 t ，则它称为非稳定约束。相应的约束方程为

$$f_s(x_k, y_k, z_k, \dot{x}_k, \dot{y}_k, \dot{z}_k; t) = 0$$

2. 几何约束和运动约束

只限制各质点空间的位置的约束称为几何约束，也称非无限小约束。相应的约束方程为

$$f_s(x_k, y_k, z_k; t) = 0$$

若不仅限制其空间位置，而且还限制其运动速度的约束称为运动约束，也称微分约束。相应的约束方程为

$$f_s(x_k, y_k, z_k, \dot{x}_k, \dot{y}_k, \dot{z}_k; t) = 0$$

若微分约束可积分的话，它将成为几何约束。因此，微分约束只存在它不可积分的情况下才是微分的。称不可积分的运动约束为无限小约束，或非完整的约束。称几何约束（包括可积分的运动约束）为完整约束。受完整约束的质点组称为完整组；受非完整约束的质点组称为非完整组。今后若没特别声明均指完整组。

二. 自由度与广义坐标

若质点组由 N 个质点所组成, 各质点之间受有 m 个独立的几何约束, 即存在 m 个约束方程

$$f_s(x_k, y_k, z_k; t) = 0 \quad \begin{pmatrix} k=1, 2, 3, \dots, N \\ s=1, 2, 3, \dots, m \end{pmatrix}$$

由于 x_k, y_k, z_k 共 $3N$ 个坐标, 那么质点组的独立坐标数为 $3N-m=n$, 因此, 描述质点组位形(位置和形状)的独立变量的数目 $n=3N-m$ 就称为**质点组的自由度**。与此相应的确定质点组的位形所需的独立变量(参数)称为**广义坐标**。在完整约束的情况下, 质点组的自由度数是等于质点组的广义坐标的数目。若质点组的自由度数为 n 时, 广义坐标就取 $q_1, q_2, q_3, \dots, q_n$ 。

倘若质点组的位置确定了, 就意味着组成质点组的每一个质点的位置就确定了。因此, 第 k 个质点的位置可用广义坐标来表示, 即

$$\begin{cases} x_k = x_k(q_1, q_2, q_3, \dots, q_n, t) \\ y_k = y_k(q_1, q_2, q_3, \dots, q_n, t) \\ z_k = z_k(q_1, q_2, q_3, \dots, q_n, t) \end{cases}$$

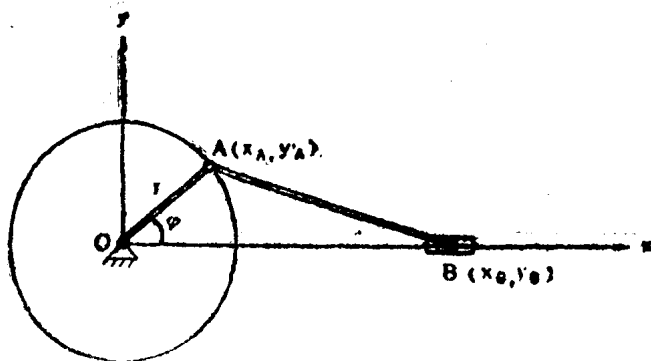


图 1.1

例1、曲柄连杆机构是由曲柄 $OA=r$, 连杆 $AB=l$, 以及十字头 B 所组成(如图1.1所示)。很显然, 此机构的位置可由一个变量, 即曲柄的转角 φ 来决定。因为此机构是一个平面机构, 本来需用四个坐标 x_A, y_A, x_B, y_B 来确定该机构的位置。可是, 它受有三个约束: A 点被约束在以 O 为圆心, 以 r 为半径的圆周上运动; B 点被约束在 x 轴上运动; 连杆 AB 的长度 l 不变。因此, 它的自由度为“1”, 相应的广义坐标可选为 φ 。其实, 从图示很容易可看出点 A 和点 B 的坐标可以通过 φ 来表示

$$\begin{aligned} x_A &= r \cos \varphi & y_A &= r \sin \varphi \\ x_B &= r \cos \varphi + \sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 \varphi} & y_B &= 0 \end{aligned}$$

例2、图1.2所示为双质点系统, 两桿均为无重的刚桿, 并设此系统只能在 xoy 平面内运动。本来需用四个坐标 x_1, y_1, x_2, y_2 来确定系统的位置。可是, 它受有两个约

束：桿 om_1 长度 l_1 不变，桿 m_1m_2 长度 l_2 不变。因此，系统的自由度为“2”，相应的广义坐标可选为 φ_1, φ_2 。其实，从图示很容易可看出 m_1, m_2 的坐标可以通过 φ_1, φ_2 来表示

$$\begin{cases} x_1 = l_1 \sin \varphi_1 \\ y_1 = l_1 \cos \varphi_1 \\ x_2 = l_1 \sin \varphi_1 + l_2 \sin \varphi_2 \\ y_2 = l_1 \cos \varphi_1 + l_2 \cos \varphi_2 \end{cases}$$

