关于"作圓与已知圓、直綫或零圓相切"問題的探討

底鍾英著

河南人民出版社

內容提要

本書的主要內容是研究几何学中：关于“作圓与已知圓、直綫或零圓相切”問題的探討。作者將这一問題的全部作圖題按已知条件分为三种类型，以十个大問題進行系統而細致的分析研究。研究的目的除了明确它們的作法外，重点放在对它們的討論。在研究中也联系了中学几何課中的許多作圖題，并結合中学所講授过的几何定理和基本作圖作为研究的基礎。最后，总結出为中学学生所能接受的百余个作圖題。这些作圖題中有的是中学課中已有的，有的可以作为中学生的練習題或研究題。

关于“作圖与已知圓、直綫或零圓相切”問題的探討

底鍾英著

*

河南人民出版社出版（鄭州市行政区緯五路）
河南省書刊出版業營業許可証出字第一号
地方國营鄭州印刷厂印刷　新華書店河南分店發行

*

豫总書号：771

787×1092耗1/32 · $1\frac{7}{8}$印張 · 42,500字

1957年12月第1版　1957年12月第1次印刷

印数：1—10,080册

統一書号：13105·10

定　价：0.42元

前 言

本文系我在开封师范專科学校科学研究的一篇論文。自1956年元月起，利用課余时間寫作，至年終成稿。內容包括十类“作圓切已知圓、切已知直綫或过已知点”的作圖題，再將每类問題進行討論，可導出百余个不同的作圖題。并在应用方法上，密切結合中学几何課本，但在內容方面并沒有涉及到比較高深的理論，因此，可供中等学校教师的教学参考，以及高中学生進修之用。

本書重点放在对这些作圖題的討論上。在这方面虽然下了不少工夫，也占了較大篇幅；但由于时間倉卒，書中难免有些不妥之处，悬切地希望数学教师、数学爱好者和讀者同志多多指正！

本書初次完稿时，經本校数学科几何組的同志們提供不少宝貴意見，并作了修改，特在这里表示感謝。

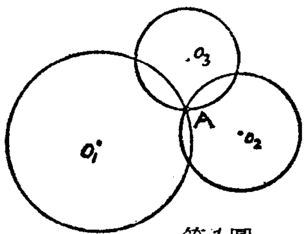
底鍾英

1957年8月于开封师范專科学校

目　　錄

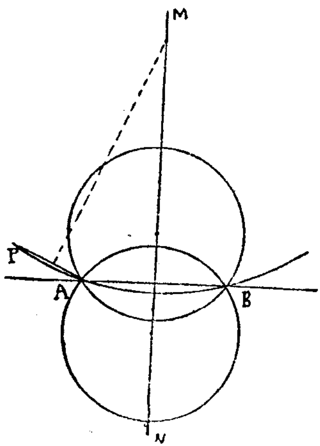
一 引 言

古希腊紀元前三世紀，一位数学家阿波罗尼曾解出一个“作一圓与三个已知圓相切”的作圖題。为了更廣泛地系統地研究这一問題，有把圓的概念加以擴大的必要。在現用的初中几何課本开始講圓的时候，首先論述过一点A作圓（如圖1），所得的結論是“这样的圓可以作無数个，并且这些圓的圓心可以任意选擇”。我們仔細



第1圖

考慮一下，如果把圓心选擇在A点，这种圓就不存在，那么“圓心可以任意选擇”的說法，就不夠嚴密。只有擴大了圓的概念，才能使这一結論無有例外。我們設想当选擇的圓心与A的距离愈近，所作出通过A点的圓就愈小，因此点A是半徑趋近于0时圓的極限狀态。**一般地說，任意一个点，都是以这点为圓心，半徑趋近于0时圓的極限狀态，也可以称做零圓。**課本上所談到过兩点A、B作圓的問題，只要以綫段AB的垂直平分綫MN上任意一点为圓心，以从这点到A或B的距离为半徑作圓就是所求的圓（如圖2）。我們再仔細考慮一下，



