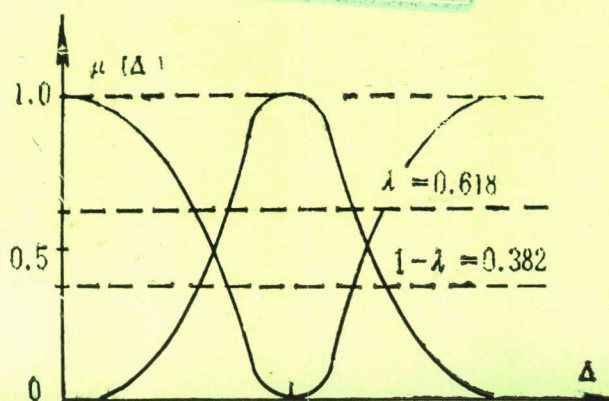
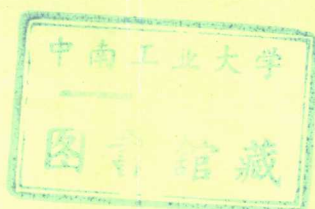


模糊集误差论与模糊权

王树元 李 军 刘志国 著



西南交通大学出版社

模糊集误差论与模糊权

王树元

李 军 著

刘志国

西南交通大学出版社

模糊集误差论与模糊权
王树元 李 军 刘志国 著

西南交通大学出版社出版发行
(成都 二环路北一段 610031)

西南交通大学唐山分校印刷厂印刷



开本: 787×1092 1/16 印张: 9.75
字数: 230千字 印数: 1—1000册
1996年12月第1版 1996年12月第1次印刷
ISBN 7-81022-892-7/O·082
定价: 14.00元

序

把模糊数学的方法用于解决测量中的个别问题，在测绘文献中偶有所见，而把观测误差视为模糊事件，较系统地用模糊数学的基本定理和算法进行分析和处理，则是本书的特点和创新。书中推出了一些新的概念和理论，给人以耳目一新之感。如模糊权及其用贴近度来逼近的方法等等，均有新意和实用潜力，由作者根据其日常工作中所收集的实测例子和验算的结果看来，所推荐的方法对测量工作中的设计和精度分析，都有独到之处和一定优点。

本书说理清楚，文字简炼，有较高的理论水平和一定的实用意义，其理论的发展，有可能补充概率统计的不足，成为测量精度和数据处理方面的一个新的手段，本书值得出版和推广。

陈 健

1994年3月

前 言

《模糊集误差论与模糊权》是作者根据近十余年来测量学、精密计量学的发展,为解决所出现的一系列误差理论和数据处理方面的难题,结合作者多年来丰富的科学实践,而撰写的一本颇具新意的学术专著。就精密计量学的范畴而言,由于计量中事实上存在着非正态分布的随机误差和各种系统误差,应用经典的误差理论来处理测量数据,已越来越显示与实际情况的差异。由国际计量局提出成立的关于测量不确定度表述的工作组,就是致力于本领域有关该课题研究的,并已就不同分布各种误差的综合,取得了一定的效果。但就不确定度总合定律的建立,理论上尚存在较大的距离。

本书作者提出以误差仿真系统和模糊误差分布函数为基础,建立了“可能性理论”,并形成了“模糊集误差论”,从而产生出并行于经典误差的新理论,在理论上有所突破。

其次,由于可能性理论的出现,奠定了模糊集误差累积定律的数理基础,可以解决可测不确定度与不可测不确定度总合这一国际性难题。

作者在严格仿真误差指标基础上,定义出了模糊权和边角联合权,建立了不同量纲观测值误差联系桥梁,提出了按误差大小定权的基本原则。在此基础上,建立了优化设计新思路,是对经典平差理论的发展。

总之,本书在理论上有所创新,属国际首创,有较大的实用价值。本书文字简炼,说理清楚,逻辑性强,是一本有价值的误差理论书籍,建议迅速出版。

陈林才

1994年10月19日

目 录

第一章 研究新理论的必要性和可行性

- § 1.1 问题的提出 (1)
- § 1.2 研究新误差理论的迫切性与必要性 (5)
- § 1.3 建立新误差理论的可行性 (19)

第二章 测量误差系统与误差指标

- § 2.1 系统论基本知识 (23)
- § 2.2 误差集合的构成 (26)
- § 2.3 算术平均值及其误差剖析 (34)
- § 2.4 测量误差仿真系统的建立 (37)

