五年制高等职业技术教育教材

高等数学

高职数学教材编写组 编

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

五年制高等职业技术教育教材

高　等　数　学

高职数学教材编写组　编

本套教材　主　编　王化久

副主编　耿　莹

主　审　曹成龙

机械工业出版社

本套教材是根据教育部颁布的五年制高职数学课程的基本要求编写的。全套教材共分初等数学、高等数学、技术数学三册，总学时为280～330。本书是高等数学，内容包括极限与连续、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分及其应用、多元函数微积分，Mathematica使用简介（二）、简易积分表的内容作为附录附于书后。本书授课时数为90～100。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学/王化久主编. —北京：机械工业出版社，2003.8

五年制高等职业技术教育教材

ISBN 7-111-12475-8

Ⅰ.高… Ⅱ.王… Ⅲ.高等数学-高等学校：技术学校-教材 Ⅳ.013

中国版本图书馆CIP数据核字（2003）第050382号

机械工业出版社（北京市百万庄大街22号 邮政编码100037）

策划编辑：韩雪清 郑 丹 责任编辑：郑 丹 版式设计：霍永明

责任校对：张莉娟 封面设计：姚 毅 责任印制：闫 焱

北京京丰印刷厂印刷 · 新华书店北京发行所发行

2003年8月第1版 · 第1次印刷

1000mm×1400mm B5 · 8.375印张 · 325千字

定价：21.00元

前　　言

本套教材是根据教育部2000年颁布的全国五年制高等职业教育《〈应用数学基础〉课程基本要求》编写的。在编写过程中紧密围绕高职培养目标，以“必需、够用”为度，遵循“强化能力，立足应用”的原则，在教材内容、体例安排、习题设置等方面，力求体现五年制高等职业教育的特点。

全套书共包括《初等数学》(第一章至第十一章)、《高等数学》(第十二章至第十七章)、《技术数学》(第十八章至第二十三章) 三册，供招收初中毕业生的五年制高职院校使用。

本教材有以下特点：

1. 注重基础知识

对传统的初等数学、高等数学内容进行精选，把在理论上、方法上以及在现代生产、生活及各类专业学习中广泛应用的基础知识作为必学内容，以保证必要的、基本的数学水准。同时适度更新，增加逻辑用语、映射、向量、计算器使用简介、计算机软件使用简介等内容，并注意渗透数学建模思想和方法。

2. 教材富有弹性

本教材采用模块式结构编排方式，将教材内容分为必学、选学（标有 * ）部分，便于各类院校根据不同专业的不同要求灵活选用，增强了教材的弹性和适用性。

3. 深入浅出，易教易学

针对当前五年制高职学生的数学基础和实际水平，在编写中力求做到降低知识起点，温故知新、深入浅出，并采用数形结合的方法，以图、表直观地讲解概念、定理，加强分析过程，使教材易教易学。

4. 突出应用，注意培养学生应用数学的意识与能力

本教材采取分散与集中相结合的方式，编排了有价值的应用题。基本上每章设有应用节，每节设有应用题，并安排了专题学习内容，列为“应用与实践”，引导学生运用所学的数学知识解决日常生产、生活中的简单实际问题。同时，尽量安排能够使用计算器、计算机来计算各类数值的例题与习题，培养和提高学生使用计算工具的能力。

本册为《高等数学》，内容包括：极限与连续，导数与微分，导数的应用，不定积分，定积分及其应用，多元函数微积分，附录中列出了 Mathematica 使用简介（二）等。在每章、节后配有一定数量的习题、复习题，供教师和学生选

用，并附有部分习题答案。

参加本册编写的有：辛虹、郭景石、刘龙、杨俊平、王化久。本册主编辛虹，副主编郭景石，主审井瑞峰。

本册参编院校：大连水产学院职业技术学院、沈阳职业技术学院机械电子学院、哈尔滨职业学院机电分院、辽宁机电职业技术学院。

本书编写过程中，得到了机械工业出版社的热情关怀和指导，各编、审同志所在院校对编审工作给予了大力支持和协助，在此一并致谢。

由于编者水平有限，不妥之处在所难免，敬请广大读者批评指正。

高职数学教材编写组

目　录

第十二章　极限与连续

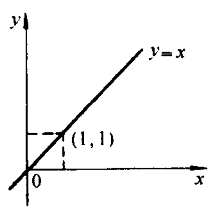
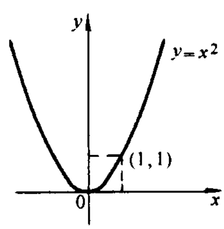
函数描述了客观世界中量与量之间的依赖关系，是高等数学研究的主要对象。极限揭示了函数的变化趋势，是数学中一个重要的基本概念，也是学习微积分的理论基础。本章将在复习并进一步加深理解函数概念的基础上，学习函数的极限及其运算法则，并利用极限讨论函数的连续性。

