九年一貫制試用課本

（全 日 制）

微积分学

WEIJIFENXUE

人 民 教 育 出 版 社

九年一貫制試用課本
(全日制)
微 积 分 学
北京师范大学数学系普通教育改革小組編
北京市書刊出版业营业許可証出字第二号
人民教育出版社出版(北京景山东街)
新 华 书 店 发 行
北京京华印书局印刷

統一书号: K7012·967 字数: 119 千
开本: 787×1092 毫米 1/32 印张: $6\frac{1}{8}$
1960 年第一版
第一版 1960 年 5 月第一次印刷
北京: 1—10.000 册

定价 0.32 元

前　　言

在党的总路綫的光輝照耀下，随着 1958 年以来的連續大跃进，人民公社的建立与蓬勃发展，我国已經进入了一个持續跃进的新的历史阶段．今年，我国又出現了两个高潮：一个是技术革新和技术革命的高潮，一个是农村和城市大办人民公社的高潮．这两个高潮对教育事业提出了一系列新的問題，广大工农群众要求迅速改变我国"一穷二白"的落后面貌，迅速攀登科学文化高峰，加快我国社会主义建設的速度．但是現行中小学数学教学内容陈旧落后，脱离实际，存在严重少慢差費現象，与現代科学技术飞跃发展的形势极不相称，远远不能滿足社会主义建設的迫切需要，因此，中小学数学教学必須改革．

北京师范大学数学系，在党的領导下，发动了广大师生，深入地进行了这次根本性的改革，大破数学教学的旧体系，建立新体系．在 1958 年以来的調查研究及实际工作經驗的基础上，根据"适当縮短年限，适当提高程度，适当控制学时，适当增加劳动"的精神，1960 年寒假中，我們又深入到工厂、人民公社、学校、科学研究机关等处进行調查訪問，編出了一套"九年一貫制(全日制)学校数学教学改革草案(初稿)"．根据这个草案編出了一套九年一貫制(全日制)学校数学課試用教材．这套教材分成代数、初等函数、微积分学、概率論与数理統計、制图学五科．代数中包括算术内容，但因从始至終貫穿代数因素，故定名代数．

这套数学教材的編写尽量遵循以下四点要求：

教材内容及体系为社会主义服务，特别是为現代化生

产和尖端科学技术服务.

二、教材体系要貫彻辯証唯物主义观点，理論联系实际的精神，以函数为綱，尽量作到数与形的結合.

三、教材中要貫彻概念与計算相結合的精神.

四、教材的份量与难易程度要适合学生实际接受能力，和認識发展的客观过程.

这套数学教材还沒有經过試驗，希望教师能創造性地使用，必要时也可以适当增減一些材料. 特别是希望教师能根据情况增加一些例題与习題，以便学生能更巩固地掌握各种概念，熟練地进行各种計算. 教材中对各种計算工具作了集中介紹，希望教师能特别注意分散使用. 在作习題及課外活动中，尽量要求学生使用学过的計算工具进行計算.

微积分学內容包括：函数的极限和連續、微分学、积分学、常微分方程以及空間解析几何.

本書注意从实际生活中的例子引入基本概念，揭露概念本質；对定理着重講清它的实际意义，推理过程繁瑣，不易接受的不作推导.

本書特别着重于計算与实际应用方面，要求学生能熟練地掌握微分法与积分法，会运用积分表，掌握基本的近似計算方法，能够运用所学的知識解决实际問題.

在編写过程中，我們得到了許多单位的帮助，給我們提出了許多宝貴的意見，最后在教育部直接領导下，組織了北京、天津、辽宁、山西、河南等地区的专家和优秀大、中、小学教师对这套教材进行了討論研究，我們对于这些单位的同志們在此表示衷心感謝. 人民教育出版社和印刷厂也給予了热情无私的帮助，发揮

了共产主义大协作的精神，在此一并致謝.

由于时間仓促，調查了解工作做得还很不够，加上我們水平較差，一定还存在許多缺点和錯誤，我們热情的希望教师和讀者提出意見，使本書不断地得到修改、补充和完善，在教育战綫上开出燦烂之花，結出丰碩之果.