第三章 模糊误差集合与可能性理论

- § 3.1 模糊误差集合 (45)
- § 3.2 概率论及其在测量中应用的含混性 (54)
- § 3.3 测量误差的可能性分布 (56)
- § 3.4 概率论与可能性理论的区别 (58)
- § 3.5 测量误差隶属函数的建立 (63)

第四章 模糊集误差总合定律的建立

- § 4.1 凸模糊集 (74)
- § 4.2 区间数 (76)
- § 4.3 模糊数 (77)
- § 4.4 模糊数的算术运算 (78)
- § 4.5 误差覆盖与不确定度基本概念 (80)
- § 4.6 观测值指标误差的求定 (83)
- § 4.7 模糊集误差总合定律的建立 (89)
- § 4.8 导线测量误差分析 (94)
- § 4.9 模糊集误差总合定律的实践检验 (108)
- § 4.10 三角锁(网)角度误差分析 (112)
- § 4.11 水准测量误差分析 (115)

第五章 模糊度与模糊权

- § 5.1 模糊集合的模糊度及其描述 (117)
- § 5.2 利用贴近度进行分布检验 (123)
- § 5.3 模糊权 (125)
- § 5.4 边角联合权与优化设计 (131)

第六章 系统误差检验方法有效性的研究

§ 6.1 概 述	(137)
§ 6.2 关于“平均误差判据”	(137)
§ 6.3 关于“阿贝 (Abbe) 判据”	(139)
§ 6.4 关于“阿贝—赫尔默特判据”	(141)
§ 6.5 关于“马利科夫判据”	(142)
§ 6.6 算 例	(143)
符号表	(145)
后 记	(146)
参考文献	(147)

第一章 研究新理论的必要性和可行性

§ 1.1 问题的提出

一、概 述

人类生存的目的就是认识世界和改造世界；要想正确地认识物质世界，必须对事物作出确切的划分。概念是一种最基本的划分，而测量是一种具体的划分手段，人类通过测量总结出一般规律，建立各种定理和定律，用以指导生产实践，这就是实践→理论→实践的辩证关系，所以有人称测量是一把打开科学宝库的金钥匙。

测量技术的水平，测量结果的可靠性，测量工作的价值，全在于其精确度，也就是在于测量误差的大小。测量的精确度不仅关系到工程技术的质量和成败，而且也可能成为重大科学新发现和带根本性技术革新的前导。当今时代已进入以电子技术为代表的高科技时代，电子测量技术水平已成为衡量一个国家科技发展水平的重要标志之一。因此自古以来就吸引众多的科学家研究测量误差，首先是数学家高斯和拉普拉斯，高斯于1809年创立了经典误差理论，随后白塞尔等人对经典误差理论作了补充，形成了今天的经典误差理论。

理论来源于实践，实践又是检验真理的标准，经过若干年的测量实践，首先是高斯本人发现测量结果中存在着不可忽视的系统误差，认为评定一个测量结果的可靠程度是复杂和困难的，因此他于1823年提出了不同的误差估计式： $\sqrt{\xi^2 + \sigma^2}$ ，式中： ξ 为系统误差， σ 为偶然误差。之后便由阿贝、赫尔默特、马利科夫等人开始了一个多世纪的系统误差检验研究。其目的不在于研究系统误差的分布规律，而是为剔除系统误差，但是都因立足偶然误差检验系统误差，很少取得满意效果。

据文献〔23〕介绍，1958苏联测量学家契巴塔廖夫教授指出，当测量次数为10时，按高斯中误差式计算的中误差含有5%的偏差，按白塞尔公式计算时，估算偏差都在20%以上，认为这是大地测量亟待解决的难题。

1961年“加拿大测量员”发表的F. Gregerson文章指出：“从有限次观测值中得出的算术平均值不是最佳估值”。L. G. Parratt认为：“没有任何一项实际的测量结果会是真正服从正态分布规律”〔20〕。

1971年文献〔8〕指出：“使用光电测距仪测距时，原有的误差传播定律要失效，应建立新的有效定律”，“必须提出完全不同于经典误差分布的有关函数”。

1979年中国文献〔1〕指出，“在电子测量中，误差为非正态分布的情况显得尤其突出，系统误差分量出现的确切规律或概率分布我们是不清楚的。凡此种种，都要求我们除了研究正态分布的误差之外，还必须研究非正态分布的误差”。文献〔1〕还指出：“现在的一些较为流行的测量误差著作，无疑是很有参考价值的，但仍然远远不能满足电子测量实际工作的需要”。