第2圖

在MN上选取这类圆的圆心，如果距离AB愈远，所作的圆就与直線AB愈接近，并且如果一点P在AB的臨近，無論与AB的距离如何小，总有一圆通过A、B、P，因为AP的垂直平分綫与MN必相交（与一角兩边垂直的直綫必相交），用这交点为圆心，这点到A的距离为半徑所作的圆，就是过A、B、P的圆。而且P与AB的距离愈近，这种圆的半徑就愈大。这样看来，直綫AB是半徑無限增大时圆的極限狀态。**一般來說，任意一直綫都可以看做是半徑無限增大时圓的極限狀态。**

总之，点和直綫都是圆的極限狀态。在几何学中，我們樹立了这种概念，就使許多矛盾問題得到統一。

二　問題的分类和研究的目的

我們將要投入"作一圆与已知三圆相切"問題的研究。这里已知的圆，將包括点和直綫；**而求作的圓还限于一般的圓，即是半徑为有限長且不等于零的圓。**为了把問題敍述的簡單，我們用p代表点，ℓ代表直綫，c代表圆。这一作圖題按已知条件來分类，可有以下三种类型，总共有十种不同的作圖題：

（一）三个已知条件完全相同的有以下三种：

（1）p、p、p；　（2）ℓ、ℓ、ℓ；　（3）c、c、c。

（二）三个已知条件中只有兩个相同的有以下六种：

（1）p、p、ℓ；　（2）p、p、c；　（3）ℓ、ℓ、p；

（4）ℓ、ℓ、c；　（5）c、c、p；　（6）c、c、ℓ。

（三）三个已知条件中沒有相同的只有一种：p、ℓ、c。

但是为了作圖的难易和在解法上的系統性，这十个問題的編排顺序如下:

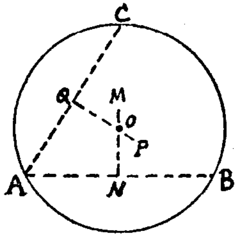
(1)p、p、p；　(2)p、p、ℓ；　(3)ℓ、ℓ、p；
(4)ℓ、ℓ、c；　(5)p、ℓ、c；　(6)c、c、ℓ；
(7)ℓ、ℓ、ℓ；　(8)p、p、c；　(9)c、c、p；
(10)c、c、c。

研究的目的：除了明确它們的作法外，重点要放在对它們的討論。这样一來，对这一問題的研究就可連系到中学几何課的許多作圖题。研究入手是建筑在中学課所学習过的定理和基本作圖的基礎上，那里学过的就認为是已有的知識，作为引用的依据。

三　作圖題

作圖題1。 **过三已知点作一圓（簡記p、p、p）。**

作法： 設A、B和C是已知三点。連AB和AC，并作它們的垂直平分綫MN和PQ，設MN和PQ交于一点O，以O为圓心，OA之長为半徑作⊙(O；OA)，这圓就是所求的圓。



