朱功勤　顾传青　檀结庆　著

多元有理逼近方法

THE METHODS FOR MULTIVARIATE RATIONAL APPROXIMATION

$$b_0+\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}+\cdots+\frac{a_n}{b_n}$$

中国科学技术出版社
·北　京·

多元有理逼近方法

朱功勤　顾传青　檀结庆　著

安徽建筑大学
藏書
图书馆

中国科学技术出版社

· 北京 ·

图书在版编目(CIP)数据

多元有理逼近方法　朱功勤等著. 北京:中国科学技术出版社,1996

ISBN 7－5046－2171－4

Ⅰ. 多…　Ⅱ. 朱…　Ⅲ. 多元－有理函数－函数逼近论
Ⅳ. 0174.41

中国版本图书馆 CIP 数据核字(96) 第 01799 号

多元有理逼近方法

朱功勤　顾传青　檀结庆　著

责任编辑:张秀智　黄　冰

特约编辑:席庆义

*

中国科学技术出版社出版

北京海淀区白石桥路 32 号　邮政编码:100081

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

合肥工业大学印刷厂印刷

*

开本:850×1168 毫米　1/32　印张:8.75 字数:225 千字

1996 年 7 月第 1 版　1996 年 7 月第 1 次印刷

印数:1—800 册　　定价:15 元

内容提要

本书系统地介绍了二元有理函数插值与逼近的理论与计算方法，内容包括：二元向量值函数有理插值与逼近；多元 Padé 逼近及有理插值；多元有理样条插值理论与方法等，本书可供从事非线性逼近的科学技术工作者、大学高年级学生、硕士与博士研究生阅读，或作为参考书使用。

序

在自然科学与社会科学中存在着大量的亟待解决的非线性问题·它们业已成为科学技术研究中的热点和主攻方向。

诚如英国著名哲学家与数学家罗素(**Bertrand Russell**)所说:"所有精确的科学都受逼近的思想所支配。"确实,所有的非线性科学也受到、或将受到非线性逼近的思想的影响。如果说,经过几代数学家的共同努力,线性逼近问题的研究已经基本成熟的话,那么非线性逼近问题的研究就显得不很成熟了。至于多元非线性逼近方面的研究则就更显幼嫩了。为使我国有更多的科学技术工作者能够比较顺利地步入非线性逼近研究的前沿,急需有一本著作来介绍多元非线性逼近的已有成果。遗憾的是,至今国际上尚无一本这样的著作可为我们所采用。

合肥工业大学朱功勤教授领导的研究集体10多年来一直坚持从事有理逼近的研究,他们在多元非线性逼近方面也开展了卓有成效的研究工作,并已取得一批有意义的成果。他们在分析、总结向量值函数插值与逼近、二元**Padé**逼近以及多元有理样条插值等方面已有成果的基础上写成了本书,其中不乏著者们及其研究集体的研究成果。

我相信本书的出版将为大学高年级学生、硕士、博士研究生,以及科学技术工作者深入了解,灵活运用以及进一步从事多元非线性逼近的研究等提供理想的前提。

谨此作序

王仁宏

1995年8月27日于大连

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

前　言

有理函数是属于简单函数类，它比多项式复杂，但用它近似表示函数时，却比多项式灵活，更能反映函数的一些特性，所以近20年来人们在数值逼近、函数近似表示、计算机几何辅助设计中更偏爱有理函数。随着科学技术的发展，非线性数学具有强大的生命力。作为非线性数学的重要分支之一的有理逼近方法，已在实际应用中显示出巨大优势和开发潜力。但由于有理逼近比多项式逼近复杂得多，所以有关这方面的研究还不够深入，王仁宏教授所著《数值有理逼近》一书，对一元有理逼近理论与方法作了较全面的论述，对推动我国有理逼近方面的研究起了重要作用。徐献瑜教授等所著《Padé 逼近概论》一书，只对一元 Padé 逼近作了介绍。至于多元有理逼近理论与方法的专著则是更少见。我们在近几年研究工作的基础上，撰写了这本著作，是想推动学术界在这方面的研究。

本书内容共三章：第一章介绍向量值函数插值与逼近，给出二元向量连分式有理插值理论与方法，建立多元分叉连分式的特征定理及正规网格上向量有理插值的对偶定理等。第二章主要讲二元 Padé 型逼近的算法及收敛性，为使读者在不具备经典 Padé 逼近的有关知识情况下，也能阅读本章，为此，只介绍 Newton—Padé 逼近，并给出一类有理插值公式。第三章着重介绍多元有理样条插值，其中包括多元有理样条函数定义、表现形式、插值多元有理样条存在条件等。本书第一章§2～§5、§9、§11 由顾传青执笔，第一章§6～§8 第二章§6、§8 及第三章由檀结庆执笔，其余由朱功勤执笔，并由朱功勤最后定稿。

