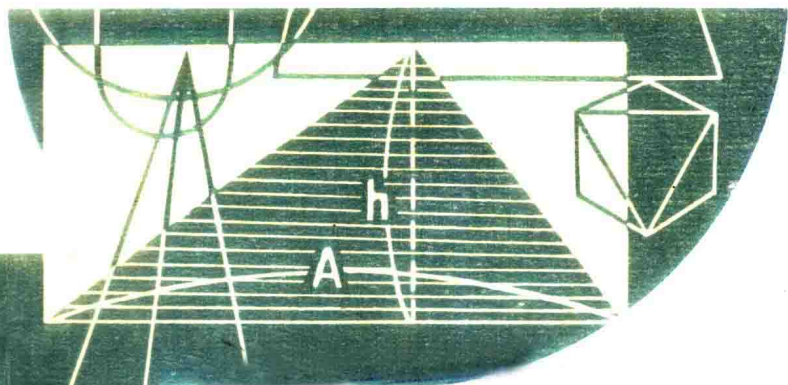


$$\pi = 3.1415\dots$$



# 初中几何疑难解析



初中几何  
疑难解析





# 初中几何疑难解析

(修订本)

江仁俊 江志 编著

湖北教育出版社

中学课程辅导丛书  
初中几何疑难解析  
(修订本)  
江仁俊 江志编著  
封面设计: 杨白子

湖北教育出版社出版、发行 新华书店湖北发行所经销

襄阳报社印刷厂印刷

787×1092毫米32开本 6.5印张 145 000字

1982年3月第1版

1986年3月第2版 1988年2月第3次印刷

印数 670 001—700 500

ISBN 7-5351-0289-1

G·248 定价: 1.05元

## 出版说明

《中学课程辅导丛书》是我们中南五省(区)人民(教育)出版社继《中小学各科教学法丛书》协作出版之后,又一次协作出版供中学生学习用的丛书。丛书包括初、高中各科疑难解析共二十三种。初中部分有:语文、代数、几何、英语、物理、化学、地理、历史、生物、政治,计九种。高中部分有:语文、代数、立体几何、解析几何、微积分、概率、三角、物理、化学、地理、历史、生物、政治、英语,计十四种。这套丛书计划在1983年2月以前基本出齐。

《中学课程辅导丛书》紧扣中学各科教学大纲和统编教材,按照中学生的一般水平,围绕重点,解决疑难,培养兴趣,发展智力,以期加强基础知识,提高学习质量。

参加这套丛书编写的,都是执教多年,对本学科养之有素的教师和专门家。编辑方法,一般以教材为序,一个疑难点写一篇文章。有的用问答形式,有的用论证形式,各篇虽有些联系,但都可以独立成篇,篇幅长短不一,本着要言不烦的原则,当长则长,宜短则短,力求文字生动活泼,内容明白易懂,并富有启发性。

以上数端,只是我们编辑、作者的愿望,出书以后,成败利钝,还有待于在学习检验。我们热切希望听到专家、老师和同学们的意见,以便再版时补充订正。

广东 广西 河南人民(教育)出版社  
湖南 湖北

## 目 录

- 一 什么是平面几何学…………… (1)
- 二 几何上的点线面体与实际生活中的点线面体是一样的吗…………… (3)
- 三 为什么要学习几何…………… (4)
- 四 什么叫做直线…………… (6)
- 五 为什么线段在所有连结两点的线中是最短的…………… (8)
- 六 对“对顶角相等”为什么要进行一般地说理…………… (10)
- 七 怎样进行推理…………… (12)
- 八 命题和句子是一回事吗…………… (14)
- 九 什么叫做证明…………… (16)
- 十 怎样进行论证…………… (17)
- 十一 在证明三角形内角和定理时为什么会想到添辅助线…………… (19)
- 十二 将三角形按边可否分为不等边等腰等边三类…………… (24)
- 十三 怎样才不“想破脑壳”…………… (27)
- 十四 “心里明白写不出来”怎办…………… (33)
- 十五 定理定义公理要不要背…………… (36)
- 十六 两点成轴对称有何重要应用…………… (39)
- 十七 为什么真命题的逆命题有真有假…………… (42)
- 十八 怎样得到某一命题的逆命题…………… (44)
- 十九 为什么平面图形可以看成平面上点的集合…………… (47)
- 二十 符号“ $\implies$ ”有什么优越性…………… (49)