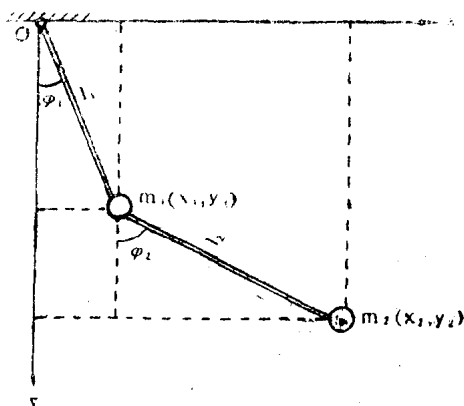


图1.2

例3. 刚体绕定点运动。由刚体运动学得知此种刚体的位置可以用三个独立变量——三个欧勒角来确定。因此，它的自由度为“3”，相应的广义坐标可选用欧勒角 θ, φ, ψ 。

值得注意的是：系统的自由度是唯一确定的，可是相应的广义坐标的选取就不是唯一的。它可以根据具体的实际问题解决的方便而加以选取。

§ 1—2 实位移、可能位移和虚位移

1. 实位移：受约束的质点组在运动过程中，每个质点的位置矢径 $\mathbf{r}_k$ 一方面要满足动力学微分方程和初始条件；另一方面又必须满足约束方程。凡是同时满足这两个要求的运动就是真实运动。在时间 t 到 $t+dt$ 这无限小时间间隔里，真实运动产生的位移就称为**实位移**，并记为 $d\mathbf{r}_k$ ($k=1, 2, 3, \dots, N$)。

2. 可能位移：若采用曲线坐标来表示 $\mathbf{r}_k$ 时

$\mathbf{r}_k = \mathbf{r}_k(x_1, x_2, x_3, \dots, x_N, t)$ 而质点组的约束方程为

$$f_s(x_1, x_2, x_3, \dots, x_N, t) = 0 \quad (s=1, 2, 3, \dots, m) \quad (1.1)$$

微分上述约束方程得

$$\sum_{j=1}^N \frac{\partial f_s}{\partial x_j} dx_j + \frac{\partial f_s}{\partial t} dt = 0 \quad (s=1, 2, 3, \dots, m) \quad (1.2)$$

对稳定约束而言，上式变为

$$\sum_{j=1}^N \frac{\partial f_s}{\partial x_j} dx_j = 0 \quad (s=1, 2, 3, \dots, m) \quad (1.3)$$

凡是满足约束方程(1.1)，亦即满足(1.2)或(1.3)的无限小位移就称为**可能位移**。由于实位移也满足约束方程(1.1)，因而实位移是无穷多个的可能位移中的一个。例如一个质点 M 被约束在一个固定的椭球面上运动(图1.3)，其约束方程为

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

于是方程(1.3)就变为

$$b^2c^2xdx+a^2c^2ydy+a^2b^2zdz=0$$

满足该方程的 $d\mathbf{r}$ (dx, dy, dz) 有无穷多个, 它们就是椭球面上过 M 点 (x, y, z) 的切平面上的任意矢量 $d\mathbf{r}$ (如图 1.3 所示)。这些均为可能位移, 而与质点运动轨迹相切的那个位移 (图中实线所示) 才是实位移。显而易见, 它只是所有可能位移 $d\mathbf{r}$ 中的一个。

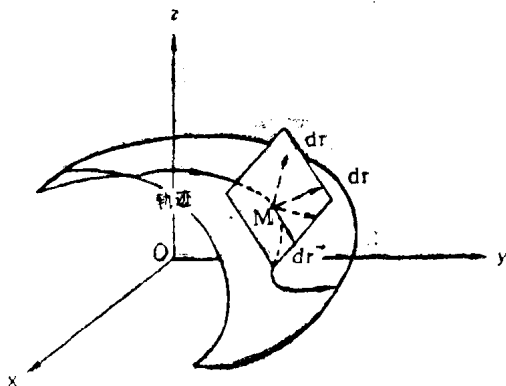


图1.3

3. 虚位移: 任意两个可能位移之差定义为虚位移, 并记为 $\delta\mathbf{r}_k$ ($k=1, 2,$

$3, \dots, N$) 或 δx_k ($k=1, 2, 3, \dots, 3N$)。即

$$\delta\mathbf{r}_k = d\mathbf{r}_k' - d\mathbf{r}_k'' \quad (k=1, 2, 3, \dots, N)$$

$$\text{或} \quad \delta x_k = dx_k' - dx_k'' \quad (k=1, 2, 3, \dots, 3N)$$

式中带“'”或“''”的符号表示两个可能位移。

在稳定约束的情况下有

$$\sum_{j=1}^{3N} \frac{\partial f_s}{\partial x_j} dx_j' = 0, \quad \sum_{j=1}^{3N} \frac{\partial f_s}{\partial x_j} dx_j'' = 0$$

两式相减并由虚位移的定义得

$$\sum_{j=1}^{3N} \frac{\partial f_s}{\partial x_j} \delta x_j = 0 \quad (s=1, 2, 3, \dots, m) \quad (1.4)$$