本书的撰写得到王仁宏教授的鼓励和大力支持，他在百忙中抽出时间审阅全书，提出了宝贵的意见。并为本书撰写了序。在此我们表示衷心的感谢。由于著者水平有限，加上资料不足，难免出现不妥甚至谬误，恳请读者批评指正。

本书在完成过程中得到合肥工业大学、安徽工学院领导的关怀和支持，席庆义编审和黄冰副编审给予了很多帮助。中国科学技术出版社为本书出版给予了大力支持，在此表示衷心感谢。

本书在完成过程中，得到国家自然科学基金的部分资助。

著　者

1995 年 9 月于合肥

目　录

第一章　向量有理插值方法

向量值函数有理插值（简称向量有理插值）问题是 *Wynn* 于 1963 年提出的，他注意到：若将 ε 一算法应用到向量上并实施 Samelson 逆变换，就能得到如同数量一样的精确结果。Graves－Morris 从 1983 年起在实用背景（如机械振动数据分析等）下较系统地研究了一元向量有理插值问题[84]－[86]建立了一些插值理论与方法。笔者从 1990 年起将一元的有关结果成功地推广到多元情形，得到了一些有应用价值的结果。本章扼要介绍一元向量值函数插值概念及方法，重点介绍二元向量值函数的各种有理插值理论与方法。

§1　一元 Thiele 向量有理插值

设由不同点组成的点集为 $\pi_x^n=\{x_i\,|\,i=0,1,\cdots,n,x_i\in R\}$ 和对应的由有限值待插向量组成的集为 $\{\mathbf{V}_i\,|\,i=0,1,\cdots,n,\mathbf{V}_i=\mathbf{V}(x_i),\mathbf{V}_i\in C^d\}$，定义向量 $\mathbf{V}$ 的 *Samelson* 逆为

$$\mathbf{V}^{-1}=\mathbf{V}^*/|\mathbf{V}|^2,\mathbf{V}^*\text{ 为 }\mathbf{V}\text{ 的共轭向量。}\tag{1.1.1}$$

所谓向量值有理插值就是寻求向量有理函数

$$\mathbf{R}(x)=\frac{\mathbf{n}(x)}{d(x)}=\mathbf{b}_0+\frac{x-x_0}{\mathbf{b}_1}+\cdots+\frac{x-x_{n-1}}{\mathbf{b}_n}\tag{1.1.2}$$

使之满足插值条件

$$\mathbf{R}(x_i)=\frac{\mathbf{n}(x_i)}{d(x_i)}=\mathbf{V}_i, i=0,1,\cdots,n \tag{1.1.3}$$

其中 $\mathbf{n}(\mathrm{x})$ 是 d 维向量多项式($\mathbf{n}(x)=(n_1(x),\cdots,n_d(x))$, $n_j(x)$ 是 x 的多项式, $j=1,2,\cdots,d$), $d(x)$ 是实多项式, $\mathbf{b}_i$ 是 d 维向量多项式, $x, x_i\in R, i=0,1,\cdots,n$.

注. 形式如

$$b_0+\cfrac{x-x_0}{b_1+\cfrac{x-x_1}{b_2+\cfrac{x-x_2}{b_3+\ddots+\cfrac{x-x_{n-1}}{b_n}}}}$$

的表达式称为有限连分式,为书写方便,有时将它写成

$$b_0+\frac{x-x_0}{b_1}+\cdots+\frac{x-x_{n-1}}{b_n},$$

或 $b_0+\frac{x-x_0|}{|\ b_1}+\cdots+\frac{x-x_{n-1}|}{|\ b_n}$,

下面介绍构造插值公式的方法[84]

首先定义一个向量

$$\mathbf{b}_0=\mathbf{V}_0 \tag{1.1..4}$$

然后对 $i=1,2,\cdots,n$ 定义

$$\mathbf{R}_1(\mathrm{x}_i)=\frac{\mathrm{x}_i-\mathrm{x}_0}{\mathbf{V}_i-\mathbf{b}_0} \tag{1.1.5}$$