北京师范大学数学系普通教育改革小組

1960年4月25日

目　录

第一章　極限与連續

微积分学的主要內容包括微分学和积分学两大部分，它用极限方法研究函数的变化过程和趋势，所以极限是微积分学中最基本的概念．这里我們介紹极限及与极限有着密切关系的无穷小量、无穷大量和連續函数等概念．

§1　无穷小量与无穷大量

研究了函数以后，我們認識到自然界中量与量之間有着密切的联系，一个量的变化会引起另一些量的变化．而且各个量的变化情况也是多种多样的．如作加速运动的物体的速度是随着时間的增加而不断增大的量；作减速运动的物体的速度就是随着时間的增加而不断减小的量；又如一天內气溫的变化，随着时間的变化，有时升高，有时降低．因此我們必須对变量作进一步的研究，才能更好地解决生产实际中提出的問題．下面我們首先研究两种比較簡单而又常遇到的变量的变化情况．

在生产实际中，我們常常需要真空的設备．这样就要从密閉容器中抽出空气．每抽一次，容器內空气就减少了一些．当我們抽空气的次数无限增多时，容器內的空气密度不断减小，并且可以无限变小．在单摆的振动过程中，由于空气阻力和摩擦力的影响，单摆振动的振幅，随着时間的增加而不断减小，而且可以无限变小．类似于这样变化着的量，在自然界中是大量存在的．以后我們把这种**随着自变量的变化而它的絕对值可以无限变小的量叫做无穷小量．**

定义 1. 随着自变量的变化而它的絕对值可以无限变小的量叫作在这变化过程中的无穷小量．記作 $f(x)\to 0$．

在自然界中，变量的变化也还有另外的情况．例如彗星 k 圍繞着太阳 s 运行，假定彗星在太阳系范圍內只是出現一次，它的軌道是双曲綫（图 1）．从太阳到彗星的距离 r，在彗星运行过程中是无限变大的．又如函数 $\operatorname{tg} x$，当 x 趋于 $\frac{\pi}{2}$ 时，曲綫伸向无穷远（图 2）．即函数値随着 x 趋向于 $\frac{\pi}{2}$ 而无限增大．类似这样变化着的量，在自然界中也很多，我們把这种随着自变量的变化而它的絕对値无限变大的量叫做无穷大量．

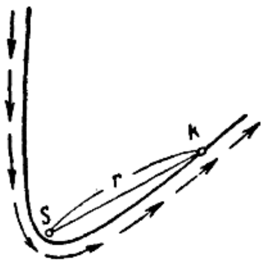

图 1

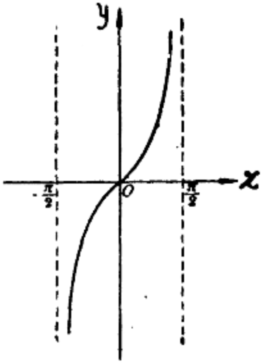

图 2

定义 2. 随着自变量的变化而其絕对值无限变大的量叫做在这变化过程中的无穷大量，記作 $f(x)\to\infty$．

无穷大量和无穷小量都是表示变量的变化趋势，不能把它們理解成是"很小很小"的量或者是"很大很大"的量．而且这两个变量之間有密切的联系．例如質量为 m_1 和 m_2 的两个物体間

万有引力$f=K\frac{m_1m_2}{r^2}$的大小，是与它們之間距离 r 的平方成反比的．于是我們可以很容易看出，当 $r\to\infty$ 时 $f\to 0$．一般地，当变量 $f(x)$ 趋向于无穷大时，它的倒数$\frac{1}{f(x)}$就趋向于零；同样还有当 $f(x)$ 趋向于零时，它的倒数$\frac{1}{f(x)}$趋向于无穷大．

我們也常遇到这样的函数，如 $y=\sin x$ 的値总是在 -1 和 $+1$ 之間．这样的函数我們通常称为有界函数．下面給出一般的定义．

定义 3．如果存在着一个定数 $M>0$，在整个变化过程中都有 $|f(x)|\leqslant M$．就称 $f(x)$ 在这过程中有界．

无穷小量有一个重要的性質：无穷小量和有界量的乘积仍然是无穷小量．

例如：函数$\frac{\sin x}{x}$．因为在整个数軸都有 $|\sin x|\leqslant 1$，所以 $\left|\frac{\sin x}{x}\right|\leqslant\left|\frac{1}{x}\right|$．而当 $x\to\infty$ 时，$\left|\frac{1}{x}\right|\to 0$．因此可以得到，当 $x\to\infty$时，$\frac{\sin x}{x}\to 0$．这里，$\sin x$ 是一个有界量，$\frac{1}{x}$ 是一个无穷小量．关于无穷小量的这个性質，在介紹了极限概念以后就可以給一般的証明．