第一节　初 等 函 数

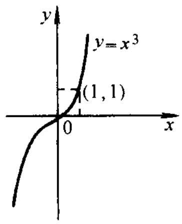
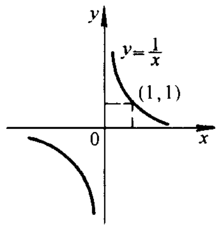
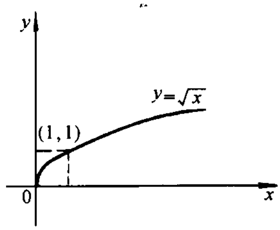
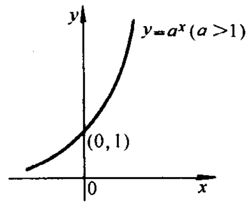
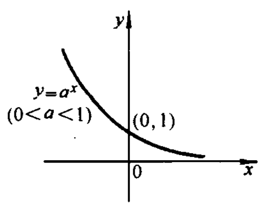
一、基本初等函数

我们在《初等数学》中学过的幂函数 $y=x^{\alpha}$（$\alpha\in\mathbf{R}$）、指数函数 $y=a^{x}$（$a>0$ 且 $a\neq1$）、对数函数 $y=\log_{a}x$（$a>0$ 且 $a\neq1$）、三角函数和反三角函数，这五类函数统称为**基本初等函数**。为便于应用，现将一些常用的基本初等函数的定义域、值域、图像和性质列于表 12－1 中。

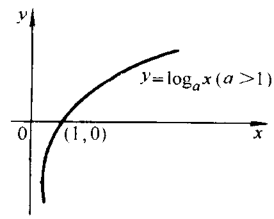
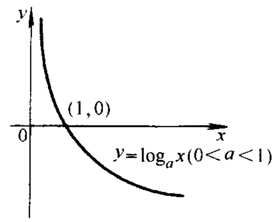
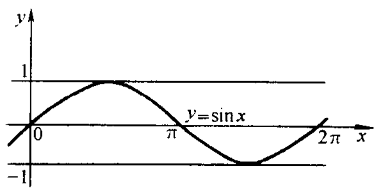
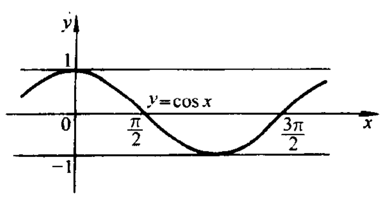
表　12－1

函　　数		定义域和值域	图　　　像	特　　性
幂函数	$y=x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数，单调增加
	$y=x^{2}$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in[0,+\infty)$		偶函数 在 $(-\infty,0)$ 内单调减少 在 $(0,+\infty)$ 内单调增加

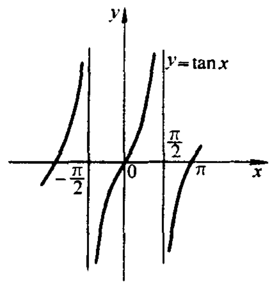
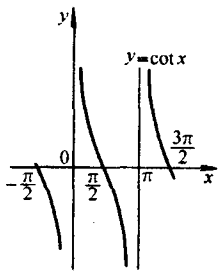
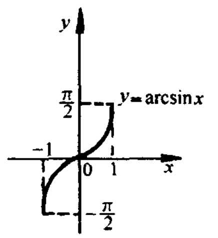
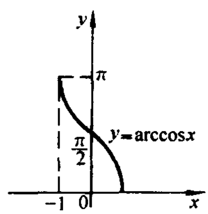
（续）

函　数		定义域和值域	图　　像	特　性
幂函数	$y=x^3$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数 在$(-\infty,+\infty)$内单调增加
	$y=x^{-1}$	$x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ $y\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$		奇函数,单调减少
	$y=x^{\frac{1}{2}}$	$x\in[0,+\infty)$ $y\in[0,+\infty)$		单调增加
指数函数	$y=a^x$ $(a>1)$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(0,+\infty)$		单调增加
	$y=a^x$ $(0<a<1)$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(0,+\infty)$		单调减少