第3圖

証明从略。

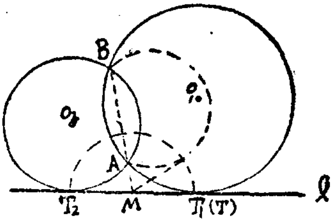
討論： 如果A、B和C不在一直綫上，本題只有唯一的解，否則無解。

作圖題2。 **过二已知点作一圓并与一已知直綫相切**

（簡記为p、p、ℓ）。

作法：过已知兩点A、B引直綫，設与已知直綫ℓ交于一点M，在ℓ上点M的兩側截取$MT_1=MT_2$并且使：

$$MT_1^2=MT_2^2=MA\cdot MB$$



第4圖

过A、B、T_1作$\odot O_1$（作圖題1），則这圓为所求的圓。

証明：按照作圖$\odot O_1$过A、B且与ℓ有一公点T_1，只須証明$\odot O_1$与ℓ切于T_1。如果ℓ与$\odot O_1$又有一公点T，則：

$MT_1^2=MA\cdot MB=MT_1\cdot MT$　$\therefore MT_1=MT$

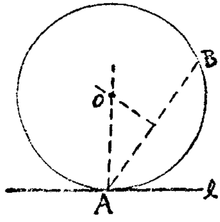
这与全量大于分量之理不合。

$\therefore$ ℓ与$\odot O_1$除T_1外不能再有公点，即ℓ与$\odot O_1$切于T_1

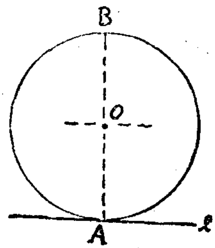
討論：

一、如果A、B兩点都在ℓ上，本題無解。

二、如果A、B兩点中只有一点在ℓ上，本題只有一解（如圖5和圖6 A在ℓ上，而AB与ℓ垂直或不垂直）。这时求作的圓的作法为：連AB并作它的垂直平分綫，与过A所引ℓ的垂綫交于O，作$\odot$（O；OA），这圓就是所求的圓。



第5圖



第6圖

三、如果A、B兩点都不在ℓ上

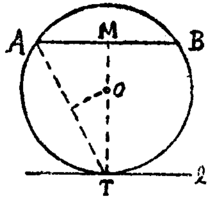
（一）当A、B在ℓ的異側时，本題無解。

（二）当A、B在ℓ的同側：

1. 直綫AB∥ℓ时本題只有一解。其作法（如圖7）为：

作AB的垂直平分綫MT交ℓ于T点，連AT，并作AT的垂直平分綫交MT于O，作⊙(O;OT)，这圓就是所求的圓。

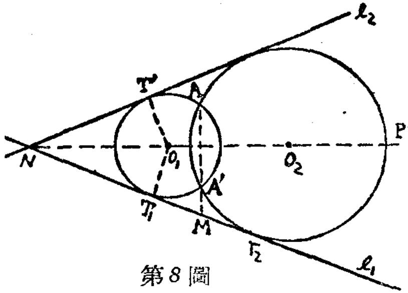
2. 直綫AB∦ℓ时，本題有二解（如圖4），⊙O_1和⊙O_2都是本題之解，而⊙O_2是过A、B和T_2的圓。



第7圖

作圖題3. 过一已知点作一圓并与二已知直綫相切（簡記为 P、ℓ、ℓ）。

作法：設二已知直綫ℓ_1和ℓ_2交于N点，作它們的交角平分綫，設其中之一如NP与已知点A在同一角的內部。以NP为对称軸作A的对称点A′，过A、A′作⊙(O_1；O_1T_1)和⊙(O_2；O_2T_2)与ℓ_1相切于T_1和T_2（作圖題2），則这兩圓是所求的圓（如圖8）。



第8圖

証明：依照作法⊙(O_1；O_1T_1)既然过A且与ℓ_1切于T_1，只須証明这圓与ℓ_2也相切。自O_1向ℓ_2引垂綫O_1T'。因为⊙(O_1；O_1T_1)过A和以NP为軸的A的对称点A′，那么O_1点必在NP上，所以$O_1T_1=O_1T'$，所以⊙(O_1；O_1T_1)必与ℓ_2相切。同理可証⊙(O_2；O_2T_2)也是所求的圓。

討論：

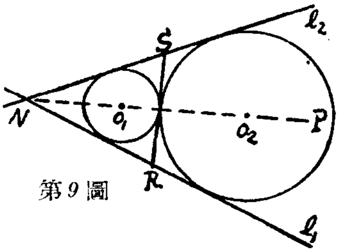
一、如果ℓ_1和ℓ_2为相交直綫

（一）当A在它們的交点时，本題無解（因为这时求作的

圓，縮为一点）。

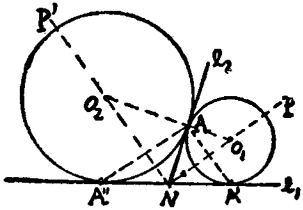
（二）当A不在它們的交点时，本題有二解。因为这时A所在的位置可分为兩种情形：

1.如果A在ℓ_1和ℓ_2交角的內部（如圖8），⊙（O_1；O_1T_1）和⊙（O_2；O_2T_2）是本題的兩解；不过当A在NP上时，所求作的圓（如圖9）的作法为：过A引NP的垂綫交ℓ_1和ℓ_2于R和S，作△RNS的內切圓和在∠RNS內的傍切圓，則它們都是所求作的圓。