§2 函数的極限和連續的概念

为了求圓周的长，我們可以分别用內接正四边形的周长、內接正八边形的周长、……，近似地表示圓的周长．內接多边形的边数越多，它的近似程度就越好，也就是 S 和 S_n 的差越小(其中 S 表示圓的周长，S_n 表示內接正多边形的周长)．由此可見，$S-S_n$ 这个量，是随着內接正多边形边数的无限增多时的无穷小量．这时，我們就把圓周长 S 叫做正多边形周长 S_n 当边数无

限增多时的极限．記作 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$．

把一个溫度是 T_1 的物体，浸到溫度是 T_2 的水中($T_2<T_1$)，物体逐漸冷却，而水則逐漸变热，这样物体的溫度 T_1 就无限趋近于某一固定的溫度 T_0，也就是 $T-T_0$ 在这个变化过程中是一个无穷小量．我們就說 T_1 的极限是 T_0．

以下我們給出极限的定义：

定义 1．对于函数 $f(x)$，如果随着 x 趋向于 a（或趋向于 ∞），$f(x)$ 与某一个常量 A 的差 $f(x)-A$ 是一个无穷小量．那么，我們就把 A 叫做函数 $f(x)$ 当 $x\to a(x\to\infty)$ 时的极限．記作 $\lim\limits_{\substack{x\to a\\(x\to\infty)}} f(x)=A$．

特别是，无穷小量的极限是零．記作 $\lim\limits_{\substack{x\to a\\(x\to\infty)}} f(x)=0$．

前面用极限研究函数的变化趋势．在大量的自然現象中，許多量常常是連續变化的．例如气溫是时間的函数，它随着时間的变化而連續变化．以一定速度行駛的汽車，行駛的路程是时間的函数，路程是随时間連續变化的．刻划連續变化的量的这种函数叫做連續函数．下面我們要来研究連續函数．連續函数的图象是一条連續的曲綫，它直观地描述了它所刻划的变化規律．

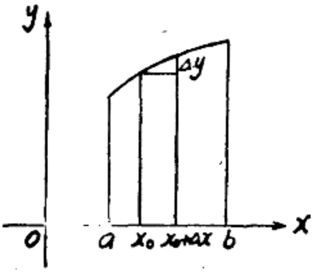

图 3

給出一个函数 $y=f(x)$，假定它在$[a, b]$上是連續的，則按照前面的說法，$f(x)$的图象应当是一条連續曲綫(图 3)．当 x 改变

很小时，y 也就改变很小.

x 的改变量是 $\Delta x=x-x_0$，函数 y 的改变量是 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$. 那么就有 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$，即 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0$，因此，$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.

根据以上分析，我們可以用极限来描述函数的連續性.

定义 2. 函数 $f(x)$ 在 x_0 点的邻近有定义，并且 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$（或 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$）就称函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 点連續. 如果 $f(x)$ 在区間 $[a,b]$ 上每一点都連續，就称 $f(x)$ 在区間 $[a,b]$ 上連續.

从連續的定义可以看出，如果函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 点連續，則 $f(x)$ 在这点的极限值就等于 $f(a)$. 由簡单初等函数的图形，我們可以知道簡单初等函数在它們的定义域上都是連續的. 因此，如果在它們的定义域上考虑，那末簡单初等函数在某一点的极限就等于它在这一点的值.

例 1. 求 $\lim\limits_{x\to 2}(x^3-2)$

因为 x^3-2 是簡单初等函数，所以要求 $\lim\limits_{x\to 2}(x^3-2)$，只要求出 x^3-2 在 $x=2$ 点的函数值.

$$\therefore \lim_{x\to 2}(x^3-2)=2^3-2=6.$$

例 2. 求 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\sin x$

因为 $\sin x$ 是簡单初等函数，所以要求 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\sin x$，只要求出

$\sin x$ 在 $x=\frac{\pi}{3}$ 点的函数値.

$$\therefore\qquad \lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\sin x=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

另一方面,在自然現象中,也有些量的变化不是連續的. 例如有一个运动着的物体，运动的速度是时間的函数. 如果受到一个外力的冲击，速度就会突然地变化. 这时速度就是一个关于时間的不連續函数.

§3 函数極限的运算

从上一节我們已經知道簡单的初等函数都是連續的，所以它們在某一点的极限等于它們在这点的函数値. 但怎样計算一般函数的极限，我們还沒有学过. 下面介紹几个关于极限运算的定理,可以由它們得到計算极限的方法.