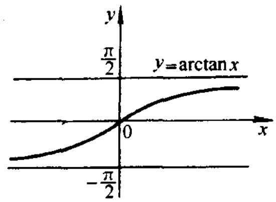
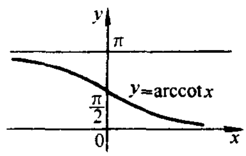
（续）

函数		定义域和值域	图像	特性
对数函数	$y=\log_a x$ $(a>1)$	$x\in(0,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		单调增加
	$y=\log_a x$ $(0<a<1)$	$x\in(0,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		单调减少
三角函数	$y=\sin x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in[-1,1]$		奇函数，周期 2π，有界，在$\left(2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$内单调增加，在$\left(2k\pi+\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{3\pi}{2}\right)$内单调减少$(k\in\mathbf{Z})$
	$y=\cos x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in[-1,1]$		偶函数，周期 2π，有界，在 $(2k\pi,2k\pi+\pi)$ 内单调减少，在 $(2k\pi+\pi,\ 2k\pi+2\pi)$ 内单调增加 $(k\in\mathbf{Z})$

（续）

函数		定义域和值域	图像	特性
三角函数	$y=\tan x$	$x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$ $(k\in\mathbf{Z})$ $y\in(-\infty,+\infty)$	 	奇函数，周期 π，在 $\left(k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$ 内单调增加 $(k\in\mathbf{Z})$
	$y=\cot x$	$x\neq k\pi(k\in\mathbf{Z})$ $y\in(-\infty,+\infty)$	 	奇函数，周期 π，在 $(k\pi,k\pi+\pi)$ 内单调减少 $(k\in\mathbf{Z})$
反三角函数	$y=\arcsin x$	$x\in[-1,1]$ $y\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$	 	奇函数，单调增加，有界
	$y=\arccos x$	$x\in[-1,1]$ $y\in[0,\pi]$	 	单调减少，有界

（续）

<table>
<tr><th colspan="2">函　　数</th><th>定义域和值域</th><th>图　　　像</th><th>特　　性</th></tr>
<tr><td rowspan="2">反
三
角
函
数</td><td>$y=\arctan x$</td><td>$x\in(-\infty,+\infty)$
$y\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$</td><td>
</td><td>奇函数，单调增加，有界</td></tr>
<tr><td>$y=\operatorname{arccot} x$</td><td>$x\in(-\infty,+\infty)$
$y\in(0,\pi)$</td><td>
</td><td>单调减少，有界</td></tr>
</table>

二、复合函数　初等函数

1. 复合函数

在很多实际问题中，我们常常遇到由几个简单的函数构成一个较复杂函数的情况。例如，质量为 m 的物体，以初速度 v_0 竖直上抛，由物理学知道，其动能 $E=\frac{1}{2}mv^2$，而 $v=v_0-gt$（不计空气阻力），于是得 $E=\frac{1}{2}m(v_0-gt)^2$，这样就把动能 E 通过速度 v 表示成了时间 t 的函数。类似地，由三角函数 $y=\sin u$ 与函数 $u=2x$ 可构成函数 $y=\sin 2x$。对于这样的函数，给出如下定义：

定义 1　如果 y 是 u 的函数 $y=f(u)$，而 u 又是 x 的函数 $u=\varphi(x)$，且 $u=\varphi(x)$ 的值域包含在函数 $y=f(u)$ 的定义域内，那么 y（通过 u 的关系）也是 x 的函数，我们把这样的函数叫做 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$ 复合而成的函数，简称**复合函数**，记作 $y=f[\varphi(x)]$，其中 u 叫做**中间变量**。

复合函数的概念可以推广到多个中间变量的情形。

例 1　指出下列各函数的复合过程。

(1) $y=\sqrt{x^2-2x+5}$　　　　(2) $y=\cos^2 x$

(3) $y=\lg(1-x)$　　　　(4) $y=\sin\sqrt{1-x^2}$

解　(1) $y=\sqrt{x^2-2x+5}$ 由 $y=\sqrt{u}$ 与 $u=x^2-2x+5$ 复合而成。

(2) $y=\cos^2 x$ 由 $y=u^2$ 与 $u=\cos x$ 复合而成。

(3) $y=\lg(1-x)$ 由 $y=\lg u$ 与 $u=1-x$ 复合而成。

(4) $y=\sin\sqrt{1-x^2}$ 由 $y=\sin u$，$u=\sqrt{v}$ 与 $v=1-x^2$ 复合而成。

注意 （1）并非任意两个函数都能构成复合函数。例如 $y=\arcsin u$ 与 $u=x^2+2$便不能复合成一个函数，因为 u 的值域为 $[2,+\infty)$，不包含在 $y=\arcsin u$的定义域 $[-1,1]$ 内，因而不能复合。

