

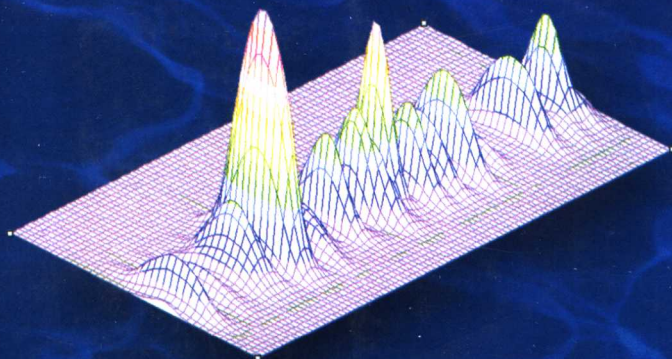
ANALYSES OF RANDOM OCEANOGRAPHIC DATA

海洋随机资料分析

方欣华 (FANG Xinhua)

吴 巍 (WU Wei)

编 著



青岛海洋大学出版社

QINGDAO OCEAN UNIVERSITY PRESS

ANALYSES OF RANDOM OCEANOGRAPHIC DATA

海洋随机资料分析

方欣华(FANG Xinhua) 编著
吴 巍(WU Wei)

青岛海洋大学出版社
QINGDAO OCEAN UNIVERSITY PRESS
青 岛 • QINGDAO

图书在版编目(CIP)数据

海洋随机资料分析 / 方欣华, 吴巍编著. —青岛: 青岛海洋大学出版社, 2002. 6

ISBN 7-81067-347-5

I. 海... II. ①方... ②吴... III. 海洋资料—随机分析
IV. P717

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 039122 号

青岛海洋大学出版社出版发行
(青岛市鱼山路 5 号 邮政编码: 266003)

出版人: 李学伦

日照日报社印刷厂印刷

新华书店经销

*

开本: 787 mm × 960 mm 1/16 印张: 13.5 字数: 235 千字

2002 年 6 月第 1 版 2002 年 6 月第 1 次印刷

印数: 1~1000 定价: 20.00 元

内 容 简 介

本书对海洋随机资料的处理分析方法作了系统阐述。

全书共分十章，系统地阐述了在海洋随机资料分析中广泛应用的理论和方法以及所依据的基本假设、所得结果的可信程度、在实际海洋资料分析中应注意的事项等。第一章至第四章简介了随机过程基础知识，主要是海洋资料分析中广泛应用的平稳随机过程理论。第五章介绍了海洋随机资料的初步检验和预处理。第六章为海洋资料分析中的基础性内容，即均值和相关函数估计以及傅氏变换。由于谱分析是随机资料分析的最重要手段，所以此后的内容都是关于谱分析的。第七、八章为以傅氏变换为基础的平稳随机过程自谱和交谱的估计及其平滑、估计结果的统计特性。第九章为基于自回归过程假设，可用于短序列资料的最大熵谱估计方法；以小波分析理论为基础，揭示谱的时变性的小波谱。第十章为谱的区间估计以及海流矢量旋转谱的估计及其统计特性。

本书可作为海洋科学类专业和相近或相关专业的本科生和研究生教材或参考教材，也可作为从事海洋或非海洋随机资料分析工作的科技人员的参考用书。

序

人们对海洋的认识源于在海洋中的实践活动,尤其是有意识的观测。长期积累的观测资料是海洋科学形成与发展的基础。在早期,人们将海洋现象作为确定性问题来处理。随着高分辨高精度仪器的使用以及随机资料分析方法的引入,揭示出海洋现象的随机特性,改变了这种传统的“确定性”观念与研究方法。海洋随机资料的获取与分析研究发现了大量的新现象,提出并确立了许多新理论,使海洋科学上升到一个新的高度。

要正确揭示海洋随机现象的统计特性,必须正确应用概率论、数理统计和随机过程理论与方法,将海洋现象抽象成适当的统计模型,提取反映现象本质的基本统计特性。掌握海洋随机资料分析所依据的理论和所采用的方法并将它们用于解决海洋实际问题是海洋科学工作者应具有的能力。因此,多年前我建议将海洋随机资料分析作为青岛海洋大学物理海洋专业研究生的学位课程,并敦促及早出版相应教材。现在这些都已成为现实,本人深感欣慰。

