

66/2060
中国科学院水工研究室译丛第一种

明渠水流的挟沙能力

· H. A. 爱因斯坦 著

水利出版社

水利部
中国水利出版社

中国水利出版社
北京

中国水利出版社
北京

中国水利出版社
中国水利出版社

明渠水流的挟沙能力

中国水利出版社



中国水利出版社

中國科學院水工研究室譯叢第一種

美國農業部水土保持局技術專刊第 1026 種

明渠水流的挾沙能力

H. A. 愛因斯坦著

錢寧譯

水利出版社出版

1956年7月

內 容 簡 介

本書系根据大量試驗成果，并結合流体力学理論，而提出的关于河道中泥沙輸移率的計算方法。作者提出了床沙質函數的概念，試圖把懸移質和推移質的計算結合在一起。在本書中对泥沙輸移过程的物理特性作了詳尽的描述，同时并以实例說明在实际計算中如何决定明渠水流的輸沙能力。

明 渠 水 流 的 挟 沙 能 力

- 原 書 名 *The Bed-Load Function for Sediment Transportation in Open Channel Flows*
原 著 者 *Hans Albert Einstein*
原 出 版 处 *United States Department of Agriculture,
Soil Conservation Service, Washington, D.C.*
原出版年份 1950
譯 者 錢 寧
出版者 水利出版社（北京和平門內北新華街 35 号）
北京市書刊出版業營業許可証出字第 080 号
印刷者 五十年代印刷厂
發行者 新華書店

86 千字， 787×1092 1/25 开， 4 6/25 印張
1956 年 7 月第一版， 北京第二次印刷， 印数 2,001 -5,100
統一書号：15047.22 定价：(11) 1.20 元

目 錄

緒論.....	(1)
解決問題的方法.....	(3)
床沙質函數的限制.....	(4)
不定函數.....	(4)
冲積河流.....	(5)
泥沙混合物.....	(6)
冲積河道水力学.....	(8)
摩阻公式.....	(8)
摩阻因素.....	(9)
沙丘的阻力.....	(10)
床面滯流層.....	(12)
粗糙床面和光滑床面間的过渡区.....	(13)
流速的脉动.....	(14)
泥沙的懸移.....	(16)
懸移質輸沙率.....	(18)
懸移質的積分.....	(19)
懸移質的數積分.....	(20)
泥沙懸移的限制.....	(23)
床面層.....	(23)
懸移質輸沙的計算.....	(24)
計算实例.....	(25)
推移質概念.....	(28)
推移質輸沙定律中若干有关常數.....	(31)
推移質公式.....	(32)
交換時間.....	(33)
交換或然率.....	(34)
或然率 P 的決定.....	(35)
推移質和懸移質間的过渡区.....	(40)

需用的曲綫.....	(42)
泥沙混合物的水槽試驗.....	(44)
河段輸沙的計算实例.....	(46)
河段的選擇.....	(47)
河段情形的說明.....	(47)
密西西必州巨沙溪輸沙計算实例.....	(48)
輸沙計算的討論.....	(65)
方法的限制.....	(68)
總結.....	(70)
参考文献.....	(71)
附錄.....	(73)
I 断面各部分糙率不一致时的水力半徑計算法.....	(74)
II 冲瀉質的輸沙率可以从床沙質函數推算嗎?	(77)
III 所用符号詳目.....	(85)
IV 中英文譯名对照.....	(89)
V 計算时常用的曲綫.....	(90)

緒 論

在美國，流域的開發已成為最大企業之一。多目標的流域開發計劃可能涉及水能利用、灌溉、防洪、河水清潔控制、航運、城市和工業給水、公共娛樂、魚類和野生動物的繁育，以及流域土地的水土保持各方面。

幾乎每一種河流及流域的改善計劃都要對目前的河道狀態作不同程度的改變。洪水和低水流量的天然程序可能因水庫的興建、水流的分導、水土保持工作的展開等而改變。河流輸沙量可能因為泥沙在水庫中沉積、流域中防范沖刷的工作或河流兩岸的護岸工事而發生改變。河流的斷面形狀和坡度可能因為裁灣取直，以及丁壩的建築而改變。為了引水灌溉、辟道排水，以及開發新的航道，也可能開辟全新的人工水道。