1991年文献[40]指出,在大地形变分析中存在的重大问题是:地质学家和测量学家的分析结果往往是互相矛盾的,地质学家们认为所有实测变形资料都是可信的,而大地测量学家们则认为这些成果要经过检验,要作误差问题的研究,许多成果并不反映客观地质体的运动。例如:我国响水地区地表的形变趋势是下沉,而1985年的平差计算分析结果认为是上升,作出了反向的结论,因而影响着大地形变决策分析。经实践检验已证实,这种反向结果完全是由经典误差理论造成的,是参考基准的错误。文献[41]指出:“这种情况主要反映了模型的不合理”。对于地面沉降这样一种作用机理比较清楚的地面变化来说,把它看成是一种随机运动是不合适的,因而迫切需要改变这种局面。

二、经典误差理论简介

综合各类文献,把经典误差理论支撑局面的几个基本假设概括为:

- (1) 观测次数无穷大,即 $n \rightarrow \infty$;
- (2) 测量误差只有偶然误差,系统误差可以剔除;
- (3) 观测值的均值 $\bar{x}$ 等于观测值的数学期望,观测值的数学期望等于观测值的真值 X ,以残差代替真误差;
- (4) 假设偶然性误差是偶然事件,以高斯正态分布函数代替误差分布规律。

概率论在测量中的应用同在其他方面的应用有所不同,它是有条件的应用。文献[1]指出:“对于随机误差所作的概率统计处理,是在完全排除了系统误差的前提下进行的,即在认为系统误差不存在,或已改正,或小得可以忽略不计的情况下进行的”。

设已给定偶然误差集合 $A = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots, \varepsilon_n\}$ 。

σ 是按集合A的误差元素求得的离散度,则定义密度函数

$$f_0, \varphi(\varepsilon) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{\varepsilon^2}{2\sigma^2}\right] \quad (1-1)$$

为正态分布函数。

若分别赋予 ε 以不同的数值(例如: $\varepsilon = \sigma, 2\sigma, 3\sigma$),则可得如下正态密度函数曲线 $f(\varepsilon)$ 见图1-1。

函数曲线的原始含义是靠函数曲线下与横坐标轴上的面积表达概率结果,在闭区间 $[-3, 3]$ 内曲线下所覆盖面积占总面积的99.7%,在闭区间 $[-2, 2]$ 内曲线下覆盖面积占总面积的95.6%,在 $[-0.67, +0.67]$ 区间内则为50%,并将具体数字称为概率。 σ 值不同,则曲线的锐、钝程度各不相同。当 σ 变小时, $f(\varepsilon)$ 曲线变尖,如图1-2中的虚线所示;当 σ 变大时, $f(\varepsilon)$ 曲线变钝,如图中的实线所示。曲线变尖说明小误差出现的概率变大。

经典误差理论的偶然误差特性:

由图1-3所示的正态误差分布图形总结出以下四个经典偶然误差特性:

- 特性1 绝对值相等的正误差、负误差出现的概率相同,称对称性;
- 特性2 绝对值小的误差出现的概率大,绝对值大的误差出现的概率小;
- 特性3 绝对值很大的误差出现的概率很小,误差值有一定边界;

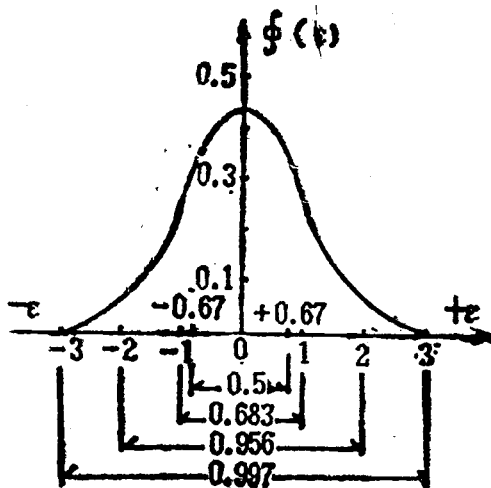


图 1—1 正态密度函数图

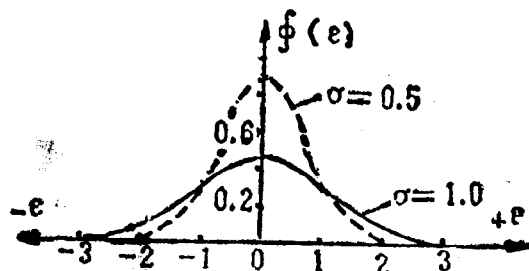


图 1—2 σ 与 $\phi(e)$ 关系图

特性 4 从特性 1 得出推论：当误差元素个数趋近无限大时，即 $n \rightarrow \infty$ ，正、负误差在求和时互相抵消，即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[\epsilon]}{n} = 0 \quad (1-2)$$