《海洋随机资料分析》一书的作者成功地将多种随机资料分析方法用于海洋随机内波和细结构统计特性以及CTD资料预处理与分析方法等方面的研究工作,获得了丰硕的成果。在从事研究工作的同时,作者承担着研究生和本科生的有关海洋随机资料分析的教学工作。可以说,此书是作者长期的科研与教学成果的积累。书中既有在理论上研究较深入、在实际中应用很广泛的内容,也有新近才发展的新内容;既有在较普遍领域中应用的方法,也有在海洋和大气科学中特有的分析方法;既有他人的研究成果,也有作者自己的研究成果。尤其是,此书舍弃了严密的数学系统和繁复的数学论证,内容适合教学要求和海洋科技工作者的需要。因此,此书的出版必然使读者获益匪浅。

文圣常

2001年11月15日

前 言

海洋科学的发展是以海洋资料为基础的,各种理论模型的正确与否最终都必须由实际资料来检验。因此,海洋资料的获取和处理分析对于海洋科学工作者来说是至关重要的。快速密集取样的海洋调查仪器的使用给人们提供了大量海水物理量(如海面高度和斜率、温度、电导率、流速、流向等)的时间(或空间)序列,这些序列显示出这些物理量具有随机性。因而数理统计和随机过程理论及相应的方法,尤其是各种谱分析方法就成了物理海洋学研究不可缺少的手段。鉴于这一观念,青岛海洋大学在海洋科学专业(原物理海洋专业)本科生和物理海洋学专业研究生教学中都特别重视这一教学训练环节,1974年就开设了“谱分析及其应用”大学课程,1985年又为研究生开设了“随机过程和海洋随机资料分析”,随后将它定为学位课程。作者在长期的科学研究工作中,深入学习并广泛采用了上述分析研究方法。在长期授课过程中撰写并不断修订教材,最后形成了本书内容。书中的一些内容,如快速傅氏变换-周期图分析方法、最大熵谱分析方法以及小波谱分析方法等,刚一问世就被青岛海洋大学师生(包括作者在内)用于科研工作和作为教材内容。所以,本书虽是一部基础性教材,但不失其先进性。

本书用于物理海洋学及相关专业的教学,以培养学生的海洋随机资料分析能力为宗旨,因此无意深入系统地阐述数理统计和随机过程理论,而着眼于介绍在海洋随机资料分析中广泛应用的理论和方法以及所依据的基本假设、所得结果的可信程度、在实际海洋资料分析中应注意的事项等。所选实例绝大多数取自实测海洋资料或实验室实验资料。另一方面,它仅讲授海洋随机资料分析的一般方法,而不涉及各个研究方向的专门性问题。

本书的前四章简介了随机过程基础知识,主要是海洋资料分析中广泛应用的平稳随机过程理论。第五章介绍了海洋随机资料的初步检验和预处理。第六章为海洋资料分析中的基础性内容,即均值和相关函数估计以及傅氏变换。由于谱分析是随机资料分析的最重要手段,所以此后的内容都是关于谱分析的。第七、八章为以傅氏变换为基础的平稳过程自谱和交谱的估计及其平滑、估计结果的统计特性。第九章为基于自回归过程假设,可用于短序列资料的最大熵谱估计方法;以小波分析理论为基础,揭示谱的时变

性的小波谱。第十章为谱的区间估计以及海流矢量旋转谱的估计及其统计特性。为了读者使用方便,书后附有一些常用统计表。为了减少篇幅,书后所列参考文献仅是作者所用文献中的一小部分。它们是作者认为最主要的参考文献。书中所用图表,凡是引用他人材料的,一律注明了出处;其他未注明出处的皆系本书首次采用。

本书的成书过程也是作者进行多项国家自然科学基金项目、高等学校博士学科点专项科研基金项目以及“七五”、“八五”、“九五”国家重点科技专项的研究过程。借此机会,感谢有关部门以及曾给予我们无私支持与帮助的国内外同行与友人。