在沖積河谷中，河床的組成主要為未曾固結的沙或礫石。流過這一類河谷的河川，可能大致上已達到平衡狀態。河流是隨着流量的大小和變化，以及粒徑相當於河床組成的上游泥沙來源而保持着一定的大小、形狀和坡度。如果因為某種人為的改變，使水流的特性、泥沙的來源，以及河道的形狀和坡度起了變化，河流本身自然也就要根據新的情況而起新的適應，刷深或填高其河床，加寬或縮窄其河道，增加或減少其坡度，以達到一種新的平衡。

明渠水力學中最大的難題之一就在如何決定河流的床沙輸沙率。床沙的輸移是徑流持久性、泥沙來源和河道特性的一个複雜的函數。如果

在本文繕稿中，水土保持局泥沙專家卡爾·必·勃朗先生曾對原稿作極有建設性的批評；加州理工學院研究生路德力·坎·克萊頓君則在作者指導之下協助文中一部分計算，作者謹在此對他們表示深摯的謝意。

我們可以找到一個方法來相當精確地確定在現存情況下床沙輸移的情形，那末在這些情況起了改變以後，床沙的輸移將如何改變也就可以決定。這樣一來，對於預測河道在新的情況下將如何改變，就提供了一個相當可靠的基礎。

對於未來河道改變的預測，在流域的規劃和開發上，以及流域工程的使用和養護上，都有極大的經濟重要性。舉一個例來說，如果在沖積河流上建造一座大壩，所有在正常情形下輸移下行的泥沙就要被水庫攔截。這時水庫放出的清水就要在壩下游的河床中引起沖刷，直至造成新的平衡為止。河床沖刷過甚，可能就要引起所費不貲的工程建築（諸如橋墩、分水結構、污水管出口和護岸工事）的傾圮。

如果我們可以預知壩下游河床沖刷的深度，我們就可以把水渦輪尾水管的出口放低，從而大大增加水電站的發電量。在另一方面，由於水庫對水流的調節作用，特別是對於洪水峯的減低，也可能使下游的水流，無法帶走從支流輸入的全部泥沙。在這樣的情形下，將使干流淤積抬高，減低其排洪能力，並對沿河的各种設施引起極不利的後果。

要是流域在經過處理以後，把洪峯流量和床沙來源作了不同程度的減少——譬如把前者減少百分之二十，把後者減少百分之七十——有時候可能在上游各支流中，甚至包括干流在內，引起一連串極有損害性的河道沖刷現象。在另一方面，如果河道目前正在淤積抬高，那末，減少了床沙來源，而對水流流量不作等比的減低，就可能會引起良好的後果。相反地，如果河道正在沖刷加深，就應該把洪峯流量減低，而對床沙來源少加控制。一般說來，除了在底石暴露區域內的河流以外，在其他的河流上，都存在著床沙輸移和河道穩定性的問題。這一類的問題，不但對於河工的設計和養護有極大的作用，甚至还根本決定了工程設施的可能性。

本文並不企圖對沖積河流上所有涉及泥沙的問題提出一定的解答，而只是希望提供一個相當一般性的工具，用來解決大量的泥沙問題。這一個工具就是床沙質函數。床沙質函數的方程式可以用來計算平衡河道中組成河床的各种大小不一的泥沙的輸移率。這一些平衡輸沙率是水流流量的函數。

要了解平衡輸沙率的重要性，我們只要這樣一想就明白了；要使河

道發展成現在的情形，這一些大小不一的泥沙的平衡輸沙率必需存在着一個相當長的時間。因此，對現存河道應用了床沙質函數，我們就可以估計床沙的來量。在另一方面，同樣的方法也可以用以決定河道形狀、泥沙來量和水流情形改變後所引起的相互有關的後果。