图 1—4 是概率曲线，随机误差 e 出现在闭区间 $[e_1, e_2]$ 内的概率按下式计算

$$P\{e_1 < e \leq e_2\} = \int_{e_1}^{e_2} \phi_{\sigma}(e) de \quad (1-3)$$

式中： $\phi_{\sigma}(e)$ 为正态密度函数。

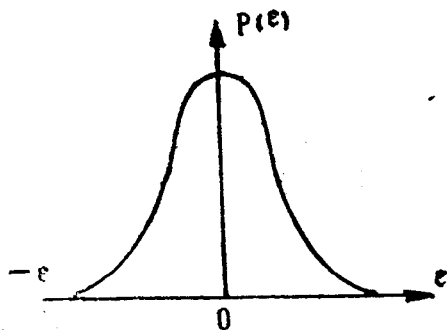


图 1—3 正态分布

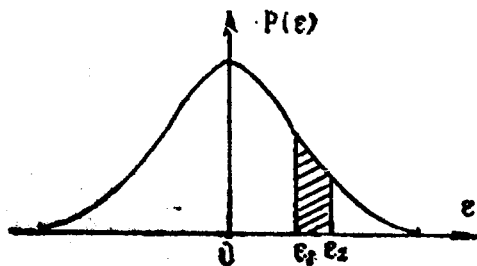


图 1—4 概率计算

其概率为图中阴影部分的面积。

一般说来， e 坐标轴是以均方差 σ 为标准划分刻度值的，如图 1—1 中 e 轴的刻度 1, 2, 3 实际是 $1\sigma, 2\sigma, 3\sigma$ 。所以图 1—4 中的 e_1 和 e_2 实际也应是均方差 σ 的若干倍。需要说明的是，集合 $A_1 \neq A_2$ ，它们的均方差也 $\sigma_1 \neq \sigma_2$ 。所以以均方差 σ_1, σ_2 为标准求得的概率无法进行比较。

由于概率随机误差的分布是对称的, 所以一般习惯于求取对称区间 $[-\varepsilon_1, +\varepsilon_1]$ 的概率 $P\{[-\varepsilon_1, +\varepsilon_1]\}$ 为

$$\begin{aligned} P\{-\varepsilon_1 \leq \varepsilon \leq +\varepsilon_1\} &= P\{|\varepsilon_1| \leq \varepsilon\} = \int_{-\varepsilon_1}^{+\varepsilon_1} \phi_{0, \sigma}(\varepsilon) d\varepsilon \\ &= 2 \int_0^{+\varepsilon} \phi_{0, \sigma}(\varepsilon) d\varepsilon \end{aligned} \quad (1-4)$$

设 $\varepsilon = k\sigma$, 则 $k = \varepsilon/\sigma$, 于是上式变为

$$\begin{aligned} P\{|\varepsilon| \leq k\sigma\} &= P\{|\varepsilon/\sigma| \leq k\} = 2 \int_0^{+\varepsilon} \phi_{0, \sigma}(\varepsilon) d\varepsilon \\ &= 2 \int_0^k \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{\varepsilon^2}{2\sigma^2}\right] d\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) \end{aligned}$$

设 $\varepsilon/\sigma = t$, 则得

$$\begin{aligned} P\{|\varepsilon| \leq k\sigma\} &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^k \exp\left[-\frac{t^2}{2}\right] dt \\ &= \text{erf}(k) \end{aligned} \quad (1-5)$$

人们称 $\text{erf}(k)$ 为误差函数, 只要知道了 k , 就可以从专门的误差函数表查取。

按式(1-5)求得的概率为不发生的安全概率, 而它的补集 $\neg P\{|\varepsilon| \leq k\sigma\}$ 才是发生概率

$$\neg P\{|\varepsilon| \leq k\sigma\} = 1 - P\{|\varepsilon| \leq k\sigma\} \quad (1-6)$$

三、几个值得深思的问题

经典误差理论的有些数学假设是无法在实践中做到的, 因此, 不得不提出来供从事测量实践工作的人们考虑。

(1) 观测次数 $n \rightarrow \infty$ 在生产实践中既不可能做到, 又没有必要这么做。在电子测量技术高度发展的今天, $n \rightarrow \infty$ 这一假设显得就更没有必要。