第9圖

2.如果A在ℓ_1或ℓ_2上（卽不在它們交角的內部，（如圖10），A在ℓ_2上，过A作ℓ_2的垂綫与ℓ_1和ℓ_2二交角平分綫NP和NP′交于O_1和O_2，作⊙（O_1；O_1A）和⊙（O_2；O_2A），这兩圓皆为所求的圓。

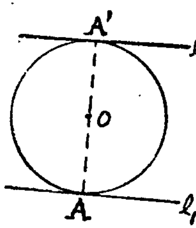


第10圖

二、如果ℓ_1和ℓ_2为二平行直綫

（一）当A在ℓ_1和ℓ_2的外面，本題無解。

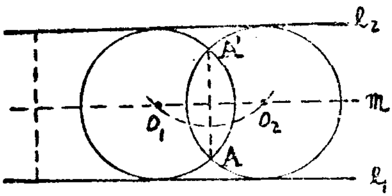
（二）当A在ℓ_1或ℓ_2上，本題只有一解（如圖11）。A在ℓ_1上，过A作ℓ_1和ℓ_2的公共垂綫AA′，平分AA′于O，作⊙（O；OA），这圓就是本題的一解。



第11圖

（三）当A在ℓ_1和ℓ_2之間（如

圖12)，作ℓ_1和ℓ_2的公垂綫并通过它的中点作ℓ_1和ℓ_2的中平行綫m，以m为对称軸作A的对称点A′，过A、A′作⊙(O_1; O_1A)和⊙(O_2: O_2A)都与ℓ_1相切，这兩圓都是所求的圓(如果我們把兩平行綫ℓ_1和ℓ_2看成交角为0°的兩直綫，則直綫m就是它們交角之一的平分綫。这时圖12就是圖8的特殊情形)。

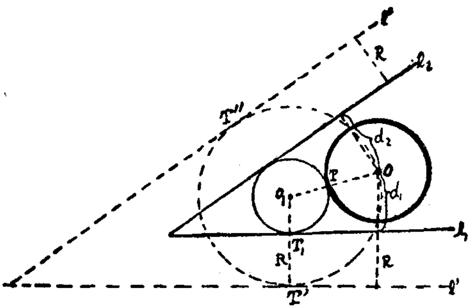


第12圖

作圖題4。 作一圓与二已知直綫和一已知圓都相切(簡記为ℓ、ℓ、c)。

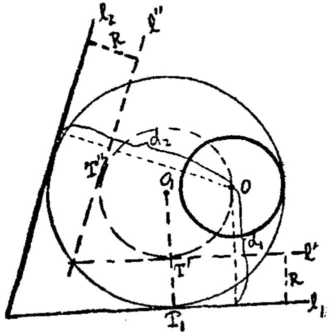
作法： 設已知⊙(O; R)的圓心O到已知二直綫ℓ_1和ℓ_2的距离分别为d_1和d_2

一、分别平移ℓ_1和ℓ_2到ℓ'和ℓ''使与O的距离分别为d_1+R和d_2+R(如圖13)；作⊙(O_1; R_1)过O点并与ℓ'和ℓ''相切于T′和T″(作圖題3)，作⊙(O_1; R_1-R)，这圓就是所求的圓。



第13圖

二、如圖14分别平移ℓ_1和ℓ_2到ℓ'和ℓ''使与O的距离分别为d_1-R和d_2-R，作⊙(O_1; R_1)过O点并与ℓ'和ℓ''相切（作圖題3），作⊙(O_1; R_1+R)，这圓就是所求的圓。