床沙的輸移率既然是流量的函數，那末，只有長時間的流量可以預測，才能預測平均年輸沙率。本文中將指出只要知道了流量的持久曲綫，大部分的泥沙問題，就不難圓滿解決。這一事實指出我們如何急切需要關於不同大小的河段、在不同的氣候以及流域情況下流量持久曲綫的知識。在今天，水文資料的缺乏都比任何一個旁的單獨的因素更為嚴重地妨礙了輸沙率的精確決定。

解決問題的方法

在河道的輸沙問題上，“床沙質函數”是一個很有用的名詞，它的定義是這樣的：床沙質函數可用以決定河道在不同水流情形下所能輸移的泥沙量，其對象限於組成床沙的各種大小不一的泥沙。

本文旨在提供一個方法，用以決定大部分河道（但並不包括所有類型的河道）的床沙質函數。這一方法是根據大量試驗的証據、現有的紊流理論和在現有理範疇以外所作的合理推論。一開始先對泥沙輸移過程的物理特性作一詳盡的描述，然後根據水槽試驗研究泥沙運動，從而決定不同輸沙公式中的若干通用不變的常數。最後並對河道床沙質函數的計算逐步說明，指出如何用以實際決定床沙的輸沙率。在它目前的情形看來，這個方法基本上是正確的。雖然在若干方面猶未完整，但已可用來解決許多性質不同的重要問題。在文中並特別指出了問題的未解決的方面。

現在對文中若干常用的名詞作一解釋：●

- 【譯者注】原文對推移質（*Bed-Load*）及床沙質（*Bed Material Load*）雖作了區別，但在行文中仍有混淆之處。例如床沙質函數（*Bed-Load Function*）按字又應譯作推移質函數，實際上却指床沙質的輸移率。遇有這種場合，譯者都按具體物理意義作了更正。

推移質——在床面層中运动的泥沙，或則滾動前進，或則滑動前進，有時候也跳躍前進。

懸移質——在床面層以外运动的泥沙，其重量为流体所支持。

床面層——緊靠着河床上的流層，其厚度相当于兩倍泥沙的粒徑，对于不同粒徑的床沙，其床面層的厚度也有不同。

床沙——組成移动河床的泥沙混合物。

冲瀉質——河流泥沙中粒徑小于組成河床床沙的部分。

床沙質——河流泥沙中粒徑同时存在于河床床沙的部分。

床沙質函数——在不同流量下河道中大小不一的床沙的輸移率。

推移質公式——推移質輸沙率、水流情形与床沙組成之間的一般关系。

床沙質函数的限制

不定函数

在許多情形下，函数常变为常数，甚或等于零。在数学上已經指出，在某种情形下函数可能不等于任何值，此时函数公式的解答便变成了虛值。但是，函数在相当廣泛的情形下都是不定的并不多見。不幸床沙質函数却正屬於这一类。

要了解这一种情形，我們可以拿打台球做例子。打台球的人打主球，希望打中靜止的紅球。在兩球相碰以后，紅球將朝那个方向移动？在数学上說來，这一个问题可以用下列的方式來說明：問題的自变量是主球滾动的角度 α ，和兩球間最初的距离 l 。角度 α 不能精确預測，而是包括了誤差的因素。每一次打球后 α 的真正值，可以看成由兩部分合成，第一部分是打球的人所立意打的角度 α_0 ，另一部分是完全根据偶然机会决定的極小的不准值 α' ，其大小和打球人的准确度有关，只有用統計的方法才能决定。兩球相击后紅球开始运动的角度 γ 是根据兩球相遇时的相切面的方向而决定的。如果球徑为 D ，而 α 和 γ 都从球心量起，并且假定兩球間沒有摩擦，那末，在打球的人希望兩球迎头碰上的情形

下， γ 和 α' 的关系如次：

$$\frac{\sin \gamma}{\sin \alpha'} = \frac{l}{D}$$

只要 l 的长度和球径 D 相当， γ 也就和 α' 相当，我們可以像預測 α 一样精确地預測 γ 。如果 l 大过 D ，則 $\sin \gamma$ 变成了一个相当大的值，这时在推测 γ 时，就很难有相当程度的准确性。在 l 超过一定極限值以后， $l\alpha/D$ 可能大过 1，这时打球的人便会完全打漏了紅球。在这种情形下，从当初的平均立意值 α 。來預測 γ 便变成了一件完全没有意义的事，因为角度 α 的可能誤差就超过了 α 本身的平均值。从此可以推論，一个不准值为 α' 的打球人，在兩球間的距离 l 不大时，固然可以相当准确地預測紅球的去向 γ ，而在 l 超过一定極限值以后，这种預測便完全变成不可能了。