二十一	从勾股定理的证明中可汲取什么养料·····	(53)
二十二	勾股逆定理的证明能给我们什么启示·····	(58)
二十三*	什么叫同一证法·····	(60)
二十四	怎样利用平行四边形的定义和性质来证题·····	(65)
二十五	怎样解答作图题·····	(67)
二十六	三角形奠基法的意义和作用怎样·····	(70)
二十七	中心对称与轴对称有何异同·····	(73)
二十八	证明“直角三角形斜边上的中线等于斜边 的一半”的基本思想是什么·····	(75)
二十九	怎样给概念下定义·····	(78)
三十	如何判定特殊四边形·····	(82)
三十一	对应边平行或垂直的两角的关系怎样·····	(84)
三十二	三角形的中位线定理有什么作用·····	(87)
三十三	等腰梯形的性质定理的证法有何普遍意义·····	(90)
三十四	怎样证明某一四边形是等腰梯形·····	(93)
三十五	为什么线段的量数总是正数·····	(94)
三十六	为什么两条线段的比与所采用的长度单位 没有关系·····	(98)
三十七	合比定理与等比定理的证法有普遍意义吗·····	(99)
三十八	三条平行线截两条直线可得几组线段的比 例式·····	(101)
三十九	平行线分线段成比例定理的地位与作用 怎样·····	(102)
四十	什么叫归纳证法·····	(105)
四十一	定理与推论有何异同·····	(110)
四十二	什么叫代数作图法·····	(111)
四十三	怎样利用线段成比例证线段相等·····	(114)

四十四	如何判定两个三角形相似 .....	(116)
四十五	怎样用相似三角形证线段成比例 .....	(120)
四十六	怎样证三直线共点 .....	(124)
四十七	相似变换与位似变换的意义和作用怎样 .....	(127)
四十八	垂径定理究竟有几个逆定理 .....	(131)
四十九	怎样度量弧 .....	(134)
五十	什么叫反证法 .....	(135)
五十一	怎样证明四点共圆 .....	(141)
五十二*	直线和圆位置关系定理的逆定理的存在 有无必然性 .....	(144)
五十三	圆外切四边形定理的逆定理是否存在 .....	(147)
五十四	有没有割线定理 .....	(148)
五十五	如何证与圆有关的线段成比例型问题 .....	(149)
五十六	正五边形的作图应如何证明 .....	(155)
五十七	哪些作图作为基本作图 .....	(157)
五十八	为什么原命题与逆否命题等价 .....	(159)
五十九	什么叫轨迹 .....	(160)
六十	什么是交轨法作图 .....	(164)
六十一	什么叫直线的方程 .....	(165)
六十二	点到直线的距离公式中的绝对值符号能 否去掉 .....	(167)
六十三	关于直线方程有哪些类型的问题 .....	(171)
六十四	求轨迹的方程有哪些常用的方法 .....	(181)
六十五	坐标法的意义和作用怎样 .....	(184)

## 附录

I	古代几何发展史简介 .....	(189)
---	-----------------	-------

I	什么叫欧氏几何 .....	(190)
II	什么叫非欧几何 .....	(191)
IV	有关勾股定理的来历 .....	(194)
V	关于同一原理的证明 .....	(195)
后记 .....		(197)



## 一 什么是平面几何学

数学是研究空间形式及其数量关系的科学。也就是说，数学研究的对象是“形”和“数”。中学里开设的几何课是数学的一个分支，它研究的则侧重于形。

人们在生产、生活和科学实验中所接触的各种各样的物体，都各有一定的形状。例如，黑板面、书的封面、窗户的玻璃面等；又如，装衣物的木箱、收音机的外壳、装电视机的纸盒等。它们有轻有重，有软有硬，颜色也不尽一样，制造这些物体的材料更是各不相同。如果撇开这些物体的物理性质、化学性质等等不管，只考察、比较它们的形状，而且这种活动在人们的长期实践中经过多次的反复，前一类就逐渐形成了“长方形”的概念(图1)；后一类便抽象概括为“长方体”的概念(图2)。这种仅考察形状，而不考虑物理、化学等特性的物体，就被看成是所谓的“几何体”或“几何图形”。几何图形也简称为“图形”，象这里所谈的长方形、长方体等都是图形。

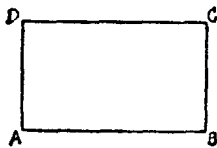


图 1

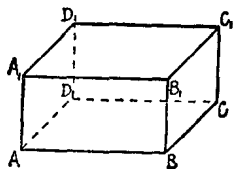


图 2

几何学是研究从现实世界中抽象出来的各种图形的形状、大小和位置关系的科学。

显然，图形可以看成是由点、线、面构成的，即点、线、面的“集合”。在一定条件下，又由于“点动成线”、“线动成面”，所以，任何图形也都可以看成点的集合（详见问题十九）。