（2）对复合函数进行分解时，每个层次都应是基本初等函数或常数与基本初等函数的四则运算式；当分解到常数与基本初等函数的四则运算式时，就不再分解了。

2. 初等函数

定义 2 由基本初等函数和常数经过有限次四则运算和有限次复合步骤所构成的，并能用一个解析式表示的函数叫做**初等函数**。

例如，$y=\lg(x^2+\sin x)$、$y=\dfrac{\cos x}{1+x^2}$、$y=e^{2x}\ln x$、$y=\sqrt{x}+\tan 3x$ 等都是初等函数。初等函数是最常见的函数，它是微积分研究的主要对象。

分段函数 $y=\begin{cases} x, & x\geqslant 0 \\ -x, & x<0 \end{cases}$即 $y=\sqrt{x^2}=|x|$，它是由 $y=\sqrt{u}$与 $u=x^2$ 复合而成的，因此它是一个初等函数。

而分段函数 $y=\begin{cases} 2x+1, & x<0 \\ 0, & x=0 \\ 1-x^2, & x>0 \end{cases}$不能用一个式子表示，因此它不是初等函数。

三、建立函数关系举例

运用数学方法解决实际问题时，往往先要建立函数关系（或称建立数学模型）。为此，需明确问题中的自变量与函数，然后根据题意建立等式，从而得出函数关系，并根据实际问题的要求，确定函数的定义域。

例 2 要建造一个容积为 V 的长方体水池，它的底为正方形。如池底的单位面积造价为侧面单位面积造价的 3 倍，试建立总造价与底面边长之间的函数关系。

解 设底面边长为 x，总造价为 y，侧面单位面积造价为 a。由已知可得水池深为$\dfrac{V}{x^2}$，侧面积为 $4x\dfrac{V}{x^2}=\dfrac{4V}{x}$，从而得

$$y=3ax^2+4a\frac{V}{x}\quad(0<x<+\infty)$$

例 3 某运输公司规定1t货物的运价为：在 $a$km 以内，k 元/km；超过 $a$km 时，超过部分为$\dfrac{4}{5}k$ 元/km。求运价 y 与里程 x 之间的函数关系。

解 根据题意可列出函数关系如下

$$y=\begin{cases} kx, & 0<x\leqslant a \\ ka+\dfrac{4}{5}k(x-a), & x>a \end{cases}$$

例 4 某工厂今年一、二、三月份的产品销量分别为 1 万件、1.2 万件和 1.3 万件，呈上升趋势。为了估测以后每个月的销量，拟选用二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 或指数函数型的 $y=ab^x+c$（a，b，c 均为常数）加以模拟。后来四月份的销量是 1.37 万件，那么根据一、二、三月份销量所选定的两个模拟函数哪一个更好？

解 设 $f(x)=ax^2+bx+c$（x 是月份数，$f(x)$ 是销量函数），则

$$\begin{cases} f(1)=a+b+c=1 \\ f(2)=4a+2b+c=1.2 \\ f(3)=9a+3b+c=1.3 \end{cases}$$

解得 $$a=-0.05,\ b=0.35,\ c=0.7$$

于是 $f(x)=-0.05x^2+0.35x+0.7$，且 $f(4)=1.3$。

设 $g(x)=ab^x+c$（x 是月份数，$g(x)$ 是销量函数），则

$$\begin{cases} g(1)=ab+c=1 \\ g(2)=ab^2+c=1.2 \\ g(3)=ab^3+c=1.3 \end{cases}$$

解得 $$a=-\frac{4}{5},\ b=\frac{1}{2},\ c=\frac{7}{5}$$

于是 $$g(x)=-\frac{4}{5}\times\left(\frac{1}{2}\right)^x+\frac{7}{5}，且\ g(4)=1.35。$$

从四月份的销量 1.37 看，$f(4)$ 和 $g(4)$ 比较起来，$g(4)$ 与 1.37 更接近，宜用 $g(x)$。同时 $g(x)$ 是增函数，而 $f(x)$ 是先增后减，如果从销量呈上升趋势看也宜用 $g(x)$，所以采用 $g(x)=ab^x+c$ 为模拟函数较合理。