对 $k=1,2,\cdots,n-1$ 定义

$$\mathbf{b}_k=\mathbf{R}_k(x_k), \tag{1.1.6}$$

且对 $k+1,\cdots,n$

$$\mathbf{R}_{k+1}(x_i)=\frac{x_i-x_k}{\mathbf{R}_k(x_i)-\mathbf{b}_k} \tag{1.1.7}$$

最后定义

$$\mathbf{b}_n=\mathbf{R}_n(x_n) \tag{1.1.8}$$

将用此方法确定的 $\mathbf{b}_1,\cdots,\mathbf{b}_n$ 代入(1.1.2),并由后向前有理化便可

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

得 $\mathbf{R}(x)=\mathbf{n}(x)/d(x)$。

例 已知

i	0	1	2	3
x_i	-1	0	1	2
$\mathbf{V}_i$	$(0,0,0)$	$(\frac{1}{3},-\frac{1}{3},-\frac{1}{3})$	$(\frac{7}{5},-\frac{1}{5},0)$	$(\frac{27}{17},0,\frac{6}{17})$

求 $\mathbf{R}(x)=\mathbf{n}(x)/d(x)$ 使之满足 $\mathbf{R}(x_i)=\mathbf{V}_i(i=0,1,2,3)$.

$$\mathbf{b}_0=\mathbf{V}_0=(0,0,0).$$

由
$$\mathbf{R}_1(x_i)=\frac{x_i-x_0}{\mathbf{V}_i-\mathbf{b}_0}$$
得
$$\mathbf{R}_1(x_0)=0$$

$$\mathbf{R}_1(x_1)=\frac{x_1-x_0}{\mathbf{V}_1-\mathbf{b}_0}=\frac{0-(-1)}{(\frac{1}{3},-\frac{1}{3},-\frac{1}{3})-(0,0,0)}$$

$$=\frac{1}{(\frac{1}{3},-\frac{1}{3},-\frac{1}{3})}$$

$$=\frac{(\frac{1}{3},-\frac{1}{3},-\frac{1}{3})^*}{(\frac{1}{3})^2+(-\frac{1}{3})^2+(-\frac{1}{3})^2}=(1,-1,-1),$$

$$\mathbf{R}_1(x_2)=\frac{x_2-x_0}{\mathbf{V}_2-\mathbf{b}_0}=\frac{2}{(\frac{7}{5},-\frac{1}{5},0)}=(\frac{7}{5},-\frac{1}{5},0),$$

$$\mathbf{R}_1(x_3)=\frac{x_3-x_0}{\mathbf{V}_3-\mathbf{b}_0}=\frac{3}{(\frac{27}{17},0,\frac{6}{17})}=(\frac{9}{5},0,\frac{2}{5}).$$

由(1.1.6)得

$$\mathbf{b}_1=\mathbf{R}_1(x_1)=(1,-1,-1).$$

由(1.1.7)

$$\mathbf{R}_2(x_i)=\frac{x_i-x_1}{\mathbf{R}_1(x_i)-\mathbf{b}_1},i=2,3$$

得

$$\mathbf{R}_2(x_2)=\frac{x_2-x_1}{\mathbf{R}_1(x_2)-\mathbf{b}_1}=\left(\frac{2}{9},\frac{4}{9},\frac{5}{9}\right),$$

$$\mathbf{R}_2(x_3)=\frac{x_3-x_1}{\mathbf{R}_1(x_3)-\mathbf{b}_1}=\left(\frac{4}{9},\frac{5}{9},\frac{7}{9}\right)$$

又 $\quad \mathbf{b}_2=\mathbf{R}_2(x_2)=\left(\frac{2}{9},\frac{4}{9},\frac{5}{9}\right).$

而

$$\mathbf{R}_3(x_3)=\frac{x_3-x_2}{\mathbf{R}_2(x_3)-\mathbf{b}_2}=(2,1,2)=\mathbf{b}_3$$

最后有

$$\mathbf{R}(x)=(0,0,0)+\frac{x+1}{(1,-1,-1)}+\frac{x}{\left(\frac{2}{9},\frac{4}{9},\frac{5}{9}\right)}+\frac{x-1}{(2,1,2)}$$

由后向前有理化可得

$$\mathbf{R}(x)=\frac{\frac{1}{2}(x+1)(3x^2+2x+2,x-2,x^2+x-2)}{5x^2-3x+3}=\frac{\mathbf{n}(x)}{d(x)}$$