比较(1.3)式与(1.4)式得: 在稳定约束的情况下, 虚位移就是可能位移, 即实位移是无穷多个虚位移中的一个。

在非稳定约束的情况下, 可能位移应满足方程(1.2)即

$$\sum_{j=1}^{3N} \frac{\partial f_s}{\partial x_j} dx_j' + \frac{\partial f_s}{\partial t} dt = 0$$

$$\sum_{j=1}^{3N} \frac{\partial f_s}{\partial x_j} dx_j'' + \frac{\partial f_s}{\partial t} dt = 0$$

两式相减并由虚位移的定义同样得出方程(1.4)即

$$\sum_{j=1}^{3N} \frac{\partial f_s}{\partial x_j} \delta x_j = 0 \quad (s=1, 2, 3, \dots, m)$$

比较(1.2)与(1.4)式得知: dx_j 和 δx_j 满足的方程各不相同。因此, 在非稳定约束的情况下, 虚位移不一定是可能位移, 实位移不一定是无穷多虚位移中的一个。

虚位移是一个抽象的“等时变分”的概念(关于等时变分, 待以后讲变分原理时才进一步阐述。等时变分的运算与微分运算相同, 但 $\delta t \equiv 0$ 。)

若质点组的广义坐标为 $(q_1, q_2, q_3, \dots, q_n)$ ，那么质点组的可能位移可表为

$$dx_k = \sum_{i=1}^n \frac{\partial x_k}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial x_k}{\partial t} dt \quad (k=1, 2, 3, \dots, 3N)$$

或
$$dr_k = \sum_{i=1}^n \frac{\partial r_k}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial r_k}{\partial t} dt \quad (k=1, 2, 3, \dots, N) \quad (1.5)$$

而虚位移为

$$\delta x_k = \sum_{i=1}^n \frac{\partial x_k}{\partial q_i} \delta q_i \quad (k=1, 2, 3, \dots, 3N)$$

或
$$\delta r_k = \sum_{i=1}^n \frac{\partial r_k}{\partial q_i} \delta q_i \quad (k=1, 2, 3, \dots, N) \quad (1.6)$$

其中 δq_i 是以广义坐标表示的虚位移。值得注意的是虚位移 δx_k 与 δq_i 中，只有 δq_i 是彼此独立的。

§ 1—3 虚功原理、拉格朗日不定乘子和约束力

一、理想约束

在研究非自由质点组时，我们有必要将作用在质点组的力（包括内力与外力）分为主动力与约束力两大类。凡是约束物体作用在质点组上的力就称为**约束力**。其他的力均称为**主动力**。

由于力在虚位移上所作的功称为**虚功**。因此，当质点组所受的约束力在任何虚位移上所作的虚功之和等于零时，就称此约束为**理想约束**。其数学式子可表示为

$$\sum_{k=1}^N \mathbf{N}_k \cdot \delta \mathbf{r}_k = 0$$

其中 $\mathbf{N}_k$ 是作用在第 k 个质点上的约束力。

显然，没有摩擦力的几何约束都属于理想约束。例如处在光滑固定的曲面上的质点，约束力的方向是沿着固定曲面的法线方向。而质点的虚位移则在切平面内。因而，约束力垂直于任何虚位移，所以约束力在任何虚位移上所作的虚功都等于零。当然，不仅光滑曲面的约束，其他诸如不可伸长的绳子约束，光滑铰链约束，理想的连杆约束，刚性约束以及作纯滚动的刚体所在的曲面等等之类的约束均属理想约束。

二、虚功原理

虚功原理也称虚位移原理。它给静力学问题以普遍的解决方法，因此是静力学的基本原理。

1. 杠杆的虚功原理

吴巴尔笛(1545—1607)首先用虚功原理来处理杠杆的平衡问题。

设杠杆达到平衡如图1.4所示。由初等静力学可得平衡条件为

$$P \cdot \overline{OA} = Q \cdot \overline{OB}$$

即 $\frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} = \frac{Q}{P}$ (1.7)

当杠杆作任意虚位移(绕O点转一个微小的角度 $\delta\varphi$)时,重物P就往下移动 $\delta h_P = \overline{A''A'}$,重物Q就往上移动 $\delta h_Q = \overline{B''B'}$,故P、Q二力所作的虚功之和为

$$\delta W = -Q\delta h_Q + P\delta h_P$$
 (1.8)

因为 $\triangle OAA' \sim \triangle OBB'$, 所以 $\frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OB'}}$

又 $rt\triangle OA''A' \sim rt\triangle OB''B'$, 故得

$$\frac{\overline{OA'}}{\overline{OB'}} = \frac{\overline{A''A'}}{\overline{B''B'}} = \frac{\delta h_P}{\delta h_Q}$$

因此,最后得到

$$\frac{\delta h_P}{\delta h_Q} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OB}}$$

即 $\delta h_P = \frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} \delta h_Q$ (1.9)