(2) 众多的实践已明确指出, 测量误差不仅有偶然误差, 而且还有不可忽视的系统误差。特别应指出的是, 可变系统误差是个区间数, 既不可剔除, 又不可避免, 显然“测量误差只有偶然误差, 系统误差可以剔除”的假设是不全面的。

(3) “算术平均值 $\bar{x}$ = 观测值的数学期望 = 观测值的真值”这只能是纯数学假想。在测量实践中根本就找不到这样的实例, 实践证明, 算术平均值 $\bar{x}$ 是有误差存在的, 这个误差且又是系统误差。基于这种原因, 就不得不对白塞尔公式的正确性提出疑问。

(4) 经典误差理论既然假设其误差服从高斯正态分布规律, 误差是偶然事件, 那么就应按概率事件和概率规律来分析测量误差事件的归属。概率随机性: “事件在出现与不出现上表现出来的不确定性”。而测量误差是测量的必然产物, 显然用概率规律表示必然事件的分布规律过于勉强。

(5) 工程测量是计量学的一个分支,两者有共同的误差理论——高斯误差理论。随着科学的发展,人类的认识水平在不断地提高。计量学认为,由于人的认识能力的不足,人的认识往往带有一定的不确定性,认识结果带有不确定度。自从1970年开始,一些学者逐渐使用不确定度一词;由于各国的评定方法不一样,评定结果不一致,使得各国在互相利用成果时极为困难,并对各国测量成果的对比造成很大不便。为扭转这种被动局面,国际计量局1980年提出了实验不确定度建议书INC-1,从而使不确定度的研究进入了新阶段。但是,工程测量的误差表述工作仍滞留在1927年以前的水平上。这表明工程测量在国际标准化方面同计量学存在着较大的差距。

(6) 在工程测量方面,只用概率密度函数式(1-1)表达偶然误差分布规律;在计量学方面,除用式(1-1)外,还用式(3-15)表达系统误差的分布规律。由于式(1-1)和式(3-15)的概率合成尚属国际难题,因而使得可测与不可测不确定度的总合成了当前的国际难题。

因此,我们认为世界各国的测量学者们提出各式各样的疑问并不偶然;相反却告诫人们,经典误差理论尚存在严重的不切实际的重大问题,要求人们为解决这些问题而努力工作。本课题就是为完成这一历史使命的一个尝试。为此,将在下一节对现存问题作出全面揭示,目的是让人们真正认识到经典误差理论的不足,树立起创立新误差理论的紧迫感。

§ 1.2 研究新误差理论的迫切性与必要性

一、时代的发展迫切要求有新型误差理论与之相适应

近30年来,科学技术的飞速发展,宇宙航天技术的出现,电子技术的普及,标志着科学已进入复杂的“大系统”时代。“大系统”是本世纪70年代控制论提出的特有概念。与之相应的是“大测量系统”。“大系统”的大字不是指系统大小,也不是指体积和范围的大小,而是指系统的复杂程度。“大系统”是一个由为同一目标而联合起来的且又具有内在联系的子系统构成的集合。“大系统”理论是为解决系统工程问题而诞生的,它专门研究“大系统”中整体与局部、整体与外界环境之间的相互关系,达到最佳控制的目的。因此,“大系统”理论对测量工程也是非常必要的。

表达系统的较好方式是集合。集合论是1870年前后由德国数学家康托创立的。集合论一出现,几乎就涉及到了一切数学分支,并成为现代数学的重要理论基础。由于高斯理论比集合论和“大系统”理论出现得早,所以当时不可能纳入集合论和“大系统”的理论范畴予以研究。正因为如此,才使得在现代科技条件下出现的误差问题无法按经典的高斯理论解释清楚,当然就更谈不上指导实践。这就是历史发展的必然结果。时代的发展迫切需要误差理论跟上时代的脚步,建立起适应多种条件的理论。

二、测量实践迫切需要建立一个理论与实践相一致的误差理论

科技水平的飞速提高,生产建设事业对工程测量的精度要求也随之提高。测量实践迫切需要建立理论与实践相一致的误差理论。

1. 经典误差理论低效性的具体表现

由于井下生产条件限制，多数生产矿井的井下测量控制系统无法布设成附合导线形式，只能采用复测支导线。所以开滦煤矿就针对支导线进行了研究，井下导线布设示意图如图4—13所示。为研究井下支导线的测量误差分布规律，事先通过地面测得了V—173点的坐标和V—173~V—172边的坐标方位角。然后再从井口定向基点V—101A起向V—173点布设4.8公里的复测支导线，共实测三遍6次。6次观测值与已知的坐标和方位角相减，即可由表4—7求得6对坐标闭合差和6个方位角闭合差，数据列于表1—1中。