第14圖

証明：

一、連O_1T'交ℓ_1于T_1，

$\because O_1T' \perp \ell'$，$\therefore O_1T' \perp \ell_1$。

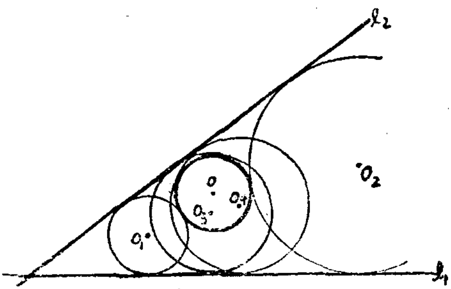
$\because$ $TT'=R$（根据作法兩平行綫ℓ_1和ℓ'間距离为R）

$\therefore$ $O_1T_1=OT'-T_1T'=R_1-R$，$\therefore$ ⊙(O_1; R_1-R)与ℓ_1切于T_1，同理⊙(O_1; R_1-R)与ℓ_2也相切。連O_1O交⊙(O; R)于T，則$O_1T=O_1O-TO=R_1-R$，$\therefore$ ⊙(O_1; R_1-R)与⊙(O; R)切于T。作法二之証明与此相仿。

討論：

一、如果ℓ_1和ℓ_2是相交二直綫。⊙(O; R)与这二直綫的关系可分为以下六种：

（一）当⊙(O; R)与ℓ_1和ℓ_2都無公点，則本題有四解（如圖15），適合条件的圓与⊙(O; R)互相外切和内切的都有兩个。

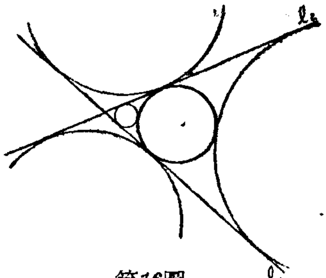


第15圖

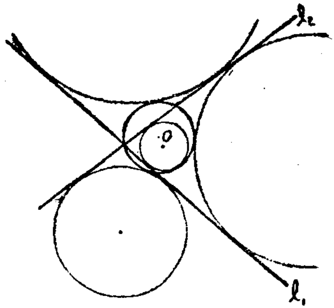
（二）当⊙(O; R)与ℓ_1和ℓ_2都相切，本題有四解。

适合条件的圆与⊙（O；R）都互相外切（如圖16）。

（三）当⊙（O；R）与ℓ_1和ℓ_2都相交，又可分为兩种情形：



第16圖



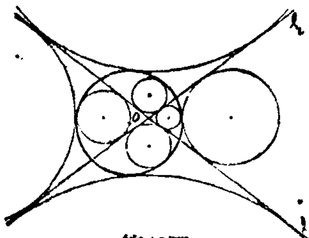
第17圖

1. 当⊙（O；R）过ℓ_1和ℓ_2的交点时，本题有四解（如圖17）。适合条件的圆与⊙（O；R）互相外切的有三个，互相内切的有一个。

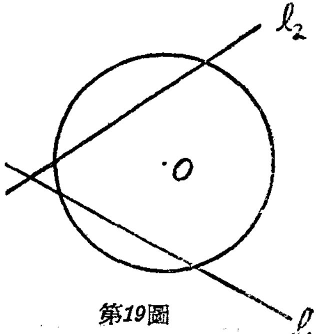
2. 当⊙（O；R）不过ℓ_1和ℓ_2的交点时，本题有八解。

（1）如果ℓ_1和ℓ_2的交点在⊙(O；R)的内部(如圖18)，則适合条件的圆与⊙（O；R）互相内切和外切的都是四个。

（2）如果ℓ_1和ℓ_2的交点在⊙(O；R)的外部(如圖19)，則适合条件的圆与⊙(O；R)互相内切的有二个，互相外切的有