把(1.7)式与(1.9)式同时代入(1.8)式得

$$\delta W = Q\delta h_Q - Q\delta h_Q = 0$$
 (1.10)

由此得出杠杆的虚功原理:要使杠杆平衡,其充分必要条件是,作用在杠杆上的一切主动力在任何的虚位移上所作的虚功之和等于零。

继吴巴尔笛之后,斯蒂文(1548—1620)应用此虚功原理研究滑轮组的平衡问题;伽利略(1564—1642)进一步扩展到斜面的研究。到了1717年,才由约翰·伯努力(1667—1748)明确了虚功原理的普遍性和它的表述。

2. 质点组的虚功原理

具有稳定理想约束的质点组,其平衡的充要条件是,所有的主动力在任何的虚位移上所作的虚功之和等于零。

即 $\sum_{k=1}^N \mathbf{F}_k \cdot \delta \mathbf{r}_k = 0$ (1.11)

式中 $\mathbf{F}_k$ 表示作用在第k个质点上的主动力。

必要性的证明:即需证明若质点组处于平衡状态,则它必满足方程(1.11)。设作用在第k个质点上的所有主动力为 $\mathbf{F}_k$,约束力为 $\mathbf{N}_k$ 。由于质点组是处于平衡状态,因此

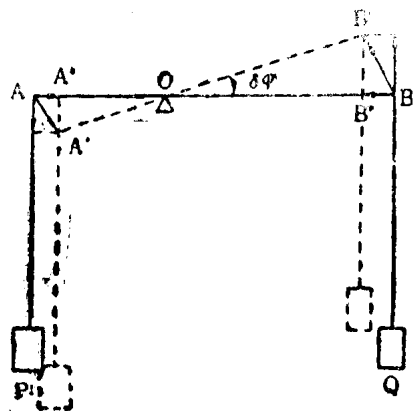


图1.4

质点组内任一质点 k 也将处于平衡状态。即

$$\mathbf{F}_k + \mathbf{N}_k = 0$$

假定给质点 k 以任何的虚位移 $\delta \mathbf{r}_k$ ，则主动力 $\mathbf{F}_k$ 与约束力 $\mathbf{N}_k$ 在虚位移 $\delta \mathbf{r}_k$ 上所作的虚功之和为零。即

$$\mathbf{F}_k \cdot \delta \mathbf{r}_k + \mathbf{N}_k \cdot \delta \mathbf{r}_k = 0$$

显然，对于质点组内的其余质点，也均有此类等式存在。若将这些等式相加便得到

$$\sum_{k=1}^N \mathbf{F}_k \cdot \delta \mathbf{r}_k + \sum_{k=1}^N \mathbf{N}_k \cdot \delta \mathbf{r}_k = 0$$

由于质点组是受理想约束，故有

$$\sum_{k=1}^N \mathbf{N}_k \cdot \delta \mathbf{r}_k = 0$$

因此，若质点组处于平衡状态，则它的平衡条件为

$$\sum_{k=1}^N \mathbf{F}_k \cdot \delta \mathbf{r}_k = 0$$

这就是所要证明的必要条件。

充分性的证明：即需证明若质点组满足方程(1.11)，则它必处于平衡状态。采用反证法，假定质点组不处于平衡状态，则它必由静止状态进入运动状态。因此，作用在质点 k 上所有的主动力 $\mathbf{F}_k$ 与约束力 $\mathbf{N}_k$ 就有一合力 $\mathbf{R}_k$ ，即

$$\mathbf{F}_k + \mathbf{N}_k = \mathbf{R}_k$$

于是，质点 k 将沿 $\mathbf{R}_k$ 方向产生一个与实位移 $d\mathbf{r}_k$ 相重合的虚位移 $\delta \mathbf{r}_k$ （因为质点组所受的约束为稳定约束）故有

$$\mathbf{R}_k \cdot \delta \mathbf{r}_k > 0$$

进而可得：主动力 $\mathbf{F}_k$ 和约束力 $\mathbf{N}_k$ 在虚位移 $\delta \mathbf{r}_k$ 上所作的虚功之和大于零。即

$$\mathbf{F}_k \cdot \delta \mathbf{r}_k + \mathbf{N}_k \cdot \delta \mathbf{r}_k > 0$$

显然，对于质点组内其余质点也均有此类等式存在。若将它们相加起来便得

$$\sum_{k=1}^N \mathbf{F}_k \cdot \delta \mathbf{r}_k + \sum_{k=1}^N \mathbf{N}_k \cdot \delta \mathbf{r}_k > 0$$

由于质点组所受的是理想的约束，则有

$$\sum_{k=1}^N \mathbf{N}_k \cdot \delta \mathbf{r}_k = 0$$

因此，若质点组不处于平衡状态，则它必满足不等式

$$\sum_{k=1}^N \mathbf{F}_k \cdot \delta \mathbf{r}_k > 0$$

这与原假设的条件

$$\sum_{k=1}^N \mathbf{F}_k \cdot \delta \mathbf{r}_k = 0$$

相矛盾，于是质点不可能产生运动，亦即质点组必处于平衡状态。

若 $\mathbf{F}_k$ 与 $\delta \mathbf{r}_k$ 在笛卡尔直角坐标系下，分别表为

$$\mathbf{F}_k = X_k \mathbf{i} + Y_k \mathbf{j} + Z_k \mathbf{k} \text{ 与 } \delta \mathbf{r}_k = \delta x_k \mathbf{i} + \delta y_k \mathbf{j} + \delta z_k \mathbf{k}$$