为便于对比分析，在实测前按规程规定作了误差预计，置信限取 $K=2$ ，置信概率为95.5%。预计的终点点位中误差为 ± 0.367 米。点位极限误差为0.734米。

实 测 误 差 分 析 表

表1—1

测量遍数	次 号	方位角		坐标x		坐标y	
		$\Delta\alpha$	闭合差w	Δx	闭合差	Δy	闭合差
第一遍	1	29"	+2'46"	0.314	+0.592	0.451	-1.594
	2		+3'15"		+0.906		-2.045
第二遍	1	1'14"	-0'20"	0.120	-0.132	0.449	-0.029
	2		-1'34"		-0.252		+0.420
第三遍	1	12"	-2'59"	0.358	-1.344	0.399	+1.915
	2		-2'47"		-0.986		+1.516

从表1—1的实测误差结果得出如下分析结论：

①两次的方位角互差 $\Delta\alpha$ ，坐标互差 Δx 、 Δy 均很小，它们与闭合差的差别却很大。因此两次测量间的互差小只能说明测量重复性好，不能代表真正的测量误差，更不能作为极限误差对待。

②从表的4、6、8栏的结果可发现：同一遍两次测量的实际闭合差多数具有相同的符号，其数值大小不同，呈可变系统性。

③同一遍两次测量的均值误差介于最大、最小闭合差之间，因此用它不可能减小误差，更不能剔除或削弱系统误差影响；算术平均值的误差并不随测量次数增加而减小。

④虽然置信概率比较高，但由于系统误差的存在使得预计结果不可靠。在极限误差0.734米估值范围内的误差只占41.7%，失控率达58.3%，充分说明置信概率95.5%是失效的；经典误差理论的不可克服的毛病是不能预计误差出现的符号。

综合上例则不难看出，经典误差理论的低效性主要表现在对系统误差的辐射上。

2. 经验公式的出现标志着经典误差理论的不完善性

实践是检验真理的唯一标准。1809年高斯误差理论诞生，经过120年的实践和应用

检验,人们首先在导线测量工作中发现了问题,因为当时在德国导线测量应用最频繁,数据也最多,最引人注目。人们发现只按偶然误差理论的“边长测量中误差随边长的平方根增长”的论断,是不能正确估算出量长误差的。所以在1928年德国的测量咨询委员会建议采用下列经验公式估算导线纵向允许误差(I级导线) [8]

$$f_{1\text{允}} = 0.002\sqrt{[S]} + 0.0003[S] + 0.05 \quad (1-7)$$

式中: 0.002为量边偶然误差影响系数; 0.0003为量边系统误差影响系数; 0.05为量边系统误差加常数; $[S]$ 为导线边长总和。

在经验公式里除增加了系统误差影响系数外,还增加了个加常数,正如文献[8]指出的那样,量边偶然误差理论只适用于如下情况:“使用短距的5.0米板尺和20米带尺,一尺一尺地连续量边时,误差传播定律使用才有效。当采用长钢尺或使用横基尺以及使用光电测距仪时,原有的误差传播定律就要失效,应采用新的有效定律”。“人们必须提出完全不同的误差分布函数”。文献[8]还指出:“当采用光电测距仪测距时,边长在1公里到几公里的长度范围内,边长的长度误差与边长的长度看不出线性变化关系,几乎不变。通过实测导线资料分析,明显地看出导线的权并不决定于它的长度”。

基于上述原因,前联邦德国的测量专业管理部门提出:光电测距导线的测距误差只包含与长度无关的常数误差,并且测角误差一般很小。对于这类导线,建议采用下列公式估算有关的允许误差

$$\begin{aligned} f_{\beta\text{允}} &= 0.6'' + 0.2''\sqrt{n} && \text{(角度)} \\ f_{1\text{允}} &= 0.10 + 0.10\sqrt{n-1} && \text{(米,纵向)} \\ f_{q\text{允}} &= 0.10 + 0.07 S && \text{(米,横向)} \end{aligned} \quad (1-8)$$