在本书成稿并出版的过程中,始终得到海洋环境学院(及原海洋系)历届领导及老师们的鼓励和支持,特别是中科院院士文圣常教授百忙之中为本书作序。在此谨表谢意。

由于作者仅是物理海洋科学工作者而非数理统计和随机过程专业人员,因而书中的论述必然会有专业局限性;更由于水平所限,难免存在错误与不足,敬请专家与读者指正。

本书可作为海洋科学专业本科生、物理海洋学专业研究生及相关专业学生的教材,也可作为物理海洋学及相关科学工作者的参考用书。作为研究生教材时,应系统地讲授全书内容,并留出充分的课堂教学时间讨论学生的作业。作为本科生教材时,若受学时数限制,可将讲授重点放在第五章至第八章,其余内容视课时多少作合理取舍,作业量亦应适当减少。本书仅给出第五章至第十章的习题,因前四章是随机过程基础理论,很易从其他书中找到习题。

方欣华

2001年11月16日

目 录

第一章 随机过程的一般概念	(1)
§ 1.1 概述	(1)
§ 1.2 概率密度函数	(3)
§ 1.3 单一实随机过程的各阶矩	(5)
§ 1.4 复随机过程的矩及两个过程的交叉矩	(7)
§ 1.5 平稳随机过程	(9)
§ 1.6 随机过程的变换(I).....	(11)
§ 1.7 随机过程的变换(II).....	(14)
§ 1.8 随机过程的连续性.....	(16)
§ 1.9 随机过程的微商.....	(18)
§ 1.10 随机微分方程	(21)
§ 1.11 随机积分和时间平均	(23)
§ 1.12 各态历经性	(26)
第二章 广义平稳随机过程的相关和频率谱	(29)
§ 2.1 自相关和自协方差.....	(29)
§ 2.2 交相关和交协方差.....	(32)
§ 2.3 自谱密度函数.....	(34)
§ 2.4 交谱.....	(38)
§ 2.5 线性系统.....	(42)
§ 2.6 希尔伯特变换.....	(47)
§ 2.7 均方意义下的周期性及傅氏级数.....	(50)
§ 2.8 有限频带过程.....	(53)
第三章 非平稳随机过程	(58)
§ 3.1 具有随机输入的线性系统的瞬态.....	(58)
§ 3.2 二维傅氏变换的定义和基本性质	(60)
§ 3.3 二维傅氏变换的其他性质	(63)

§ 3.4 时间平均运算	(66)
第四章 正态过程	(70)
§ 4.1 定义及基本性质	(70)
§ 4.2 整流	(72)
§ 4.3 跨零问题	(75)
第五章 海洋随机资料的预处理及初步检验	(79)
§ 5.1 海洋资料的统计学分类	(79)
§ 5.2 资料的数字化和初步检查	(81)
§ 5.3 正态性检验	(86)
§ 5.4 过程的广义平稳性、各态历经性及现实倾向性的检验 ...	(90)
§ 5.5 隐含周期分量的探测和显著周期检验	(92)
§ 5.6 去倾	(95)
第六章 均值和相关函数估计以及离散傅氏变换	(100)
§ 6.1 均值、自相关和交相关的估计	(100)
§ 6.2 均值、自相关、交相关估计的统计特性	(102)
§ 6.3 离散傅氏变换	(107)
§ 6.4 快速傅氏变换	(110)
第七章 实随机过程的粗谱估计	(116)
§ 7.1 确定性函数的能量谱和功率谱估计	(116)
§ 7.2 随机过程自谱的粗估计	(123)
§ 7.3 随机过程的交谱粗估计	(128)
§ 7.4 粗谱估计的统计特性	(131)
第八章 谱的平滑及区间估计	(136)
§ 8.1 粗谱的平滑及平滑谱的统计特性	(136)
§ 8.2 资料窗	(141)
§ 8.3 延时窗和谐窗	(145)
§ 8.4 平滑谱的置信区间估计	(150)
§ 8.5 平滑谱估计的一些实际作法	(156)
第九章 最大熵谱和小波谱	(159)
§ 9.1 自回归过程	(159)
§ 9.2 谱熵和最大熵谱	(162)
§ 9.3 小波变换	(166)
§ 9.4 局域小波能谱	(170)
§ 9.5 局域小波能谱的应用及其与傅氏频谱的比较	(172)

第十章 矢量旋转谱.....	(177)
§ 10.1 矢量的旋转分量.....	(177)
§ 10.2 旋转谱表达式.....	(179)
练习题.....	(183)
附录 统计表.....	(186)
主要参考文献.....	(198)