那么虚功原理 (1.11) 式又可解析地表为

$$\sum_{k=1}^N (X_k \delta x_k + Y_k \delta y_k + Z_k \delta z_k) = 0 \quad (1.12)$$

由于虚功原理的表达式 (1.11) 或 (1.12) 均不出现约束力项，因此利用虚功原理来解决平衡问题时，不必考虑约束力，这便是虚功原理的最大优点。反之，若要求得约束力，只好另想他法。

下面我们举一些应用虚功原理解决静力学问题的例题。

例1. 求自由刚体的平衡方程。

解： 自由刚体要达到平衡必须满足方程 (1.11) 即

$$\sum_{k=1}^N \mathbf{F}_k \cdot \delta \mathbf{r}_k = 0$$

式中 $\mathbf{F}_k$ 表示作用在刚体上任一质点 m_k 上的主动力， $\delta \mathbf{r}_k$ 表示质点 m_k 的虚位移。

由刚体运动学得知，刚体的任何位移均可视为由对刚体所有各点都相同的平动位移 $\delta \mathbf{a}$ 和绕某一瞬轴转过一角度 $\delta \varphi$ 的转动位移所合成。因此，刚体上任一质点 m_k 的位移为

$$\delta \mathbf{r}_k = \delta \mathbf{a} + \delta \varphi \times \mathbf{r}_k$$

式中 $\mathbf{r}_k$ 表示质点 m_k 的位矢。把 $\delta \mathbf{r}_k$ 的表达式代入上述的平衡条件方程即得

$$\sum_{k=1}^N \mathbf{F}_k \cdot (\delta \mathbf{a} + \delta \varphi \times \mathbf{r}_k) = 0$$

$$\text{或} \quad \sum_{k=1}^N \mathbf{F}_k \cdot \delta \mathbf{a} + \sum_{k=1}^N \mathbf{F}_k \cdot (\delta \varphi \times \mathbf{r}_k) = 0$$

由矢量代数知道，上述式子又可表为

$$\sum_{k=1}^N \mathbf{F}_k \cdot \delta \mathbf{a} + \sum_{k=1}^N (\mathbf{r}_k \times \mathbf{F}_k) \cdot \delta \varphi = 0$$

由于 $\delta \mathbf{a}$ 和 $\delta \varphi$ 对刚体上任何一点都是一样的，故有

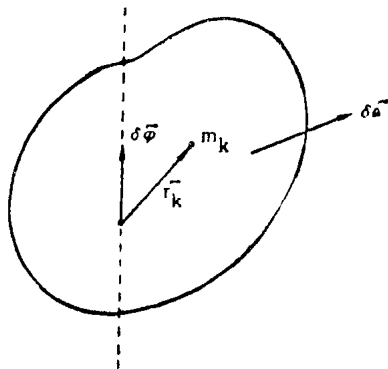


图 1.5

$$\delta \mathbf{a} \cdot \sum_{k=1}^N \mathbf{F}_k + \delta \varphi \cdot \sum_{k=1}^N \mathbf{r}_k \times \mathbf{F}_k = 0$$

又 $\delta \mathbf{a}$ 与 $\delta \varphi$ 是彼此独立的, 因此从上述式子便可得到

$$\sum_{k=1}^N \mathbf{F}_k = 0, \quad \sum_{k=1}^N \mathbf{r}_k \times \mathbf{F}_k = 0$$

这就是初等静力学中著名的刚体平衡方程。

例2. 均匀杆OA重 P_1 , 能在铅垂平面内绕固定铰链O转动。此杆的A端用铰链连住另一重 P_2 的均匀杆AB, 在AB杆的B端加一水平力 F 。求平衡时此二杆与水平所成的角度 α 及 β 。

解: 若选如图1.6所示的坐标系, 并设杆OA的长度为 l_1 , 杆AB的长度为 l_2 。那么由图示可得:

杆OA的质心 C_1 的坐标为

$$\begin{cases} x_{c_1} = \frac{l_1}{2} \cos \alpha \\ y_{c_1} = \frac{l_1}{2} \sin \alpha \end{cases}$$

杆AB的质心 C_2 的坐标为

$$\begin{aligned} x_{c_2} &= l_1 \cos \alpha + \frac{l_2}{2} \cos \beta \\ y_{c_2} &= l_1 \sin \alpha + \frac{l_2}{2} \sin \beta \end{aligned}$$

B点的坐标为

$$\begin{cases} x_B = l_1 \cos \alpha + l_2 \cos \beta \\ y_B = l_1 \sin \alpha + l_2 \sin \beta \end{cases}$$