这一个例子可以用來大致說明許多物理上的問題，它們在所含变值的一部分範圍內是有一定的解答的，而在另一个範圍內却变成完全不定的。在这兩者之間的过渡区通常是徐緩的，而不是截然分明的。河道的水流和輸沙之間的关系基本上正属于这一类的問題。在一定的水流中，决定函数是不是有意义的主要因素就是泥沙的粒徑。

冲積河流

讓我們先來看一个簡單的輸沙例子，假定在一个大小一致的混凝土敷面的水槽內，水流均匀地不变地流过。然后在水槽的進口加入泥沙。經驗告訴我們，对于小于一定粒徑的泥沙，只要不超过一定的極限值，我們可以任意改变進沙率都不致引起泥沙在槽內沉積。只要進沙率不超过此一極限值，水槽即能保持原有的清潔。如果在水流通过以后我們去观察水槽的情形，我們只能說：泥沙的進沙率一定小于此一極限率，也就是小于混凝土槽的輸沙能力。泥沙本身並沒有在槽中留下任何痕迹。其輸沙率也并不一定会和水流流量有任何关系。这一类在水槽中直瀉而过的泥沙我們称之为“冲瀉質”。

如果泥沙的來量超过水槽的輸沙能力，多余的泥沙便將在水中下沉，开始鋪盖着槽底。要是進沙量不断地超过輸沙能力，更多的泥沙將

停積槽底，使水槽的縱断面完全起了改变，直待通过各断面的泥沙量正好减少到輸沙能力、新的平衡达到而后已。現在我們就能够預測，在水流經過的时候，通过各断面的泥沙量必須等于水槽的輸沙能力；因为如果前者大于后者，多余的泥沙便将停積槽底，如果前者小于后者，不足的泥沙便将自槽底停積泥沙中帶起补足。像这样的河段，其河床泥沙和在水流中通过下行的泥沙屬於同一类型，就称为冲積河流⁽¹³⁾●，本文的主要目的就在指出如何計算这一类冲積河段的輸沙能力。

泥沙混合物

上面提出的問題是極端复雜的，因为实际上進入任何天然河段的泥沙，其大小、形狀、比重永远不会均匀一致，而常常是由各种不同顆粒組成的相当复雜的混合物。从过去的試驗中，我們知道除了在少数例外的情形以外，泥沙顆粒形狀的重要性一般远遜于泥沙的粒徑。組成大多数泥沙主体的那一部分泥沙，其比重也接近常数，变化不出極狹的範圍。因此，对于天然河流中的泥沙混合物，至少对于以沙粒或粗于沙粒的泥沙为主的混合物來說，其不均匀性可以从泥沙粒徑的分析來說明。在以下的推論中并不顧及泥沙顆粒間的分子力，因此这里所介紹的方法也只限于較大的沙粒，一般是限于留在 250 号篩孔（泰勒篩孔尺度）以上或粒徑大于 0.061 公厘的泥沙。但是，这个限制并不是很嚴重的，因为对于上述意义的冲積河床來說，含有小于 0.061 公厘粒徑的顆粒百分数一般不會很多。

既然我們知道了進入天然河段中的泥沙是十分不均匀的混合物，那末，現在我們就可以看一看，以前对于冲積河流、輸沙能力，以及床沙質函数所下的定义，应作如何的修正。我們再从水流通过混凝土槽的例子來說明。假定在水槽進口处加入的泥沙包括各种大小不一的顆粒，从某一最大粒徑起，一直小到粉沙和粘土的範圍。如果最大的泥沙顆粒并不是大到根本不能在水流中移动的話，則在進沙率低的时候，水槽还是可以保持原有清潔状态。但隨着進沙率的增加，最后終於引起了泥沙的停積。