定理 1. 若 $\lim\limits_{\substack{x\to a\\(x\to\infty)}} f(x)=A$

則
$$\lim_{\substack{x\to a\\(x\to\infty)}} Kf(x)=K\lim_{\substack{x\to a\\(x\to\infty)}} f(x)=KA.\quad(K\text{ 是常数})$$

也就是說，在自变量 x 趋向于 a (或趋向于无穷大)的过程中,如果函数 $f(x)$ 以 A 为极限，那末函数 $Kf(x)$ 的极限就等于 KA.

定理 2. 若 $\lim\limits_{\substack{x\to a\\(x\to\infty)}} f(x)=A,\ \lim\limits_{\substack{x\to a\\(x\to\infty)}} g(x)=B$

則
$$\lim_{\substack{x\to a\\(x\to\infty)}}[f(x)\pm g(x)]=\lim_{\substack{x\to a\\(x\to\infty)}} f(x)\pm\lim_{\substack{x\to a\\(x\to\infty)}} g(x)=A\pm B.$$

也就是說，在变化过程中，两个函数如果有极限存在，那

末它們的和(或差)的极限也存在并且等于两个函数的极限的和(或差).

例如,我們已經知道 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}} \sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 和 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}} \sqrt{x}=\sqrt{\frac{\pi}{3}}$,

根据这个定理就得到

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} (\sin x+\sqrt{x})=\frac{\sqrt{3}}{2}+\sqrt{\frac{\pi}{3}}.$$

这个定理还可以推广到更一般的情形.

推論. 若 $\lim\limits_{\substack{x\to a\\(x\to\infty)}} f_1(x)=A_1$, $\lim\limits_{\substack{x\to a\\(x\to\infty)}} f_2(x)=A_2$, $\cdots$

$$\cdots,\qquad \lim_{\substack{x\to a\\(x\to\infty)}} f_n(x)=A_n.$$

則 $$\lim_{\substack{x\to a\\(x\to\infty)}} [f_1(x)\pm f_2(x)\pm\cdots\pm f_n(x)]=A_1\pm A_2\pm\cdots\pm A_n.$$

定理 3. 若 $\lim\limits_{\substack{x\to a\\(x\to\infty)}} f(x)=A$, $\lim\limits_{\substack{x\to a\\(x\to\infty)}} g(x)=B$,

則 $$\lim_{\substack{x\to a\\(x\to\infty)}} [f(x)\cdot g(x)]=\lim_{\substack{x\to a\\(x\to\infty)}} f(x)\cdot\lim_{\substack{x\to a\\(x\to\infty)}} g(x)=A\cdot B.$$

这就是說,两个函数乘积的极限等于两个函数的极限的乘积.

推論 1. 若 $\lim\limits_{\substack{x\to a\\(x\to\infty)}} f_1(x)=A_1$, $\lim\limits_{\substack{x\to a\\(x\to\infty)}} f_2(x)=A_2$, $\cdots$

$$\cdots,\qquad \lim_{\substack{x\to a\\(x\to\infty)}} f_n(x)=A_n.$$

则
$$\lim_{\substack{x\to a\\(x\to\infty)}}[f_1(x)\cdot f_2(x)\cdots\cdot f_n(x)]=A_1\cdot A_2\cdots\cdot A_n.$$

推論 2. 若 $\lim\limits_{\substack{x\to a\\(x\to\infty)}}f(x)=A$

则
$$\lim_{\substack{x\to a\\(x\to\infty)}}[f(x)]^n=A^n.\ (n\text{ 是自然数})$$

定理 4. 若
$$\lim_{\substack{x\to a\\(x\to\infty)}}f(x)=A,\quad \lim_{\substack{x\to a\\(x\to\infty)}}g(x)=B\quad (B\neq 0)$$

则
$$\lim_{\substack{x\to a\\(x\to\infty)}}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A}{B}$$

这个定理告訴我們,两函数的商的极限,等于这两函数的极限的商. 在这里特别要注意的是只有当 $g(x)$ 的极限 B 不等于零时才可以用这个定理,否則,零除一个数是沒有意义的.