CONTENTS

CHAPTER 1 GENERAL CONCEPTS OF STOCHASTIC PROCESSES	(1)
§ 1.1 Introductory Remarks	(1)
§ 1.2 Probability Density Functions	(3)
§ 1.3 Moments of One Real Process	(5)
§ 1.4 Moments of One Complex Process and Cross Moments of Two Complex Processes	(7)
§ 1.5 Stationary Stochastic Processes	(9)
§ 1.6 Transformations of Stochastic Processes (I)	(11)
§ 1.7 Transformations of Stochastic Processes (II)	(14)
§ 1.8 Stochastic Continuity	(16)
§ 1.9 Stochastic Differentiation	(18)
§ 1.10 Stochastic Differential Equations	(21)
§ 1.11 Stochastic Integrals and Time Averages	(23)
§ 1.12 Ergodicity of Stochastic Processes	(26)
CHAPTER 2 CORRELATIONS AND FREQUENCY SPECTRA OF WEAKLY STATIONARY PROCESSES	(29)
§ 2.1 Autocorrelation Functions and Autocovariance Functions	(29)
§ 2.2 Cross Correlation Functions and Cross Covariance Functions	(32)
§ 2.3 Power Spectral Density Functions	(34)
§ 2.4 Cross Spectra	(38)
§ 2.5 Linear Systems	(42)
§ 2.6 Hilbert Transforms	(47)
§ 2.7 Mean-Square Periodicity and Fourier Series	(50)
§ 2.8 Band-Limited Processes	(53)
CHAPTER 3 NONSTATIONARY PROCESSES	(58)
§ 3.1 Transients in Linear Systems with Random Inputs	(58)
§ 3.2 Definitions and Basic Properties of Two Dimensional Fourier Transforms	(60)

§ 3.3 Other Properties of Two Dimensional Fourier Transforms	(63)
§ 3.4 Time Averages	(66)
CHAPTER 4 GAUSSIAN STOCHASTIC PROCESSES	(70)
§ 4.1 Definitions and Basic Properties	(70)
§ 4.2 Detection	(72)
§ 4.3 The Zero-crossing Problem	(75)
CHAPTER 5 PRE-PROCEDURES AND TESTS OF RANDOM OCEANOGRAPHIC DATA	(79)
§ 5.1 Statistic Classifications of Oceanographic Data	(79)
§ 5.2 Digitizing and Pre-Procedures	(81)
§ 5.3 Test for Normality	(86)
§ 5.4 Tests for Weakly Stationary, Ergodicity and Trends ...	(90)
§ 5.5 Detection for Implied Periodicities and Test for Significant Periodic Components	(92)
§ 5.6 Trend Removal	(95)
CHAPTER 6 ESTIMATES OF MEAN VALUES AND CORRELATION FUNCTIONS, AND DISCRETE FOURIER TRANSFORMS	(100)
§ 6.1 Estimates of Mean Values, Autocorrelation Functions and Cross Correlation Functions	(100)
§ 6.2 Statistic Characteristics of Estimates of Mean Values, Autocorrelation Functions and Cross Correlation Functions	(102)
§ 6.3 Discrete Fourier Transforms	(107)
§ 6.4 Fast Fourier Transforms	(110)
CHAPTER 7 SAMPLE SPECTRAL ESTIMATES OF REAL STOCHASTIC PROCESSES	(116)
§ 7.1 Power Spectral Estimates of Deterministic Functions	(116)
§ 7.2 Sample Power Spectral Estimates of Stochastic Processes	(123)
§ 7.3 Sample Cross Spectral Estimates of Stochastic Processes	(128)