● 括号中的數目字相当于篇末参考文献的數目字。

在大多数的情形下，只有粒徑較粗的泥沙才会沉淀。固然，在水流經過以后，我們也会在粗粒泥沙之間發現占百分比極小的細粒泥沙，可是这一部分細粒泥沙一般为量極微，与其說是由水流本身沉淀出來的，倒不如看成是在偶然的机遇下，被帶進大粒泥沙間而沉淀下來的。从全部沉積泥沙的体積并不因細粒泥沙的除去而减少的事实來看，也指出这一点。細粒泥沙只不过是占据了粗粒泥沙之間的空隙罢了。

沉積泥沙中細粒泥沙的不重要性，可以从試驗中找到直接的証明。粗粒泥沙的沉積率是其進沙率的一个明顯的函数。如果在同样的水流中加入了更多的粗粒泥沙，这些多余的泥沙便要在水槽中沉淀，使得水流在水槽中所能挟帶的粗粒泥沙量維持不变。但是，如果增加的進沙率只是細粒泥沙，則它的沉積率并不因此而受到任何影响。

根据这种在同一河道中，粗粒泥沙和細粒泥沙的迥然不同的特性，作者和他的合作者⁽⁹⁾認為在水流中細粒泥沙的特性固無異于混凝土槽中的“冲瀉質”，而粗粒泥沙的特性，則宛若冲積河道中的泥沙。对于冲瀉質和床沙質間的分界粒徑，可以从床沙的組成中決定。凡在床沙組成中無顯著地位的細粒泥沙都应看成冲瀉質。更具体一点說，我們可以从床沙的机械分析中，把組成床沙的小于百分之十的細粒泥沙当做冲瀉質。只要在決定床沙組成时，不把低水区和死水区的沉積泥沙包括在內，这一个決定冲瀉質的規律在一般情形下都能適用無誤。

固無需說，床沙質和冲瀉質的嚴格划分，只是为了对基本上是複雜的緩变过渡区作一个方便的簡化。事实上目前对于這兩者間的过渡区还是一無所知。关于这一点，我們只要提出下列的問題便可以明白：在已知的水流中，如果同时知道了輸沙的組成和多寡，是不是可以从而推算床沙的組成？这一問題目前还没有明确的解答。

影响床沙質函数的另一个因素是河道断面的形狀。如果断面不受水工結構或水生植物的影响，則其形狀應該只是泥沙和水流的函数。迄今为止，我們还没有一个明确的概念可以用來合理地分析这一些因素間的关系，虽然，对于已知断面的形狀如何影响輸沙率，我們已掌握了若干

●〔譯者注〕对于粗細不同的泥沙在性能上的差異的更明确的說明，請參閱爱因斯坦教授和譯者于1953年12月在美国地球物理学会学报上所發表的一文：“冲瀉質的輸沙率可以从床沙質函数推算嗎？”，并經譯出附于本文末附錄Ⅱ內。

实用的法則。

在作了以上的一般性的討論以后，我們可以更明确地把这一篇文章的目的寫下來，那就是要提供一个方法，用來決定，在不同的水流情形下冲積河道对于組成河床的大小不一的泥沙的輸沙能力。

冲積河道水力学

根据冲積河段的定义，我們曾得到如下的結論：在这样的河段中，床沙質的輸沙率，一定就等于河道所能輸送这一类泥沙的輸沙能力。从此不難得出結論，水流一定是等速流，或者至少是近于等速流。变速流的明渠水力学或是对于回水曲綫的計算，在这里都沒有太大的重要性。如果河道正在急速地淤填抬高或冲刷加深，使得这一类的計算变成需要的时候，我們可以应用伯諾里方程式，正像它用在河底固定的河道一样。

摩阻公式

等速流水力学基本上包括如何決定流速分布和紊流的摩阻損失兩方面。作者曾發現在說明輸沙現象的时候，对于流过沙底河床的明渠水流，其流速分布的決定，最好是采取根据卡門相似定律而來的对数公式，其中常数則用坎魯根的建議(11)。坎魯根对于垂直方向的流速分布建議如次：