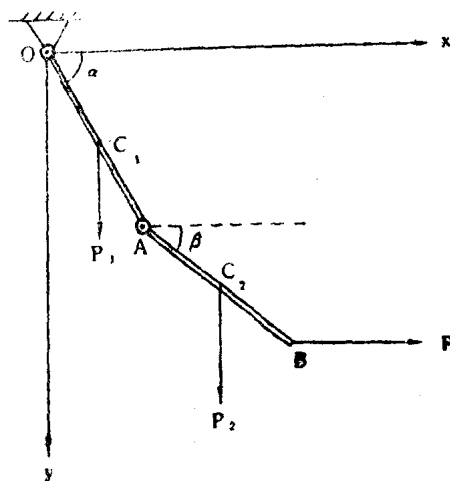


图1.6

现在把OA杆与AB杆以及铰连视为一个质点组(即系统), 显然, 此系统具有两个自由度, 故选 α, β 为相应的广义坐标。于是

$$\delta y_{c_1} = \frac{l_1}{2} \cos \alpha \delta \alpha$$

$$\delta y_{c_2} = l_1 \cos \alpha \delta \alpha + \frac{l_2}{2} \cos \beta \delta \beta$$

$$\delta x_B = -l_1 \sin \alpha \delta \alpha - l_2 \sin \beta \delta \beta$$

由虚功原理得

$$P_1 \delta y_{c_1} + P_2 \delta y_{c_2} + F \delta x_B = 0$$

将 δy_{c_1} 与 δy_{c_2} 以及 δx_B 的表述式代入上述方程便得

$$\left(\frac{1}{2} P_1 l_1 \cos \alpha + P_2 l_1 \cos \alpha - F l_1 \sin \alpha \right) \delta \alpha + \left(-\frac{1}{2} P_2 l_2 \cos \beta - F l_2 \sin \beta \right) \delta \beta = 0$$

因为 α, β 为广义坐标, 所以 $\delta\alpha, \delta\beta$ 是彼此独立且任意的。故上述方程要成立它们前面的系数就必须同时等于零。即

$$\begin{cases} \frac{1}{2}P_1l_1\cos\alpha + P_2l_1\cos\alpha - Fl_1\sin\alpha = 0 \\ \frac{1}{2}P_2l_2\cos\beta - Fl_2\sin\beta = 0 \end{cases}$$

由此可得

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{P_1 + 2P_2}{2F}, \quad \operatorname{tg}\beta = \frac{P_2}{2F}$$

例3. 均匀杆 $AB=a$, 重 P , 一端靠在光滑垂直墙上, 另一端靠在光滑固定的侧面上, 如欲使杆子在任意位置平衡, 求此侧面的形状。

解: 选如图 1.7 所示的坐标系, 那么

A 点的坐标为

$$\begin{cases} x_A = 0 \\ y_A = y_B + a\cos\alpha \end{cases}$$

B 点的坐标为

$$\begin{cases} x_B = a\sin\alpha \\ y_B = y_B(a) \end{cases}$$

C 点的坐标为

$$\begin{cases} x_C = \frac{a}{2}\sin\alpha \\ y_C = \frac{y_A + y_B}{2} \end{cases}$$

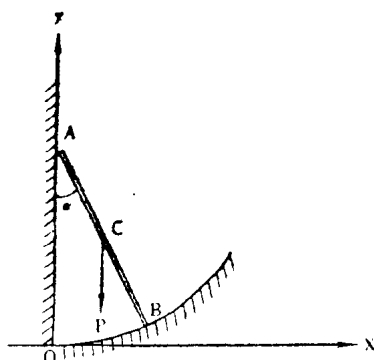


图1.7

显然, 此系统具有一个自由度, 故选 α 为相应的广义坐标。

由虚功原理得 $P\delta y_C = 0$ 即 $\delta y_C = 0$

而
$$\delta y_C = \frac{1}{2}\delta(2y_B + a\cos\alpha) = \left(\frac{dy_B}{d\alpha} - \frac{1}{2}a\sin\alpha\right)\delta\alpha$$

于是
$$\left(\frac{dy_B}{d\alpha} - \frac{1}{2}a\sin\alpha\right)\delta\alpha = 0$$

因为 α 为广义坐标, 所以 $\delta\alpha$ 是任意的, 故上述式子变为

$$\frac{dy_B}{d\alpha} - \frac{1}{2}a\sin\alpha = 0$$

因此
$$\int_0^{y_B} dy_B = \int_0^\alpha \frac{a}{2}\sin\alpha d\alpha$$

故得
$$y_B = \frac{a}{2}(1 - \cos\alpha)$$

即
$$\left(y_B - \frac{a}{2}\right) = -\frac{a}{2}\cos\alpha$$

而
$$x_B = a\sin\alpha$$

于是使得
$$\frac{x_B^2}{a^2} + \frac{(y_B - \frac{a}{2})^2}{(\frac{a}{2})^2} = 1$$

或
$$x_B^2 + (2y_B - a)^2 = a^2 \text{——椭圆}$$

椭圆中心在 $x=0, y=\frac{a}{2}$ 处, 半长轴为 a 、半短轴 $\frac{a}{2}$ 。

当然, 此题不利用虚功原理求解会更为简便。因为杆随意平衡, 其质心 C 始终在水平直线 $y=\frac{a}{2}$ 上移动, 所以 $y_B=\frac{a}{2}(1-\cos\alpha)$, 而 $x_B=asin\alpha$, 因此使得