第18圖

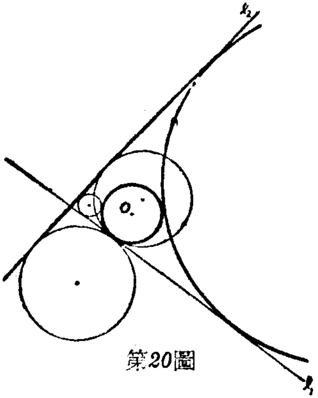


第19圖

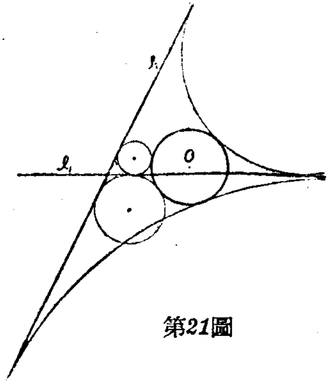
六个（圖中沒画出求作的圓）。

（四）当⊙（O；R）与ℓ_1和ℓ_2中的一条無公点而与另一条相切，則本題有四解（如圖20），適合条件的圓与⊙（O；R）互相外切的有三个，互相內切的有一个。

（五）当⊙（O；R）与ℓ_1和ℓ_2中的一条無公点，而与另一条相交，則本題有四解（如圖21）。適合条件的四圓，都与⊙（O；R）互相外切。



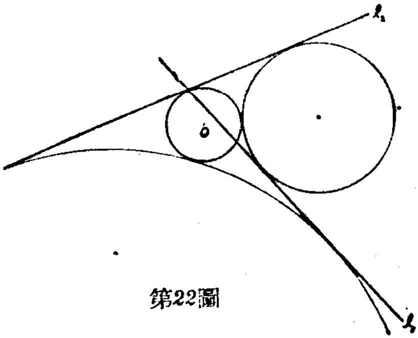
第20圖



第21圖

（六）当⊙（O；R）与ℓ_1和ℓ_2中的一条相切，而与另一条相交，又可分为兩种情形：

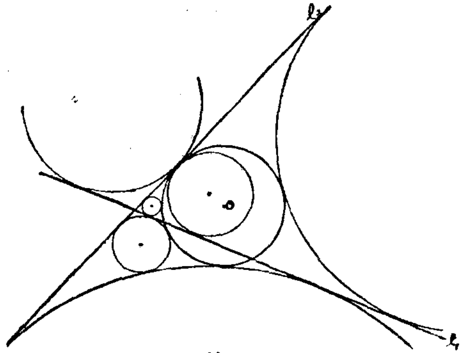
1. 如果切点是ℓ_1和ℓ_2的交点，則本題有兩解（如圖22）。適合条件的兩圓，都与⊙（O；R）互相外切。



第22圖

2. 如果切点不是ℓ_1和ℓ_2的交点，則本題有六

解（如圖23），適合條件的圓，与⊙(O；R）相互內切的有一个，相互外切的有五个。



第23圖

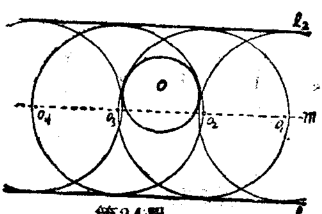
二、如果 ℓ_1 和 ℓ_2 是平行直綫:

（一）当⊙(O；R) 与 ℓ_1 和 ℓ_2 都無公点时，又可分兩种情形:

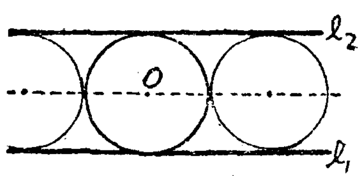
1. 如果⊙（O；R）在 ℓ_1 和 ℓ_2 的外部，則本題無解。

2. 如果⊙（O；R）在 ℓ_1 和 ℓ_2 的中間，則本題有四解（如圖24)。適合条件的圓，与⊙（O；R）互相內切和外切的都有兩个。它們的作法是：作 ℓ_1 和 ℓ_2 的中平行綫m，設m和 ℓ_1，ℓ_2 間之距离为d，以O为圓心，以d＋R和d－R为半徑分別画弧各交m于 O_1 和 O_2，作⊙（O_1；d）和⊙（O_2；d），則这兩圓分別外切和內切于⊙（O；R）且都与 ℓ_1 和 ℓ_2 相切。其余兩圓的作法同于这兩圓的作圖。（把 ℓ_1 和 ℓ_2 看做交角为0°的二直綫，也可按照本題作法完成求作的圓）。