式中: S 为导线首端和终端连线长度,以公里为单位。

前苏联于1937年也提出了类似于式(1-7)的经验公式。

在中国,有的主张采用前苏联的经验公式,也有的根据实测资料总结出自己的经验公式。例如:1966年2月测绘出版社出版的《(地质勘探专业)1:1000、1:2000、1:5000比例尺地形测量规范草案》说明提出如下经验公式

$$\frac{\Delta S}{S} \approx \frac{2}{3} \frac{m_s}{S} \quad (1-9)$$

式中: ΔS 为往返测边长的互差; S 为导线的边长; m_s/S 为边长丈量相对中误差。

开滦矿务局的实践充分证明式(1-9)是行之有效的。

随着科学事业的发展,陀螺仪定向被广泛应用。为计算陀螺仪定向中误差,有关教科书和文献提出了如下公式

$$M_{\alpha} = \pm \sqrt{\frac{m_T^2}{n_T} + \frac{m_{\Delta}^2}{n_T n_{\Delta}}} \quad (1-10)$$

式中: m_{Δ} 为按白塞尔公式计算的仪器常数一次测定中误差; m_T 为按白塞尔公式计算的定向边一次定向中误差; n_{Δ} 为仪器常数测定次数; n_T 为定向边的测定次数。

按照式(1-10)得出的结论:仪器常数测定次数 n_a 越多,定向边测定次数 n_T 越大,定向误差就越小。所以有的人依照此种理论提出:用出厂精确度为 $60''$ 的陀螺仪可取得 $\pm 2''$ 和 $\pm 5.4''$ 的定向精确度。针对这个问题,淮南矿务局地测处自1980年9月至1981年1月,历时4个月专门进行了实验。

在经典误差理论中,人们常用下式表达均值的中误差 M 与测量次数 n 之间的关系

$$M = \pm \frac{m_a}{\sqrt{n}} \quad (1-11)$$

式中: m_a 为实际的一次测量中误差。

实验是这样做的:在一条已知方位边(该边方位角中误差为 $\pm 1.33''$)上,用WILD20806、WILD25466两台陀螺仪分别进行定向测量,加仪器常数改正后,视为无系统误差,求得不同测定次数时的各观测值 x 。数据处理时,把已知方位值视为真值 X ,则真误差 $\Delta = x - X$,按下式计算不同测定次数情况下的一次定向中误差

$$m_a = \pm \sqrt{\frac{[\Delta\Delta]}{n}} \quad (1-12)$$

实际的定向测量误差 m_a 列于表1-2中。

实 测 定 向 误 差 统 计 表

表1-2

实测误差	测定次数 仪器	1	2	3	4	5	6
m_a	WILD20806	9.09	7.20	6.63	6.24	6.06	5.86
m_a	WILD25466	11.23	9.26	8.50	8.06	7.80	7.62

为对实测误差式(1-12)和理论误差式(1-11)进行比较,设 $m_a = m_{a1}$ (表中的9.09和11.23),按式(1-11)计算均值的理论中误差 M 。为清楚起见,绘出曲线图,如图1-5所示。

实测结果表明:实际的陀螺定向误差并不是像理论曲线表示的那样,随测量次数的增多而逐渐减小,而是当测定次数一定时趋近某一数值,这个数值就是仪器的正确度 b 。由于经典理论与实际不相符,所以淮南矿务局地测处为弥补其不足,推出了自己的经验公式

$$m_{a1} = \pm m_0 \cdot n^{-0.25} \quad (1-13)$$

实践证明单靠经典的偶然误差理论公式是无法满足人们的实际需要的,所以出现经验公式是很自然的。经验公式出现的本身就是对经典误差理论的补充,是经典误差理论不完善性的具体表现。