$$\frac{x_B^2}{a^2} + \frac{(y_B - \frac{a}{2})^2}{(\frac{a}{2})^2} = 1$$

或
$$x_B^2 + (2y_B - a)^2 = a^2 \text{——椭圆}$$

此结果与上述利用虚功原理求之所得的结果完全一样。

例4. 均质杆 $AB=a$, 重 Q , 放在一固定容器中, 此容器的形状为一旋转抛物物体, 如抛物体的方程为 $x^2=2Py$, 求平衡位置。

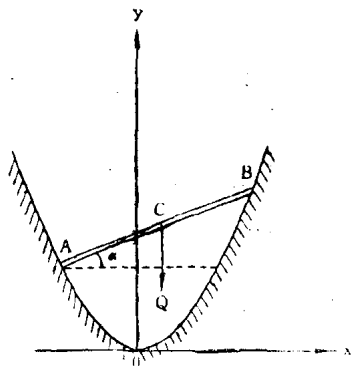


图1.8

解: 选取如图1.8所示的坐标系, A 点的坐标为 (x_A, y_A) ; B 点的坐标为 (x_B, y_B) 。由图示可得

$$x_B - x_A = a \cos \alpha$$

$$y_B - y_A = a \sin \alpha$$

又 $x_A^2 = 2Py_A, x_B^2 = 2Py_B$ 故得

$$\sqrt{2Py_B} + \sqrt{2Py_A} = a \cos \alpha \quad (\text{因为 } x_A = -\sqrt{2Py_A}) \quad (1)$$

$$y_B - y_A = a \sin \alpha \quad (2)$$

由(1)式得

$$\sqrt{2Py_B} = a \cos \alpha - \sqrt{2Py_A}$$

即
$$2Py_B = a^2 \cos^2 \alpha - 2a \cos \alpha \sqrt{2Py_A} + 2Py_A$$

故
$$2P(y_B - y_A) = a^2 \cos^2 \alpha - 2a \cos \alpha \sqrt{2Py_A} \quad (3)$$

把(2)式代入(3)式得

$$2P a \sin \alpha = a^2 \cos^2 \alpha - 2a \cos \alpha \sqrt{2Py_A}$$

即
$$\sqrt{2Py_A} = \frac{a}{2} \cos \alpha - P \tan \alpha$$

故
$$y_A = \frac{a^2}{8P} \cos^2 \alpha - \frac{a}{2} \sin \alpha + \frac{P}{2} \tan^2 \alpha \quad (4)$$

因而杆的质心 C 的纵坐标为

$$y_c = y_A + \frac{a}{2} \sin \alpha = \frac{a^2}{8P} \cos^2 \alpha + \frac{P}{2} \lg^2 \alpha$$

于是, 该系统具有一个自由度, 故选 α 为相应的广义坐标。则

$$\delta y_c = \left(P \frac{\sin \alpha}{\cos^3 \alpha} - \frac{a^2}{4P} \sin \alpha \cos \alpha \right) \delta \alpha \quad (5)$$

由虚功原理得

$$Q \delta y_c = 0 \quad \text{即} \quad \delta y_c = 0$$

把 (5) 式代入上述式子即得

$$\left(P \frac{\sin \alpha}{\cos^3 \alpha} - \frac{a^2}{4P} \sin \alpha \cos \alpha \right) \delta \alpha = 0$$

由于 α 为广义坐标, 所以 $\delta \alpha$ 为任意的, 故有

$$P \frac{\sin \alpha}{\cos^3 \alpha} - \frac{a^2}{4P} \sin \alpha \cos \alpha = 0$$

$$\text{即} \quad \left(\frac{P}{\cos^3 \alpha} - \frac{a^2}{4P} \cos \alpha \right) \sin \alpha = 0$$

(i) 若 $\sin \alpha = 0$ 得 $\alpha = 0$

(ii) 若 $\left(\frac{P}{\cos^3 \alpha} - \frac{a^2}{4P} \cos \alpha \right) = 0$ 得 $\cos \alpha = \sqrt{\frac{2P}{a}}$

因此, 若 $a \leq 2P$ 时, 则杆 AB 仅有一平衡位置, 此时杆为水平 (即 $\alpha = 0$); 若 $a > 2P$ 时, y_c

与倾角 α 的关系如图 1.9 所示。其平衡位置有二: $\alpha = 0$; $\alpha = \arccos \sqrt{\frac{2P}{a}}$ 其中 $\alpha = 0$ 为不