习 题 12-1

1. 下列各题中，$f(x)$ 与 $g(x)$ 是否表示同一个函数？说明理由。

(1) $f(x)=\frac{x}{x}$，$g(x)=1$

(2) $f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$，$g(x)=x+1$

(3) $f(x)=\lg x^2$，$g(x)=2\lg x$

(4) $f(x)=x$，$g(x)=(\sqrt{x})^2$

(5) $f(x)=\ln|x|$，$g(x)=\ln x$

(6) $f(x)=\sqrt{(x-y)^2}$，$g(x)=|y-x|$

2. 设 $f(x)=1+x^2$，$\varphi(x)=\sin 3x$，求 $f(0)$，$f\left(\frac{1}{a}\right)$，$f(t^2-1)$，$f[\varphi(x)]$，$\varphi[f(x)]$。

3. 设 $f(x)=\begin{cases} 1+x, & x\leqslant 0 \\ 2, & x>0 \end{cases}$

求 $f(0)$，$f\left(\frac{1}{2}\right)$，$f(-1)$，$f(1)$。

4. 设 $f(x)=\begin{cases} 2+x, & x<0 \\ 0, & x=0 \\ x^2-1, & 0<x\leqslant 4 \end{cases}$

求 $f(x)$的定义域及 $f(-1)$、$f(2)$的值，并作出它的图像。

5. 求下列函数的定义域。

(1) $y=\sqrt{x^2-4x+3}$　　(2) $y=\sqrt{4-x^2}+\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$

(3) $y=\lg\sin x$　　(4) $y=\ln(x+2)+1$

6. 将 $y=5-|2x-1|$用分段函数形式表示，并作出函数图像。

7. 写出下列复合函数的复合过程。

(1) $y=\sin^3(8x+5)$　　(2) $y=\tan\left(\sqrt[3]{x^2+5}\right)$

(3) $y=e^{1-x^2}$　　(4) $y=\ln(3-x)$

(5) $y=\ln\cos^2(3x+1)$　　(6) $y=\log_5\cot^3(5x^2+7)$

8. 求单位圆内接正 n 边形的周长 C 与边数 n 的函数关系。

9. 用铁皮做一个容积为 V 的圆柱形罐头筒，将它的全面积表示成底面半径的函数。

10. 某工厂有一水池，其容积为 100m^3，原有水 10m^3。现在每 10min 注入 0.5m^3 的水，试将水池中水的体积 V 表示为时间 t 的函数，且问需多少分钟水池才能灌满。

11. 某公共汽车路线全长 20km，乘坐 5km 以下收费 0.5 元，乘坐 5～10km 收费 1.5 元，10km 以上收费 2 元，试将票价表示成路程的函数。

12. 一边长为 a 的正方形铁皮，四个角各剪去一个相等的小正方形，然后折成一个无盖的盒子，试建立它的容积与剪去的小正方形边长之间的函数关系。

第二节　函数的极限

极限是研究在自变量的某一变化过程中函数的变化趋势的，它是高等数学的重要概念之一。在研究函数的极限之前，先讨论它的特殊情况。

一、数列的极限

我们来考察下面三个数列：

(1) $2,\ \dfrac{3}{2},\ \dfrac{4}{3},\ \cdots,\ \dfrac{n+1}{n},\ \cdots$

(2) $\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{4},\ \dfrac{1}{8},\ \cdots,\ \dfrac{1}{2^n},\ \cdots$

(3) $2,\ \dfrac{1}{2},\ \dfrac{4}{3},\ \cdots,\ \dfrac{n+(-1)^{n-1}}{n},\ \cdots$

为直观起见，将它们的前几项分别在数轴上表示出来（见图 12－1）：

容易看出，当项数 n 无限增大时，数列（1）中的项无限接近于 1；数列（2）中的项无限接近于 0；数列（3）中的项是交错地排列的，从两侧无限地接近于 1。

上面三个数列的变化趋势说明，当项数 n 无限增大时，数列的项 x_n 无限地接近于某一个确定的常数A。对此，我们给出如下定义。

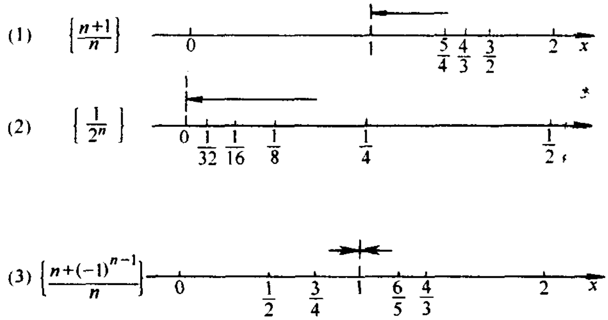


图 12-1

定义 1 如果当项数 n 无限增大时（记为 $n\to\infty$），数列 $\{x_n\}$ 的项 x_n 无限接近于一个确定的常数 A，那么 A 叫做**数列 $\{x_n\}$ 的极限**，记作