可以验证 $\mathbf{R}(x)$ 满足插值条件，且 $d(x)\mid|\mathbf{n}(x)|^2$（"$\mid$"表示整除记号）

从(1.1.5)可知

$$\mathbf{V}_i=\mathbf{b}_0+\frac{x_i-x_0}{\mathbf{R}_1(x_i)} \tag{1.1.9}$$

由(1.1.7)对 $k=1,2,\cdots,n-1$ 得

$$\mathbf{R}_k(x_i)=\mathbf{b}_k+\frac{x_i-x_k}{\mathbf{R}_{k+1}(x_i)} \tag{1.1.10}$$

由(1.1.1)定义的向量 $\mathbf{V}$ 的 Samelson 逆向量 $\mathbf{V}^{-1}=\mathbf{W}$ 具有性质：范数 $\|\mathbf{W}\|_2$ 最小；$(\mathbf{V}^{-1})^{-1}=\mathbf{V}$；$\mathbf{V}\cdot\mathbf{V}^{-1}=1$。

一个向量有理函数 $\mathbf{R}(x)=\dfrac{\mathbf{n}(x)}{d(x)}$ 称为是$[l/m]$型，如果 $\mathbf{n}(x)=(n_1(x),\cdots n_d(x))$ 是多项式，n_j 的次数 $\partial n_j\leqslant l$，$j=1,2,\cdots d$，对某个 j_1，$\partial n_{j_1}=l$，$d(x)$ 是 m 次多项式。

由于向量值函数有理插值是一般函数有理插值的推广。因此它必须满足一些性质。例如

(i)如果对某个固定的 k，向量$\mathbf{V}_i$的第 k 个分量是仅有的非零向量，即$V_i^j=0, j=1,\cdots,k-1,k+1,\cdots d$，则向量值函数有理插值问题就转化为相应的有理分式插值；

(ii)如果每个向量$\mathbf{V}_i$的所有分量是成比例的，即$V_i^k=\lambda_k\mu_i, k=1,2,\cdots,d$，且数量 μ_i 在 x_i 被相应的数量有理函数 $r(x)$所插值，则向量值有理插值分量为 $\lambda_k r(x), k=1,2,\cdots,d$.

由变换(1.1.1)及(1.1.4)～(1.1.8)构成的向量有理插值(1.1.2)称为一元 *Thiele* 向量有理插值，简记 GIRI。

可以证明

引理 1.1　若对截断连分式(1.1.2)从末项起逐项向前实施变换(1.1.1)及有理化，则存在$\mathbf{n}(x)\in\mathbf{C}^d$ 及实多项式 $d(x)$满足

(i)　$\mathbf{R}(x)=\mathbf{n}(x)/d(x), d(x)\geqslant 0$；

(ii)　$d(x) \mid |\mathbf{n}(x)|^2$。

引理 1.2　设

$$\mathbf{R}(x)=\mathbf{n}(x)/d(x)=\mathbf{b}_0+\frac{x-x_0}{\mathbf{b}_1}+\cdots+\frac{x-x_{n-1}}{\mathbf{b}_n}$$

则　**(i)**若 n 是偶数，则 $\mathbf{R}(x)$具有$[n/n]$型；

(ii)若 n 是奇数，则 $\mathbf{R}(x)$具有$[n/n-1]$型。

设$\mathbf{R}_1(x)=\dfrac{\mathbf{n}_1(x)}{d_1(x)}, \mathbf{R}_2(x)=\dfrac{\mathbf{n}_2(x)}{d_2(x)}$是任意两个 *GIRI*，若它们满足

(i)　$\mathbf{R}_1(x_i)=\mathbf{R}_2(x_i)=\mathbf{V}_i \ i=0,1,\cdots,n$；

(ii)　具有相同的型，

则称$\mathbf{R}_1(x)$与$\mathbf{R}_2(x)$等价，记为$\mathbf{R}_1(x)\sim\mathbf{R}_2(x)$.

今后，凡两个等价的向量有理函数，我们就认为是一个向量有理函数。

引理 1.3　设 $\mathbf{R}(x)=\mathbf{n}(x)/d(x)$是一个 *GIRI*，且 $d(x)>0$，设点集 $\pi_x^n\subset(a,b)$，向量函数 $\mathbf{V}(x)$在(a,b)内具有直到 $n+1$ 阶的连续导数，则对任意 $x\in(a,b)$成立下面误差公式

$$\mathbf{V}(x)-\mathbf{R}(x)=\mathbf{V}(x)-\left[\mathbf{b}_0+\frac{x-x_0}{\mathbf{b}_1}+\cdots+\frac{x-x_{n-1}}{\mathbf{b}_n}\right]$$
$$=\frac{W_n(x)}{(n+1)!\ d(x)}\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}[d(x)\mathbf{V}(x)]_{x=\zeta},$$

其中 $\zeta\in(a,b)$，$W_n(x)=(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$.