§ 7. 4 Statistic Characteristics of Sample Spectral Estimates	(131)
CHAPTER 8 SMOOTHING OF SPECTRAL ESTIMATES AND ESTIMATES OF CONFIDENCE INTERVALS	(136)
§ 8. 1 Smoothing of Spectral Estimates and Statistic Characteristics of Smoothed Spectral Estimates	(136)
§ 8. 2 Data Windows	(141)
§ 8. 3 Lag Windows and Spectral Windows	(145)
§ 8. 4 Estimates of Confidence Intervals for Smoothed Spectral Estimates	(150)
§ 8. 5 Some Useful Methods for Getting Smoothed Spectral Estimates	(156)
CHAPTER 9 THE MAXIMUM ENTROPY SPECTRA AND WAVELET SPECTRA	(159)
§ 9. 1 Autoregressive Processes	(159)
§ 9. 2 Spectral Entropy and the Maximum Entropy Spectra	(162)
§ 9. 3 Wavelet Transforms	(166)
§ 9. 4 Local Wavelet Energy Spectra	(170)
§ 9. 5 Applications of Wavelet Spectra and Their Comparisons with Fourier Frequency Spectra	(172)
CHAPTER 10 ROTARY SPECTRA OF VECTORS	(177)
§ 10. 1 Rotary Components of Vectors	(177)
§ 10. 2 Rotary Spectra of Vectors	(179)
EXERCISES	(183)
APPENDIX STATISTIC TABLES	(186)
MAIN REFERENCES	(198)

第一章 随机过程的一般概念

§ 1.1 概述

目前采用的海上观测仪器和实验室内的波浪记录仪等能进行快速取样。它们的记录大多是等时间间隔取样的数字记录。由于取样时间间隔比所研究问题的时间尺度短得多,因此在处理时也常将这些离散数据序列看成一连续曲线。例如,测波仪每次观测记录下的一系列波面随时间变化的序列或曲线,称为波面坐标序列或曲线。海流计能同步记录下流速量值序列和流向序列,它们可换算成流速东分量和北分量,并以东分量为实部、北分量为虚部构成一列用来表示矢量序列的复数序列。无论是实数(标量)序列还是复数(矢量)序列都可表示成时间的函数 $x(t)$ 。

有实践经验的人都知道,尽管从通常意义上说观测或实验条件没有什么变化,但每次观测(或实验)所得序列或曲线都不会重合。若将每次观测用一数字 ζ 来表示(例如 ζ 可以取成观测或实验的序号),于是每次观测可表示成 $x(\zeta, t)$ 。所以,每次观测或实验记录下的结果和以后观测或实验将要记录下的结果合在一起便构成一以时间 t 为变量的函数族,记为 $\mathbf{x}(\zeta, t)$ 。对确定的时间 t ,某次观测(即确定的 ζ)所得观测值为一确定量。对同一观测时间 t 不同次的观测(ζ 为变量)得到不同的观测值,可以记为 $\mathbf{x}(\zeta)$ 。 $\mathbf{x}(\zeta)$ 在观测前是无法确切知道的。图 1.1.1 所示为实验室风浪实验波面坐标记录曲线。

根据随机过程理论,上述函数族 $\mathbf{x}(\zeta, t)$ 可抽象成一随机过程。一确定的即某一次观测结果,称为这一随机过程的一次现实或一个样本函数 $x(\zeta, t)$ 。某一时刻各次观测所得值的集合称为一个随机变量,所有 ζ 的集合 S 称为样本空间。下面更严格地引入一些随机过程理论中常用的术语。

随机过程 设有以 S 为样本空间的试验 ζ , 每一试验结果 ζ_i 产生一个随时间变化的实或复的函数值 $x(t, \zeta_i)$, 对所有的试验形成一函数族 $\mathbf{x}(t, \zeta)$, 称此函数族为随机过程。它是两个变量 t 和 ζ 的函数。 ζ 落在样本空间 S 中, 而 t 在实数集合中取值。遵循习惯用法, 用粗体字母 $\mathbf{x}(t, \zeta), \mathbf{y}(t, \zeta)$ 等表

示随机过程。为书写简便,也常省略 ζ ,而写成 $x(t)$, $y(t)$ 等,这时仍应将它们理解为是 ζ 与 t 的函数。

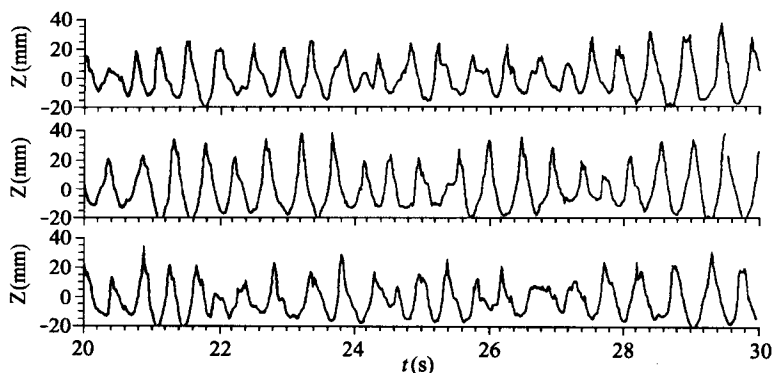


图 1.1.1 实验室风浪实验波面坐标记录曲线(青岛海洋大学物理海洋实验室提供)