光滑床面

$$\frac{\bar{u}_y}{u_*} = 5.50 + 5.75 \log_{10} \left(\frac{y u_*}{\nu} \right) = 5.75 \log_{10} \left(9.05 \frac{y u_*}{\nu} \right) \dots\dots\dots (1)$$

粗糙床面

$$\frac{\bar{u}_y}{u_*} = 8.5 + 5.75 \log_{10} \left(\frac{y}{k_s} \right) = 5.75 \log_{10} \left(30.2 \frac{y}{k_s} \right) \dots\dots\dots (2)$$

我們也可以把床面光滑和床面粗糙两种情形，以及这两者間的过渡区合并为一个公式：

$$\frac{\bar{u}_y}{u_*} = 5.75 \log_{10} \left(30.2 \frac{y x}{k_s} \right) = 5.75 \log_{10} \left(30.2 \frac{y}{\Delta} \right) \dots\dots\dots (3)$$

其中 x 为 k_s/δ 的函数，其关系如图 4（附本书末图袋内）所示。

在上面几个公式中：

$\bar{u}_y$ 在距离床面 y 处的水流平均流速；

$$u_* = \sqrt{\tau_0/\rho_t} = \sqrt{S_0 R g}, \text{ 摩阻流速} \dots\dots\dots (4)$$

ρ_t 水的密度；

S_0 水流的能坡；

R 水力半径；

g 重力加速度；

y 距床面的距离；

ν 水的动滞性；

k_s 河床的糙率；

x 校正参变数；

$\Delta = k_s/x$ 河床的有效糙率；

δ 光滑面的水流滞流层的厚度；

$$\delta = \frac{11.6\nu}{u_*} \dots\dots\dots (5)$$

摩阻因素

其次，对于含有泥沙的周界表面，我们需要对它的糙率 k_s 下一个定义。如果组成周界的泥沙是均匀一致的， k_s 就等于根据筛分法定出的泥沙粒径。泥沙混合物的代表粒径，从水槽试验的结果证明是相当于床沙组成中的 D_{65} ，亦即床沙组成中百分之六十五（以重量计）的泥沙都小于此一粒径。

由泥沙组成的河床，如果其表层因水流的作用而发生运动，一般很难维持平整，而常在其上出现各种形状和大小的沙纹或沙丘。这些不平整的起伏对于河床的糙率有相当的影响。水槽试验的结果⁽⁶⁾和对天然河流的观测⁽⁷⁾都指出此一影响相当可观，不能忽略不计。分析了从不同河流中所搜集的大量水位观测的资料以后⁽⁷⁾，使作者形成了如下的看法。

沙丘的阻力

作者⁽³⁾曾經提供过一个方法，可用以估計水槽兩壁的摩阻对推移質試驗結果的影响⁽⁴⁾。这一个方法基于如下的假定：如果周界各部分的糙率并不均匀一致，我們可以根据不同的摩阻周界，把水流断面積分成同数目的并和各部分周界相当的單元，每一个單元內所应用的摩阻公式和其所含的系数，就如同在周界糙率均匀一致时，在整个断面內所应用的公式和系数一样。同样的方法也可以用来說明沿着起伏不平的泥沙床面的摩阻力。在泥沙床面上摩阻力的產生是淵源于兩種截然不同的方式：

(1) 沿着床面的泥沙顆粒，有如粗糙的周界，其代表粒徑为 k_s ；(2) 由于水流在沙紋或沙丘丘峯的分离，在沙丘背水面的死水区里產生漩渦，正像人們在沉浸在水流里的較大的物体的背后所观察到的現象一样。由于水流的分离，使得沙丘的迎水面和背水面發生压力差，因此，一部分的水流阻力遂通过此压力差（形狀阻力）而傳达于床面。