稳定平衡位置, 而 $\alpha = \arccos \sqrt{\frac{2P}{a}}$ 为稳定平衡位置。此时杆通过抛物线的焦点。

例 5. 在半径为 r 的铅垂半圆钢丝上, 穿二重 P 及 Q 之小球, 此二球用长 $2l$ 的不可伸长的绳连住。不计摩擦力, 求平衡位置 (即绳和水平所成之角 α)。

解: 选如图 1.10 所示的坐标系, 那么由图示可得 A 点的纵坐标为

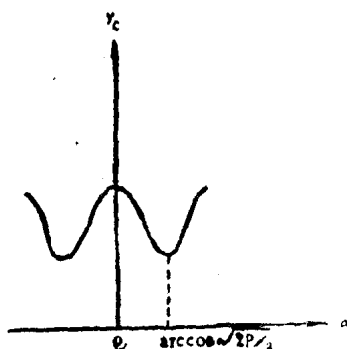


图 1.9

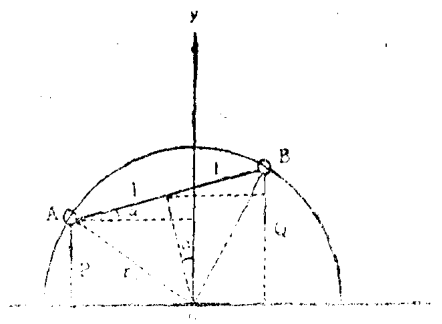


图 1.10

$$y_A = \sqrt{r^2 - l^2} \cos \alpha - l \sin \alpha$$

B 点的纵坐标为

$$y_B = \sqrt{r^2 - l^2} \cos \alpha + l \sin \alpha$$

因而此系统（把两个小球与绳子视为一个系统）具有一个自由度，故选 α 为广义坐标，于是：

$$\delta y_A = (-\sqrt{r^2 - l^2} \sin \alpha - l \cos \alpha) \delta \alpha$$

$$\delta y_B = (-\sqrt{r^2 - l^2} \sin \alpha + l \cos \alpha) \delta \alpha$$

由虚功原理得

$$-P \delta y_A - Q \delta y_B = 0$$

把上述的 δy_A 、 δy_B 的表达式代入即得

$$[P(\sqrt{r^2 - l^2} \sin \alpha + l \cos \alpha) - Q(-\sqrt{r^2 - l^2} \sin \alpha + l \cos \alpha)] \delta \alpha = 0$$

因为 α 为广义坐标，所以 $\delta \alpha$ 为任意的，故有

$$(P+Q)\sqrt{r^2 - l^2} \sin \alpha - (Q-P)l \cos \alpha = 0$$

$$\text{即 } \operatorname{tg} \alpha = \frac{(Q-P)l}{(P+Q)\sqrt{r^2 - l^2}}$$

例6. 半径为 r 的光滑半球形碗，固定在水平面上，一均质棒斜靠在碗缘，一端在碗内，一端则在碗外。若在碗内的长度为 a ，试证棒全长为 $\frac{4(a^2 - 2r^2)}{a}$

证：选如图1.11所示的坐标系，则棒的质心 C 的纵坐标为

$$y_c = \left(a - \frac{l}{2}\right) \sin \alpha$$

$$= \left(a - \frac{l}{2}\right) \cdot \frac{\sqrt{4r^2 - a^2}}{2r}$$

显然，此棒具有一个自由度，故选 a 为广义坐标。于是

$$\begin{aligned} \delta y_c &= \frac{1}{2r} \left[\sqrt{4r^2 - a^2} \delta a - \left(a - \frac{l}{2}\right) \cdot \frac{a \delta a}{\sqrt{4r^2 - a^2}} \right] \\ &= \frac{1}{2r \sqrt{4r^2 - a^2}} \left[4r^2 - 2a^2 + \frac{l}{2} a \right] \delta a \end{aligned}$$

由虚功原理得

$$P \delta y_c = 0 \quad \text{即} \quad \delta y_c = \frac{1}{2r \sqrt{4r^2 - a^2}} \left[4r^2 - 2a^2 + \frac{l}{2} a \right] \delta a = 0$$

因为 a 为广义坐标，所以 δa 为任意的。故有

$$\frac{1}{2r \sqrt{4r^2 - a^2}} \left[4r^2 - 2a^2 + \frac{l}{2} a \right] = 0$$

由题意得知 $a < 2r$ （即需保证棒的一端在碗内）。

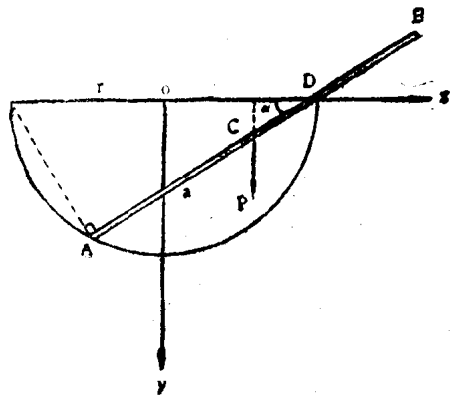


图1.11