不难理解，构成图1长方形的所有点，如 $A$ 、 $B$ 、 $C$ 、 $D$ 等都落在同一个平面上，象这类图形，就是所谓的“平面图形”。图2的长方体则不然，比如 $A$ 、 $B$ 、 $C$ 、 $D_1$ 四点，显然不可能都落在同一个平面上，这就是所谓的“空间图形”或“立体图形”。

研究平面图形的性质的科学是平面几何学，或平面几何。至于对空间图形的研究，则属于立体几何的范畴。

现实世界中的图形是多种多样的，就是平面图形也是千变万化的，我们现在既没有必要、也不可能逐个地去研究。由于人们经过千百年的长期实践，逐渐积累了丰富的图形知识，知道将复杂的图形归结为少数几种最简单的图形来研究。以丈量土地为例，一块普普通通的田地，其形状常常是不规则的，但经过简单的划分后，便可大致归结为一些“三角形”、“平行四边形”（包括长方形）、“弓形”（“圆”的一部分）等面积来计算。因此，初等平面几何所研究的对象是最基本、最常用的平面图形——直线和圆，以及由它们（或它们的一部分）组成的一些图形。

现在初中所学的平面几何（简称平几）就是要抓住三角形、四边形和圆这些基本的图形来研究。特别是其中的三角形，又是最基本的。所研究的问题主要有：

1. 论证：推证图形具有的性质和确定图形的条件（这是最主要的）；
2. 作图：作出符合已知条件的图形；
3. 计算：由已知量推算出未知量。

## 二 几何上的点线面体与实际生活中的点线面体是一样的吗

这在问题一中已经涉及，前者是后者的抽象概括，两者并不一样。

几何上的“点”、“线”、“面”、“体”是专有名词，有其特殊含义，与平常实际生活中所说的点、线、面、体是不同的。日常生活中所说的体，指实际的物体。任何物体，除了形状、大小之外，还有它自己的物理、化学性质，或其它的特征，如质量、重量、密度、硬度、光泽、燃点、溶解度、光洁度等等。而几何学里的体，则只计较形状、大小和位置关系等，不管它们的物理、化学性质，或其它技术上的要求。例如圆钢和竹筒，尽管是两种差之甚远的物体，但从几何的角度看，它们是同一种几何体或图形——圆柱。

为什么几何学只考察或比较形状、大小和位置关系，而不着眼于其它性质呢？这是由于几何学的抽象性所决定的。比方说，我们研究了圆柱的体积算法，那么不论是铁圆柱、木圆柱或竹圆柱等，其体积一概照此计算。因此，对几何体的性质进行研究，其结论的应用就具有广泛性。所以，对凡占有空间一部分的几何图形，我们均称为是几何上的“体”，即几何体。几何体在人们生活的空间里，一般有长、宽、高和空间的相关位置。

同样，几何里的点、线、面，也不同于生活中的点、线、面。生活上的面，如黑板，除了有长、宽和位置外，还有厚薄、颜色等等；线，象一根电线，除了长度和位置外，还有粗细、质料等等；点，象绳索上所打的结点、地图上用以表示地名的

地点，除了有一定的位置外，多少总要有一定的空间，即有大小，还有色彩等等。也是基于抽象性，几何中的面，除了有一定的位置外，它只有长和宽，没有厚薄；线(段)除了有一定的位置外，它只有长度，没有粗细；点只有位置而无大小。

必须说明：几何上的点线面只能依附于体而存在，单独存在的只有几何体，人们为了将几何图形自成一个理论系统予以研究，以便更好地指导实践，才将点、线、面分开来讨论。

### 三 为什么要学习几何

在问题二中我们已简略提到，几何结论的应用具有“广泛性”，可知在中学里开设几何课的重要性。进一步概括地说，学习几何的目的是：

第一，掌握简单几何图形的性质及度量关系，而这些的应用是相当广泛的。工人测量零件或看图施工、放样画线，农民丈量土地面积，炮兵测定射击距离，……全都要利用几何学的初等原理。此外，领航员、天文学家、工程师、物理学家、化学家等也都需要很精确的几何结论。