$$\lim_{n\to\infty}x_n=A \text{（或当 } n\to\infty \text{时，} x_n\to A\text{）}$$

因此，数列（1）的极限是 1，记作$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1$；数列（2）的极限是 0，记作$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0$；数列（3）的极限是 1，记作$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+(-1)^{n-1}}{n}=1$。

例 1 考察下面数列的变化趋势，写出它们的极限。

(1) $x_n=\frac{1}{n^2}$ (2) $x_n=2-\frac{1}{3^n}$

(2) $x_n=(-1)^n\frac{1}{n}$ (4) $x_n=-5$

解 列表考察这四个数列的前几项及当 $n\to\infty$时，它们的变化趋势见下表：

n	1	2	3	4	5	…	$\to\infty$
$\frac{1}{n^2}$	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{25}$	…	$\to 0$
$2-\frac{1}{3^n}$	$2-\frac{1}{3}$	$2-\frac{1}{9}$	$2-\frac{1}{27}$	$2-\frac{1}{81}$	$2-\frac{1}{243}$	…	$\to 2$
$(-1)^n\frac{1}{n}$	-1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{5}$	…	$\to 0$
-5	-5	-5	-5	-5	-5	…	$\to -5$

由上表中各数列的变化趋势，可知

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0$ (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(2-\frac{1}{3^n}\right)=2$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n\dfrac{1}{n}=0$　　　　　(4) $\lim\limits_{n\to\infty}(-5)=-5$

一般地，可得出以下几个结论：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0$　($|q|<1$)

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^\alpha}=0$　(α 为大于 0 的实数)

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}C=C$　(C 为常数)

注意　并不是任何数列都有极限，有些数列就没有极限。例如，数列 $x_n=2^n$，当 n 无限增大时，它不能无限接近于一个确定的常数，所以数列 $x_n=2^n$ 没有极限。又如，数列 $x_n=(-1)^{n+1}$，当 n 无限增大时，x_n 在 1 和 -1 这两个数上来回跳动，而不能无限接近于一个确定的常数，所以数列 $x_n=(-1)^{n+1}$ 没有极限。

对于上述没有极限的数列，也说该数列的极限不存在。

二、函数的极限

数列是自变量只取正整数的特殊函数，即 $x_n=f(n)(n=1,2,3,\cdots)$。下面将这种特殊函数的极限概念推广到以实数 x 为自变量的一般函数 $f(x)$。

1. 当 $x\to\infty$ 时，函数 $f(x)$ 的极限

$x\to\infty$ 表示自变量 x 的绝对值无限增大，它包括 x 取正值而无限增大（记为 $x\to+\infty$）及 x 取负值而绝对值无限增大（记为 $x\to-\infty$）两种情形。下面考查当 $x\to\infty$ 时，函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 的变化趋势。

从图 12-2 可以看出，当 $x\to+\infty$ 时，函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 的值无限接近于 0；同样地，当 $x\to-\infty$ 时，函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 的值也无限接近于 0。这就是说，当 $x\to\infty$ 时，函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 无限接近于 0，此时我们称 0 为 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 当 $x\to\infty$ 时的极限。

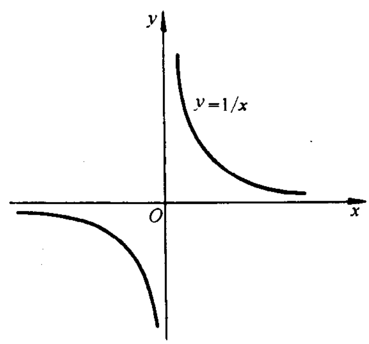


图　12-2

一般地，有如下定义：

定义 2　如果当 x 的绝对值无限增大，即 $x\to\infty$ 时，函数 $f(x)$ 无限接近于一个确定的常数 A，那么 A 叫做函数 $f(x)$ 当 **$x\to\infty$ 时的极限**，记作

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A\quad(\text{或当 } x\to\infty \text{ 时，} f(x)\to A)$$