随机函数 变量 t 既可代表时间坐标,也可代表某一空间坐标。当 t 为一空间坐标(如沿铅直方向或水平方向)时,随机过程也称为随机函数。

现实(样本函数) 对于作为随机过程的一系列试验中之某一次试验, ζ 是确定的,因而 $x(t, \zeta)$ 就仅是 t 的函数,它称为随机过程 $x(t, \zeta)$ 的一次现实或一个样本函数(或样本曲线),记为 $x(t, \zeta)$ 。通常样本函数是极其复杂的,很难用数学式子表示出来,即使知道了 $t < t_1$ 时的 $x(t)$,也很难确切地预报出 $t > t_1$ 时的 $x(t)$ 。例如,风浪观测记录中的波面坐标曲线。然而,有时样本曲线也可能是相当简单的,例如若在波浪槽中做一系列规则波实验,其频率及初始相位在这一系列的实验中保持不变,只有波高在每次实验开始时随机地设定,在实验过程中不再变更,于是此过程可用简单的数字式子描述为

$$x(t, \zeta) = a(\zeta) \sin(\omega t + \theta) \quad (1.1.1)$$

因而对每一次实验(ζ 确定),此随机过程之现实就成了一条简单的正弦曲线。

时间序列 如前所述,观测记录通常是一等时间间隔取样的数列或在作资料处理时由记录曲线离散化成这样的数列,在数学上称之为时间序列。泛泛地说,时间序列可以是确定性的,也可以是随机的。然而,在资料分析中所指的一般是随机序列。所以,随机过程的现实(样本函数)通常都表示成时间序列的形式。与前面所述相同,记录也可能是在空间某一方向上的等距离间隔采样获得而构成的一空间序列。在数学上,空间序列的处理方法与时间序列是一样的。

截口 当 t 确定时, $\mathbf{x}(t, \zeta)$ 就仅是 ζ 的函数, 即它退化为随机变量, 此随机变量 $\mathbf{x}(\zeta)$ 称为随机过程 $\mathbf{x}(t, \zeta)$ 的一个截口或一个状态。

总体 所有试验结果的集合 S 称随机过程的总体。

随机过程的相等 若随机过程 $\mathbf{x}(t, \zeta)$ 和 $\mathbf{y}(t, \zeta)$, 对任意 ζ_i 存在

$$\mathbf{x}(t, \zeta_i) = \mathbf{y}(t, \zeta_i)$$

则称这两个随机过程相等, 记成 $\mathbf{x}(t) = \mathbf{y}(t)$ 。

随机过程的函数

$$\mathbf{u}(t) = f[\mathbf{x}(t)] \quad (1.1.2)$$

仍为一随机过程。例如, 在海洋调查中用 CTD 剖面仪获得一系列温深剖面 $T(z, \zeta)$, 是一随机过程(或随机函数), 它在 z 方向的导数 $\frac{\partial T}{\partial z}$ 称为垂向温度梯度, 自然是 T 的函数, 也是随机过程(或随机函数)。

复随机过程 若实随机过程 $\mathbf{x}(t)$ 和 $\mathbf{y}(t)$ 分别作实部与虚部构成另一随机过程 $\mathbf{z}(t)$

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{x}(t) + i\mathbf{y}(t) \quad (1.1.3)$$

则 $\mathbf{z}(t)$ 为一复随机过程。例如, 用海流计记录下一列流速和一系列流向序列, 多次观测得一族流速序列 $\mathbf{w}(t)$ 和一族流向序列 $\theta(t)$, 它们都可视为随机过程。由这两个随机过程换算出的流速东分量 $\mathbf{u}(t)$ 和北分量 $\mathbf{v}(t)$ 亦是随机过程, 而且是实过程。由东分量 $\mathbf{u}(t)$ 作实部、北分量 $\mathbf{v}(t)$ 作虚部构成一表示矢量过程的复过程

$$\mathbf{u}(t) + i\mathbf{v}(t) \quad (1.1.4)$$

这在海洋资料处理中是常用的。

多维过程 上述 $\mathbf{x}(t)$ 和 $\mathbf{y}(t)$ 为一维过程, 它们在一起构成一个二维过程, 因而复过程 $\mathbf{z}(t)$ 在这一意义上说是一个二维过程。若将多次观测所得的温度、盐度、密度、流速、流向等一维过程结合在一起则构成一多维随机过程。