第二，通过学习，使自己对空间(包括平面)图形具有一定的想象能力，这是进一步学习数学和其它科学所必需的。如高等数学中“线性代数”里的许多概念，都必须利用平面几何、立体几何的知识给出具体模型，才便于理解。

第三，由于几何内容的表现形式，以及研究几何的方法的特殊性，对于“纯粹形式”一般不能做实验，只有用推理的方法，从一些已知的旧有结论，导出另一些未知的新的结论，因而学习几何还有一个独特的目的，即培养人们的逻辑思维能力；还

有严密的数学语言的表述，以至于解题格式的训练，也都不能完全脱离对几何的学习。这种能力的重要性是众所周知的，因为不懂逻辑的人就不可能创造。正因为如此，人们把几何推理看成训练逻辑思维的重要手段。相传，古希腊哲学家柏拉图（约公元前 427—327 年）在他所办的学院门口，挂着一个显赫的牌子，上面写着“不懂几何的人不许入内”。这充分说明，在当时科学发展的水平下，只有通过学习几何，才能使人们的思维方法趋于正确和严密。

此外，逻辑思维能力的培养，不能为其它科目所完全代替。如初等代数、三角、算术等大多都是计算性推理，只有几何，其主要部分采用的是逻辑推理。又如，在世界上有些国家里，有人企图利用“集论”、“抽象代数”等科目来取代初等几何对学生的逻辑推理能力的培养，但都未能得到令人满意的结果。因为那样做，超出了学生的接受能力。只有基本保留欧几里得的《几何原本》（详见附录Ⅱ）的一些内容，根据需要，自成体系地编排，才能为中学生所接受。同时，中学几何内容的阐述，都有一定的图形作为先导和辅助，做到生动的直觉与严谨的推证紧密结合，互相促进，因而中学生是能学好几何的。

上面谈了学习几何的三个主要目的，说明几何的重要性。然而，过份强调初等几何的重要性也是不恰当的。因为初等几何的方法局限了它所能解决的问题。例如，稍比圆复杂一点的曲线，如平面解析几何中的“椭圆”、“抛物线”、“双曲线”等，就要用“解析”的方法进行研究。又如，著名的几何三大问题①

---

① 三等分角——求三等分一已知角。

立方倍积——求作一立方体，使其体积二倍于一已知立方体的体积。

化圆为方——求作一正方形，使其面积等于一已知圆的面积。

——“三等分角”、“立方倍积”、“化圆为方”，在漫长的一千多年里，不知耗费了多少人的毕生精力去谋求解决，但都未获成功，其原因是表面上看来简单的问题，实际上都是初等几何无法解决的。代数学的发展，彻底解决了这一类的几何问题，即利用代数知识，不仅证明了“单以尺规（无刻度的直尺和圆规）为工具，不可能三等分任意角，也不可能解决立方倍积和化圆为方”；而且，哪些能用尺规作图，哪些不能用尺规作图，都可转化为代数问题而加以判定。由此可见，局限在某个学科狭窄的范围内，发展到一定的程度就会失去它的生命力。数学发展到今天，不但各个分支都有极丰富的内容，而且新的分支又不断出现。在浩瀚的知识海洋中，初等几何好象一个美丽的小岛，但不应只停留在它上面，迷恋那诱人的风光，而应在作了必要的锻炼和适当的准备之后，毅然地扬起风帆，远航到广阔的知识海洋中去，寻觅那景色无比壮观的“新大陆”，在那里，将会发现无穷无尽的知识宝藏。

## 四 什么叫做直线

当人们要了解或表达某一事物、思想时，不可避免地要遇到或运用一些概念。概念是思维的最基本的单位，是推理的要素。概念是反映事物的本质属性而用词来表达的。例如，“角”就是几何中的一个概念。要问什么叫做“角”？我们可以很快根据课本回答为：“以一点为公共端点的两条射线所组成的图形叫做角”（《几何》第一册第11页①）。

① 凡本书所说的课本、教材，都指1981年1月人民教育出版社出版的全日制十年制学校初中数学课本《几何》。

这样用简明的语言，描述、刻划概念的本质属性，就是给概念下定义，也就是指出其确定含义。一般来说，理解了某一概念的定义就基本上把握了这一概念。因此，当问“什么叫做”这一类问题时，通常是用定义来回答。