現在我們举几个例子說明这些定理的应用:

例 1. 求 $\lim\limits_{x\to 4}(x^3+\sqrt{x})$

解: 据定理 2 得 $\lim\limits_{x\to 4}(x^3+\sqrt{x})=\lim\limits_{x\to 4}x^3+\lim\limits_{x\to 4}\sqrt{x}$
$$=64+2=66.$$

例 2. 求 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$

解: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x+1)(x-1)}{(2x+1)(x-1)}$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{x+1}{2x+1}=\frac{\lim\limits_{x\to 1}(x+1)}{\lim\limits_{x\to 1}(2x+1)}=\frac{2}{3}.$$

我們在第一步不立即用定理 4 是因为分母的极限等于零．但消去一个因式 $x-1$ 以后就可以了．

例 3．求 $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x-4}{\sqrt{x}-2}$

解：求这个极限时也暂不用定理 4，而先把分母有理化，然后再用定理 4 計算．

$$\lim_{x\to 4}\frac{x-4}{\sqrt{x}-2}=\lim_{x\to 4}\frac{(\sqrt{x}+2)(x-4)}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)}$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{(\sqrt{x}+2)(x-4)}{x-4}=\lim_{x\to 4}(\sqrt{x}+2)=4.$$

例 4．求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{1}{x^4}\right)$

解：因无穷大的倒数是无穷小，所以每一項的极限都等于 0，据定理 2 的推論即得

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^4}\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}+\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}+\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^3}+\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^4}$$

$$=0.$$

例 5．求 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\sin x}{\cos^2 x}$

解：由于分母的极限是零，所以暂不用定理 4．但因

$$\frac{1-\sin x}{\cos^2 x}=\frac{1-\sin x}{1-\sin^2 x}=\frac{1-\sin x}{(1+\sin x)(1-\sin x)}=\frac{1}{1+\sin x},$$

故 $$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{\cos^2 x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\sin x}=\frac{1}{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+\sin x)}=\frac{1}{2}.$$

例 6. 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+x+1}{x^2+2x+3}$

解：当 x 趋于无穷大时，分子、分母都沒有极限。但可先用 x^2 除分子、分母，就能用定理 4 来計算。

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x+1}{x^2+2x+3}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}{1+\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{x^2}}$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{x^2}\right)}=\frac{1}{1}=1.$$

下面再来介紹一个常用的定理。

定理 5. 若在 $[a,b]$ 上的函数 $f(x)$、$g(x)$ 和 $h(x)$ 满足

$$f(x)\leqslant h(x)\leqslant g(x)$$

且有

$$\lim_{\substack{x\to a\\(x\to\infty)}} f(x)=A,\quad \lim_{\substack{x\to a\\(x\to\infty)}} g(x)=A$$

则

$$\lim_{\substack{x\to a\\(x\to\infty)}} h(x)=A.$$

这是因为当 $x\to a$（或 $x\to\infty$）时，$f(x)\to A$, $g(x)\to A$, 而 $h(x)$ 在 $f(x)$ 与 $g(x)$ 之間，自然就有 $h(x)\to A$.

往往有些函数不容易直接求出它的极限，但是利用定理 5 能够很方便地求出来。下面求

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$$

时就是这样解决的。

作一个半徑为 1 的圓（图 4）。$\triangle OAC$ 的面积为 $\frac{1}{2}\sin x\cos x$,

扇形 BOC 的面积为$\frac{1}{2}x$(这里角 x 是以弧度为单位来度量的),

$\triangle BOD$ 的面积为 $\frac{1}{2}\operatorname{tg} x=\frac{\sin x}{2\cos x}$.

从图中可以看出下面不等式成立:

$$\frac{1}{2}\sin x\cos x<\frac{1}{2}x<\frac{\sin x}{2\cos x},$$

两边同除以$\frac{1}{2}\sin x$ 后再取倒数得:

$$\frac{1}{\cos x}>\frac{\sin x}{x}>\cos x.$$

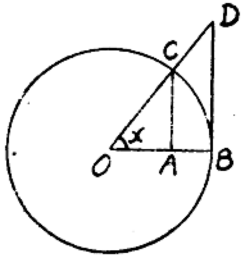

图 4

这个不等式对于 $x<0$ 时显然也成立.

又因为

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{\cos x}=1,\ \lim_{x\to0}\cos x=1,$$

所以

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

下面我們利用这个极限来計算另一些函数的极限.

例 1. 求 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin^2 x}{x^2(1+\cos x)}$.

解: $$\lim_{x\to0}\frac{\sin^2 x}{x^2(1+\cos x)}=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\cdot\lim_{x\to0}\frac{1}{1+\cos x}$$

$$=1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$

例 2. 求 $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x}$

解: $$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1-\cos x}{2}}{\frac{x}{2}}$$