§ 1.2 概率密度函数

一阶分布函数 讨论一实随机过程 $\mathbf{x}(t, \zeta)$ 。如前所述, 对于任一确定的时间 t , $\mathbf{x}(t, \zeta) = \mathbf{x}(\zeta)$ 为一随机变量, 因而它有概率分布函数

$$F(x) = P\{\mathbf{x} \leq x\} \quad (1.2.1)$$

以及概率密度函数 $f(x)$ 。当 $F(x)$ 为连续函数时, $f(x)$ 可表示成

$$f(x) = \frac{\partial}{\partial x} F(x) \quad (1.2.2)$$

推广到 t 为变量的情况,即随机过程 $\mathbf{x}(t, \zeta)$ 之情况,它也有概率分布函数 $F(x, t)$ 和概率密度函数 $f(x, t)$ 。一般情况下,它们不但是 x 的函数,也是 t 的函数,即

$$F(x, t) = P\{\mathbf{x}(t) \leq x\} \quad (1.2.3)$$

当 $F(x, t)$ 为 x 的连续函数时,

$$f(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} F(x, t) \quad (1.2.4)$$

与 $F(x)$, $f(x)$ 一样, $F(x, t)$, $f(x, t)$ 不是随机函数而是确定性函数,是随机过程 $\mathbf{x}(t)$ 的统计量。图 1.2.1 为概率密度函数曲线的实例。

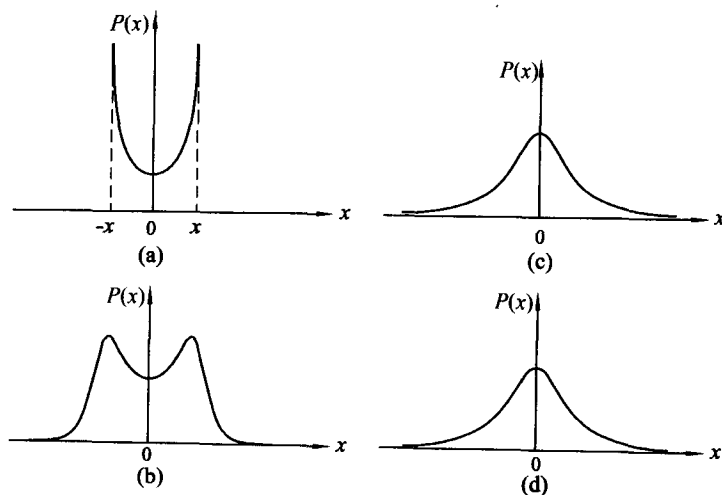


图 1.2.1 概率密度函数举例(引自[26])

(a) 正弦波 (b) 正弦波加噪声 (c) 窄带噪声 (d) 宽带噪声

在实际工作中常用出现频数分布来近似概率分布。在大样本时,这种作法具有较高的精度。假设进行了 n 次观测,每次观测获得一样本曲线 $\mathbf{x}(t, \zeta_i)$ ($i=1, 2, \dots, n$)。若以 $n_i(x)$ 表示在 t 时刻 n 次观测值中纵坐标 x 不超过某一值 x 的次数,当 n 足够大时,可以将 $F(x, t)$ 近似地表示成

$$F(x, t) = \frac{1}{n} n_i(x) \quad (1.2.5)$$

二阶分布函数 给定时刻 t_1 和 t_2 , 随机过程分别有截口 $\mathbf{x}(t_1)$ 和 $\mathbf{x}(t_2)$, 它们的联合分布称为此随机过程的二阶分布函数, 记为 $F(x_1, x_2; t_1, t_2)$:

$$F(x_1, x_2; t_1, t_2) = P\{\mathbf{x}(t_1) \leq x_1, \mathbf{x}(t_2) \leq x_2\} \quad (1.2.6)$$