但是，不是所有的数学概念都可以下定义的。因为给一个概念下定义必须利用已知概念和性质，所以每一概念的定义必须依赖前面的已知概念。如果这样追根溯源，那么至少有一个概念不能依赖于别的概念，即不能下定义。这些不能下定义的概念，在数学上叫原始概念（也有的书上叫最简单的概念或基本元素，是不必下定义的）。原始概念本身是不能被定义的，但它们是定义别的概念的基础。几何上的“点”、“直线”、“平面”都是原始概念。这说明直线没有定义，因此，无法回答“什么叫做直线”。如果问“直线的定义是什么”，那更是错误的。

原始概念不能被定义，那么原始概念的本质属性怎样反映出来呢？数学（包括几何）上采用“公理”的方式来描述、刻划原始概念的本质属性。“公理”就是通常所谓的“基本性质”。例如，直线的基本性质是：“两点确定一条直线”，即“经过两点有一条直线，并且只有一条直线”。因此，我们虽然不能回答“什么叫做直线”，但是直线本质属性我们完全可以回答出来。笔直的路线、绷紧的绳索、通过一小孔的光线等，不考虑它们的别的性质，仅就其形状、位置而言，便形成了几何里的直线。直线没有粗细，直线可向两方无限延伸，直线可由两点确定下来。当读者理解了这些，也就理解了直线的概念。

## 五 为什么线段在所有连结 两点的线中是最短的

老师总是教导学生，在学习时要有一种钻研的精神，凡事要问一个“为什么”，并且要有问到底的精神。就是说，要打破砂锅问到底，还要问锅渣在哪里？大量问题，一般可以回答出为什么来。例如，为什么两条直线相交，只有一个交点？我们可以回答：这是因为，假如两条直线有两个交点，那么根据直线的基本性质，这两条直线就互相重合，成为一条直线（见《几何》第一册第4页）。这样回答，每句话都有根据，理由充分，无懈可击。可是，问题问到最原始的时候，要回答出“为什么”往往是不容易的，甚至是办不到的。

在所有连结两点的线中，“线段”（这里指的是直线段，下同）最短；或者说，两点之间，线段最短这要说出为什么来，是不可能的。正如要回答为什么两点确定一条直线一样，是不可能的。这是因为，几何中，关于图形的性质有两种，一种是基本图形（如点、直线等）的基本性质，一种是一般性质。一般性质可以由原始概念、基本性质经过逻辑推理得出，能回答出“为什么”来。例如，象上面说的“两条直线相交，只有一个交点”，就是一般性质，它可以由点、直线这些原始概念和有关的基本性质推证出来。一般性质，我们将称为“定理”（见问题六，详见问题八）。至于基本性质，则是用来作为推出一般性质的基础，其正确性是大家公认的，不需要说出理由来。例如，两点之间，线段最短，这是人们在长期实践中体验到的、并总结出来的真理。从甲地到乙地，在客观需要和可能的情况下，人们总是笔



直走去，决不会“斗折蛇行”。比方说，在开运动会时，为了测出投掷铁饼、铅球的成绩，我们看到裁判员总是把皮尺的起点放在开始投掷的点  $A$  处，然后拉紧落到点  $B$  之间的皮尺(图 3)，量出两点间有多长，以判断成绩的优劣。这正是依据两点间的直线段是唯一的，且是最短的公认道理；否则，没有统一标准，无法比较远近。数学就是以这些最简单的、最少量的性质，作为基本性质，以此导出其它性质来。我们称这些基本性质为公理。

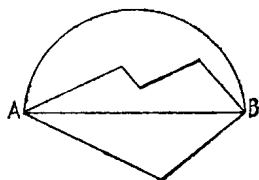


图 3

初中几何里的公理，其正确性均已为千百万劳动人民长期的生活实践和生产实践所证实，并将继续为人们所公认。但不等于说，公理的正确性一定要为人类长久以来的实践所证实。否则，说法就具有片面性。恩格斯说：“数学上的所谓公理是数学需要用来作为其出发点的少数思想规定。”这些思想规定的正确性，有的是为长期实践所证实；有的则不然。例如，和我们初中几何(属于“欧几里得几何”，见附录 I)不同，“罗巴切夫斯基几何学”(即罗氏几何，见附录 II)的平行公理是：“在一平面上，通过一直线  $a$  外一点  $B$ ，可以作  $a$  的两条平行线  $b_1$  及  $b_2$ 。”这一公理的提出不是以人们千百万次实践作基础，它的正确性是在整个罗氏几何建立之后好多年，在对微观世界的研究中，在对宇宙航行的研究中，才被证实的。因此，所谓公理，就是陈述基本元素之间的“基本关系”的所谓“命题”(见问题八)。