应用前面提到的方法，我們也可以把水流断面積分成兩部分。在第一部分內水流所產生的剪力，沿着床沙顆粒表面而傳达于床面。在另一部分內水流的剪力則通过沙丘兩側的压力差而傳达于床面。這兩部分的水流断面積分別为 A' 及 A'' 。這兩种形式的水流剪力作用大致平均分布在整個床面上，因此它們是作用在同一的潤周 p_b 上。这样我們可以得到兩個不同的水力半徑 $R' = A' / p_b$ 及 $R'' = A'' / p_b$ ，其中 $R' + R'' = R_b$ ， R_b 則为河床的总水力半徑。

讀者們也許要怀疑，既然這兩部分水流剪力都作用在同一的潤周上，現在把它們分开是不是顯得有点人为化了。要了解这样分开來的意义，我們只要回想一下，隨同着水流剪力的傳达到河床周界，一部分水流的能量便在周界上轉換而成紊动的动能。通过粗糙床面而產生的能量轉換就發生在床沙顆粒上。由此而產生的紊动至少在一个短時間內停留在床沙顆粒附近，以后將會提到，它对于推移質的运动有極大的影响。在另一方面，和形狀阻力有关的那一部分能量，是在水流的分离面上轉

●〔譯者注〕 原著載于 1942 年美國土木工程師学会学报中，是分析水槽試驗結果不可或缺的工具，因此特譯出刊入篇末附錄工中。

換為紊動的，它和床面的泥沙顆粒隔着相當距離。這一部分能量對於推移質的運動並沒有直接影響，因此在考慮整個輸沙問題時一般可以略去不計。從以上的說明，我們可以明白把水流剪力分成兩部分 u_*' 及 u_*'' 有極重大的意義。這裡

$$\left. \begin{aligned} u_*' &= \sqrt{S_0 R' g} \\ u_*'' &= \sqrt{S_0 R'' g} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6)$$

根據同樣的推理，流速在床面顆粒附近的分布可用公式(1)到(3)表示，不過其中 u_* 應為 u_*' 。根據坎魯根的試驗結果，在垂綫上的平均流速可用下列公式決定：

光滑床面

$$\frac{\bar{u}}{u_*'} = 3.25 + 5.75 \log_{10} \left(\frac{R' u_*'}{\nu} \right) = 5.75 \log_{10} \left(3.67 \frac{R' u_*'}{\nu} \right) \dots (7)$$

粗糙床面

$$\frac{\bar{u}}{u_*'} = 6.25 + 5.75 \log_{10} \left(\frac{R'}{k_s} \right) = 5.75 \log_{10} \left(12.27 \frac{R'}{k_s} \right) \dots\dots (8)$$

如果把上述兩者及其間的過渡區完全包括在內，則

$$\frac{\bar{u}}{u_*'} = 5.75 \log_{10} \left(12.27 \frac{R' x}{k_s} \right) = 5.75 \log_{10} \left(12.27 \frac{R'}{\Delta} \right) \dots\dots\dots (9)$$

其中 x 是 k_s/δ' 的函數，和圖4中所示一樣

$$\delta' = \frac{11.6\nu}{u_*'} \dots\dots\dots (10)$$

同樣地，我們也可以寫出 $\bar{u}/u_*''$ 的公式來，基本上和公式(9)相當。根據 u_*'' 的產生淵源，我們可以推想 $\bar{u}/u_*''$ 應該和沙紋或沙丘的形狀、大小有關。經驗指出，沙紋或沙丘的形狀及大小因床面上的輸沙率多寡而異。在以後我們還要指出泥沙的運動是下列水流函數的函數：

$$\Psi' = \frac{\rho_s - \rho_l}{\rho_l} \frac{D_{35}}{R' S_0} \dots\dots\dots (11)$$

其中 ρ_s 及 ρ_l 分別為泥沙和水的密度， D_{35} 則為床沙組成中百分之三十五都比此為細的粒徑， R' 及 S_0 的意義在以前已加說明。這樣，我們可以想到， $\bar{u}/u_*''$ 應是 Ψ' 的函數。事實證明在兩岸不受約束的天然河道里，這一個關係確實存在，如圖5所示。當然 $\bar{u}/u_*''$ 並不包括河岸、水生植物，或者其他的障礙物所產生的阻力，這一類阻力應該單獨分別計算。