3. 生产测量中矛盾现象的出现,标志着经典误差理论存在的不严密性

经典误差理论的不严密性主要表现在中误差概念的含混上,概念的含混导致了中误

差定义方式的多样性，因而使得经典误差理论具有同一的名称，而无一致的含义。

据称：中误差是描述观测值的一个主要指标，经典误差理论提出了以下两个主要中误差计算式：

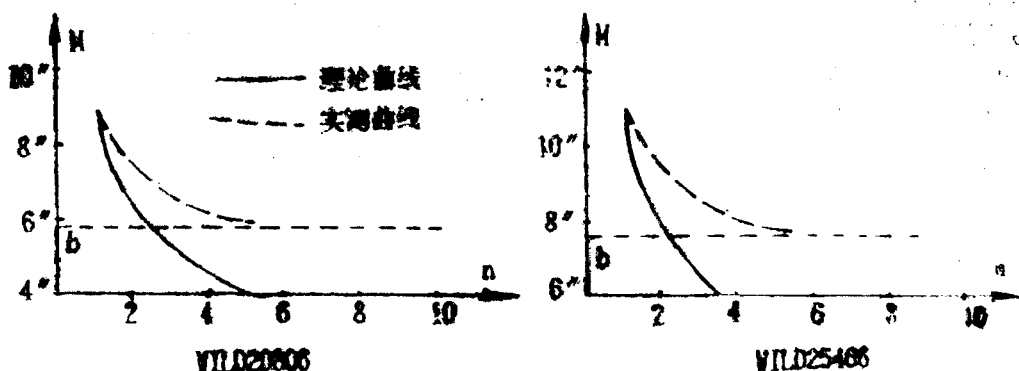


图 1—5 误差对比曲线

理论 1 高斯误差式

设： x_1 为观测值， X 为观测值的真值， $\Delta_1 = x_1 - X$ 为偶然真误差。

则真误差集合： $\Delta = \{\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \dots, \Delta_n\}$ 。

则高斯中误差公式

$$m = \pm \sqrt{\frac{[\Delta\Delta]}{n}} \quad (1-14)$$

理论 2 白塞尔公式

由于真值 X 不好求，所以后来就有人提出把由观测值集合的观测值求得的算术平均值 $\bar{x}$ 作为真值的最佳估值

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (1-15)$$

这样就改变了高斯的原意，构成了一个新的离散误差集合 $\dot{V}$ 为

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \{(x_1 - \bar{x}), (x_2 - \bar{x}), \dots, (x_n - \bar{x})\} \\ &= \{\dot{v}_1, \dot{v}_2, \dots, \dot{v}_n\} \end{aligned}$$

式中的 $\dot{v}_1 = \bar{x} - x_1$ 实为相对均值的离散误差。从而导致白塞尔 (Bessel) 公式的出现

$$m = \pm \sqrt{\frac{[\dot{v}\dot{v}]}{n-1}} \quad (1-16)$$

理论含混的焦点就在于“经典误差理论”把均值 $\bar{x}$ 作为真值 X 。从而混淆了误差划分的界限，必然导致定义方式的多样性。为此，必须弄清高斯误差式与白塞尔公式的根本区别，下面列举一些由概念含混造成矛盾的事例。

(1) 角度测量工作中出现的矛盾事例

由于测角仪器不断改进, 逐渐向精密化发展, 测角时采取的各种措施也相当严密, 所以人们常常误认测角系统误差很小, 常被忽略。事实恰恰相反, 测角系统误差不仅存在, 而且影响测量成果。其特点是难以发现, 难以消除, 只有在平差计算完毕后才能暴露出来。为弄清真相, 作者收集了不同条件下的测角实例。

① 井下控制导线

在工程测量工作中, 常用的求定测角中误差 m_{β} 的方法有以下两种:

(a) 用角度两次观测值互差 d 求 m_{β}

$$m_{\beta} = \pm \sqrt{\frac{[dd]}{2n}} \quad (1-17)$$

(b) 用 N 条导线的角度闭合差 f 求 m_{β}

$$m_{\beta} = \pm \sqrt{\frac{\left[\frac{ff}{n}\right]}{N}} \quad (1-18)$$

式中: n 为某条导线角度的个数; N 为导线的条数。

例1 表1—3列有8条井下7"闭合导线的有关数据, 这8条导线共有447个水平角, 每个水平角均测量了两次, 两次互差为 d 。

按式(1—17)求得测角中误差 $m_{\beta_2} = \pm 4.4''$, 按式(1—18)求得测角中误差 $m_{\beta_1} = \pm 6.0''$ 。

闭 合 导 线 的 有 关 数 据 表

表1—3

环 号	角度个数	闭合差 f	$f \cdot f$	备 注
1	8	31"	961	$m_{\beta_1} = \pm \sqrt{286.9/8}$ $= 6.0''$
2	37	42"	1764	
3	9	14"	196	
4	52	10"	100	
5	66	51"	2601	
6	63	54"	2916	
7	161	41"	1681	
8	46	11"	121	

显而易见两者之间的差别是不小的。其原因是: 对同一台仪器, 仪器的正确度 b 相同, 所以求互差时 d 中的正确度(系统误差)已互相抵消, 只剩部分偶然误差; 而闭合差 f 是真误差, 包含误差较全面, 所以 $m_{\beta_1} > m_{\beta_2}$ 。

② 大地测量工作中的问题

通常用菲列罗公式计算测角中误差