关于一元向量函数有理插值，有兴趣的读者可参看书末参考文献[84]、[85]、[86]等。

§2 变参数的向量有理插值[66]、[67]、[68]

以 $\boldsymbol{K}$ 表示数域，系数属于 $\boldsymbol{K}$ 的多项式的集合记为 $\boldsymbol{K}[z]$，分量属于 $\boldsymbol{K}[z]$的 m 维向量值多项式的集合记为 $\boldsymbol{K}^m[z]$，或简记为 $\boldsymbol{K}^m$。

给定待插值的有限值向量$\boldsymbol{V}_i\in\boldsymbol{K}^m$，插值点 $z_i\in\boldsymbol{K}$，$i=1,2,\cdots,p$ $(z_i\neq z_j,i\neq j)$欲求向量有理函数

$$\frac{\mathbf{n}(z)}{d(z)}=\begin{bmatrix}n_1(z)/d(z)\\ n_2(z)/d(z)\\ \vdots\\ \cdot\\ n_m(z)/d(z)\end{bmatrix}$$

即 $\mathbf{n}(z)\in\boldsymbol{K}^m[z]$，$d(z)\in\boldsymbol{K}[z]$，使满足插值条件：

$$\boldsymbol{V}_i=\frac{\boldsymbol{n}(z_i)}{d(z_i)},i=1,2,\cdots,p \tag{1.2.1}$$

若 $\boldsymbol{n}(z)/d(z)$满足(1.2.1)，必能满足线性插值条件：

$$\boldsymbol{V}_i d(z_i)=\boldsymbol{n}(z_i),i=1,2,\cdots \boldsymbol{p} \tag{1.2.2}$$

反之，只有当 $d(z_i)\neq 0$，满足(1.2.2)的 $\boldsymbol{n}(z)$，$d(z)$才能满足(1.2.1)

设 $m+1$ 维多项式$(\mathbf{n}(z),d(z))=(n_1(z),n_2(z),\cdots,n_m(z),d(z))$，则 $d(z_i)\neq 0$ 等价于$(\mathbf{n}(z_i),d(z_i))\neq 0$，设变参数

$\boldsymbol{S}=(s_1,s_2,\cdots,s_m)\in\boldsymbol{Z}^m$. 若

$$\alpha=max\{\partial n_1-s_1,\partial n_2-s_2,\cdots,\partial n_m-s_m,\partial d\}$$

取最小值，则 α 称为 $(\boldsymbol{n}(z),d(z))$ 的 s 阶数，其中 ∂n_i 表示 $\boldsymbol{n}_i(z)$ 中关于 z 的阶数，事实上，$(\boldsymbol{n}(z),d(z))$ 的 s 阶数 $\leqslant\alpha$ 当且仅当 $\partial n_j\leqslant\alpha+s_j, j=1,2,\cdots,m,\partial d\leqslant\alpha$。

定义 2.1　给定 $z_i\in\boldsymbol{K},V_i\in\boldsymbol{K}^m,i=1,2,\cdots,\boldsymbol{p}$ 和变参数 $s\in\boldsymbol{Z}^m$，求具有最小 s 阶数的 $m+1$ 维多项式 $(\boldsymbol{n}(z),d(z))$ 满足：

$$V_i d(z_i)=\boldsymbol{n}(z_i),i=1,2,\cdots,\boldsymbol{p} \tag{1.2.3}$$

此时称为线性向量有理插值问题，简记为 LVRIP，若加上限制条件 $(\boldsymbol{n}(z_i),d(z_i))\neq 0,i=1,2,\cdots,\boldsymbol{p}$，则称为正规向量有理插值问题，简记为 PVRIP。

将(1.2.3)改写成线性齐次方程组：

$$R_i\boldsymbol{V}(z)=\boldsymbol{V}_i d_v(z_i)-\boldsymbol{n}_v(z_i)=0,i=1,2,\cdots,\boldsymbol{p} \tag{1.2.4}$$

并用 $S_{p,\alpha}$ 表示所有 s 阶数 $\leqslant\alpha$，并满足(1.2.4)的多项式 $(\boldsymbol{n}(z),d(z))$ 的全体。