（二）如当⊙（O；R）与 ℓ_1 和 ℓ_2 都相切，則本題有兩解（如圖25）。適合条件的二圓都与⊙（O；R）互相外切。

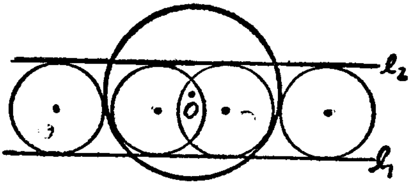


第24圖



第25圖

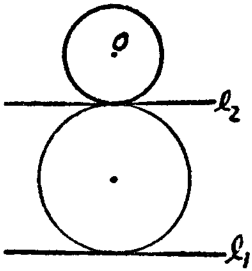
（三）当$\odot$(O；R)与ℓ_1和ℓ_2都相交，則本題有四解（如圖26）。適合条件的四圓，与$\odot$(O;R)互相內切和外切的都有兩个。



第26圖

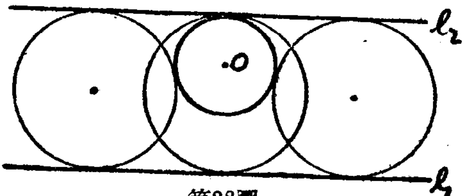
（四）当$\odot$（O；R)与ℓ_1和ℓ_2中的一条無公点，而与另一条相切，又可分为兩种情形:

1. 当$\odot$（O；R）在ℓ_1和ℓ_2的外部，則本題有一解（如圖27）。適合条件的一圓与$\odot$（O; R）互相外切。



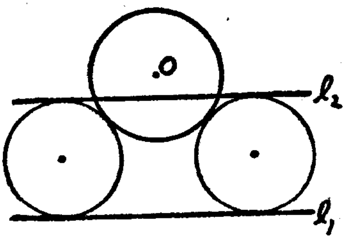
第27圖

2. 当$\odot$（O；R）在ℓ_1和ℓ_2之間，則本題有三解(如圖28）。適合条件的圓，与$\odot$（O；R）互相內切的有一个，互相外切的有二个。



第28圖

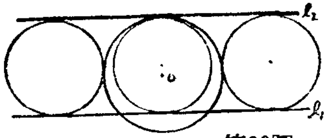
（五）当$\odot$(O；R)与ℓ_1和ℓ_2中的一条無公点而与另一条相交，則本題有二解（如圖29）。適合条件的二圓都与$\odot$ (O；R) 互相外切。



第29圖

（六）当$\odot$ （O；R）与ℓ_1和ℓ_2中的一条相切，

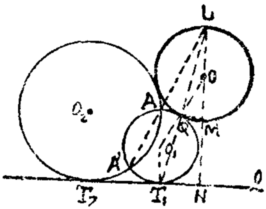
而与另一条相交則本題有三解（如圖30）。適合条件的圓与⊙（O；R）互相内切的有一个，互相外切的有兩个。



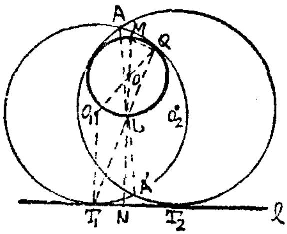
第30圖

作圖題5. **过一已知点作一圓与已知直綫和已知圓都相切（簡記为 P、ℓ、c）**

作法：如圖31和32过已知圓⊙（O；R）的中心O，向已知直綫ℓ引垂綫交⊙（O；R）于L和M，交ℓ于N。



第31圖



第32圖

过L和A引直綫，在这直綫上取一点A′使適合LA·LA′＝LM·LN并且A和A′在L的同側或異側依照M和N在L的同側或異側來決定（已知三綫段可作它們的比例第四項）。

过A、A′作⊙（O_1；O_1A）和⊙（O_2；O_2A）与ℓ相切于T_1和T_2（作圖題3）。

則这兩圓即为所求的圓。

証明：連LT_1交⊙（O_1；O_1A）于Q，連QM，

則$LQ \cdot LT_1 = LA \cdot LA' = LM \cdot LN$

∴　$LQ : LN = LM : LT_1$

∴　$\triangle LQM \sim \triangle LNT_1$（兩双边成比例夾角相等）