定理 2.1　集合 $S_{p,\alpha}$ 构成数域 $\boldsymbol{K}$ 上的向量空间。

证明　设 $\boldsymbol{V}(z),\boldsymbol{W}(z)\in S_{p,\alpha}$，即 $R_i\boldsymbol{V}(z)=0,R_i\boldsymbol{W}(z)\neq 0,i=1,2,\cdots,n$，则对 $a,b\in\boldsymbol{K}$，易得

$(R_i(a\boldsymbol{V}(z)+b\boldsymbol{W}(z))=aR_i\boldsymbol{V}(z)+bR_i\boldsymbol{W}(z)=0$，故，$a\boldsymbol{V}(z)+b\boldsymbol{W}(z)\in S_{p,\alpha}$，□

给定整数 α 和 $m+1$ 维多项式 $\boldsymbol{x}(z)$，其中 $\boldsymbol{x}(z)$ 的 s 阶数为 αx，定义 $m+1$ 维多项式 $\{\boldsymbol{x}(z)\}^\alpha$ 的集合如下：

$\{\boldsymbol{x}(z)\}^\alpha=\varnothing$，当 $\alpha<\alpha x$ 时，

$\{\boldsymbol{x}(z)\}^\alpha=\{x(z),zx(z),\cdots,z^{\alpha-\alpha_x}x(z)\}$，当 $\alpha\geqslant\alpha_x$ 时。

定理 2.2　对每个 $\boldsymbol{p}\geqslant 0$，存在 $m+1$ 个 $m+1$ 维多项式 $V_p^j(z),j=1,2,\cdots,m+1$，使得对于每个 α，$|\alpha|\leqslant\infty$，向量空间 $S_{p,\alpha}$ 的基底 $BS_{p,\alpha}$ 的表达式为

$$BS_{p,\alpha}=\bigcup_{j=1}^{m+1}\{V_p^j(z)\}^\alpha$$

证明　见文[68]

现将定理 2.2 中 $m+1$ 个多项式 $V_p^j(z)$，根据它们的 s 阶数排列成一个$(m+1)\times(m+1)$的多项式矩阵如下

$$G_p(z)=[V_p^1(z)V_p^2(z)\cdots V_p^{m+1}(z)]=\begin{bmatrix}n_p^1(z)n_p^2(z)\cdots n_p^{m+1}(z)\\ d_p^1(z)d_p^2(z)\cdots d_p^{m+1}(z)\end{bmatrix}.$$

用 $E_{i,j}$,$E_i(p(z))$,$E_{i,j}(c)$分别表示单位阵 U 中第 i 列与 j 列交换位置，对第 i 列元乘上 $p(z)$，第 j 列乘上数 c 加到第 i 列所得到的初等方阵，下面给出变参数的向量有理插值的算法。

算法 2.1　以下设 p_i 是按 V_i^j 的 s 阶数的增序排列的置换矩阵。令

$$G_0(z)=UP_0=V_0(z).$$

对 $p=0,1,2,\cdots$，求最小的 j，使

$$R_{p+1}V_p^j(z)=\sum_{k=1}^{j-1}C_kR_{p+1}V_p^k(z).$$

若设

$$V'_{p+1}(z)=\prod_{k=1}^{j-1}E_{j,k}(-C_k)\prod_{k\neq j}E_k(z-z_{p+1}),$$

则　$G_{p+1}(z)=G_p(z)V_{p+1}(z)$,

$V_{p+1}(z)=V'_{p+1}(z)P_{p+1}$。算法结束。

现在转而讨论 PVRIP 和 LVRIP 的解。

定理 2.3　设 $V_p^j(z)$，$j=1,2,\cdots,m+1$ 是由定理 2.2 所定义，$G_p(z)=[V_p^1(z)\cdots V_p^{m+1}(z)]$是一$(m+1)\times(m+1)$矩阵。若 $V_p^1(z)$ 不是 PVRIP 的解，则 $\sum_{k=1}^{l}c_kV_p^k(z)$必是 PVRIP 的解，其中对每个 $z=z_i$，$i=1,2,\cdots,p$，l 是使 $G_p^l(z)=[V_p^1(z)\cdots V_p^l(z)]$的秩等于 1 的最小值，且 $G_p^l(z)[C_1\cdots C_l]^T\neq0$。

证明　对某个 i，$1\leqslant i\leqslant p$，当 $V_p^1(z_i)=0$ 时，$V_p^1(z)$是 LVRIR 的解，但不是 **PVRIP** 的解。

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com